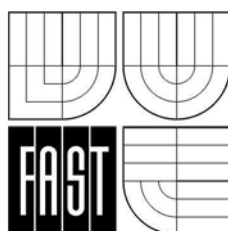


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

ING. JIŘÍ KYTÝR, CSc.
ING. PETR FRANTÍK, Ph.D.

STATIKA II

MODUL BD04-MO1
ROZŠÍŘENÝ PRŮVODCE



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Vážení uživatelé tohoto učebního textu,

dovolujeme si Vás požádat o malé strpení pro využívání této učební pomůcky pro Vaše studium. Při závěrečné kontrole byly navrženy další vylepšující úpravy, které přispějí ke zlepšení kvality učebního textu. Rovněž je potřebné provést formální úpravy, a to zejména nové přečíslování rovnic, obrázků i tabulek, aby se shodovaly s označením kapitol.

Z časových důvodů však nebylo možné úpravy dosud realizovat. Předpokládáme, že opravy provedeme začátkem roku 2006. Posečkejte proto prosím se stahováním a používáním, **do-
kud nezmizí tento upozorňující text.**

Děkují autoři

OBSAH

1 Úvod.....	5
1.1 Cíle	5
1.2 Požadované znalosti	5
1.3 Doba potřebná ke studiu	5
1.4 Klíčová slova.....	5
2 Deformační metoda	7
2.1 Vznik a vývoj deformační metody	7
2.2 Výpočtový model rovinného rámu	7
2.3 Stupeň přetvárné neurčitosti.....	9
2.4 Podstata deformační metody	11
2.5 Obecná deformační metoda ve skalárním tvaru.....	11
2.5.1 Ilustrativní obecně řešený příklad.....	12
2.5.2 Vyjádření koncových sil pomocí parametrů deformace	14
2.5.3 Vyjádření lokálních koncových sil pomocí globálních parametrů deformace	15
2.5.4 Lokální koncové síly kloubově připojeného prutu	16
2.5.5 Ilustrativní obecně řešený příklad – pokračování	16
3 Maticová forma obecné deformační metody	19
3.1 Analýza prutu	19
3.2 Analýza přímého prutu v lokální souřadnicové soustavě	20
3.2.1 Prut oboustranně monoliticky připojený.....	21
3.2.2 Prut pravostranně kloubově připojený	25
3.2.3 Prut oboustranně kloubově připojený	26
3.3 Prut konstantního průřezu	26
3.4 Geometrická transformace do globální soustavy	27
3.4.1 Transformace pro složky koncových sil	29
3.4.2 Transformace u pravoúhlých rámu	30
3.5 Globální vektory prutové soustavy	30
3.5.1 Globální matice a vektory prutu	31
3.5.2 Soustava rovnic	32
3.6 Lokalizace	33
3.7 Dokončení řešení prutů	34
3.7.1 Výpočet koncových sil a průběhy vnitřních sil.....	34
3.7.2 Pružná deformace prutu	34
3.7.3 Výpočet reakcí a kontrola řešení.....	35
3.8 Numerické příklady.....	36
3.8.1 Pravoúhlý rám.....	36
3.8.2 Nosník s vnitřním kloubem.....	40
4 Další možnosti řešení.....	45
4.1 Jiný tvar globální matice a vektoru prutu.....	45
4.2 Spojitý nosník	46
4.3 Pruty proměnného průřezu.....	46

4.4	Deformační zatížení.....	47
4.4.1	Vliv změny teploty	47
4.4.2	Dané nepružné přemístění podpor.....	48
4.5	Příhradový nosník.....	50
4.6	Zjednodušená deformační metoda.....	50
4.6.1	Rekapitulace postupu řešení rámu ZDM s pruty konstantního průřezu	55
5	Tabulky	63
6	Studijní prameny	69
6.1	Seznam použité literatury	69
6.2	Seznam doplňkové studijní literatury.....	69
6.3	Odkazy na další studijní zdroje a prameny.....	69

1 Úvod

1.1 Cíle

Úkolem předmětu Statika II je zvládnout řešení prutových konstrukcí další metodou, a to metodou deformační. Její význam pro řešení rozsáhlejších staticky neurčitých prutových konstrukcí je nenahraditelný, neboť v tomto ohledu nemá konkurenci v metodě silové. Základní předností deformační metody je přehlednost při maticovém zápisu a rovněž možnost její algoritmizace.



Naším cílem bude řešení nosných staticky neurčitých prutových stavebních konstrukcí a získání průběhů vnitřních sil i složek reakcí jako prostředek pro jejich dimenzování podle jednotlivých materiálů.

1.2 Požadované znalosti

Statika II bezprostředně navazuje na předmět Statika I. Využívá znalosti získané v předmětu Základy stavební mechaniky (zejména řešení průběhů vnitřních sil), v předmětu Pružnost a pevnost i v předmětu Statika I (aplikace silové metody je nezbytná pro odvození primárního i sekundárního stavu). Studenti by měli být obeznámeni se základními pojmy z maticové analýzy.



Z matematického aparátu využijeme zejména goniometrické funkce, vektorový a maticový počet i řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul představuje rozšířený průvodce a obsahuje základní látku probíranou v průběhu téměř celého semestru. Doba potřebná k nastudování jednotlivých kapitol či odstavců se liší od několika desítek minut až po hodiny. Záleží zejména na předchozí přípravě studenta ve výše citovaných předcházejících předmětech, ale i na obtížnosti daného tématu. Potřebná doba ke studiu činí 50 až 60 hodin.



1.4 Klíčová slova

mechanika, statika, síla, reakce, interakce, rovnováha, poddajnost, tuhost, vektor, matice, modul pružnosti, momenty setrvačnosti, transformace, prut, prutová soustava, nosník, rám, příhradová konstrukce



2 Deformační metoda

Ve srovnání se silovou metodou probranou ve Statice I je metoda deformační *nepřímá*, neboť se za neznámé veličiny volí *deformace* (složky přemístění) a sestavují se *silové podmínky rovnováhy*. Jako základní soustava se volí *přetvárně určitá soustava* (nehybná), vytvořená přidáním fiktivních vazeb.



2.1 Vznik a vývoj deformační metody

Základy deformační metody položil dánský vědec **A. Ostenfeld**, který v roce 1926 publikoval dílo „Die Deformationsmethode“. Metoda představovala velmi účinný teoretický nástroj pro řešení složitých rámových soustav (včetně kloubů). Vedlo to však na řešení rozsáhlých soustav lineárních algebraických rovnic, což tehdy byla stěžejí překonatelná překážka.

Nutnost řešení soustav rovnic vynikajícím způsobem odstranil americký profesor **Hardy Cross**, který v roce 1929 v článku „Continuity as a Factor in Reinforced Concrete Design“ publikoval **metodu rozdělování momentů** pro rámové soustavy. Ke správnému řešení se však dospělo pouze u rámců s neposuvnými styčníky. Jedná se v podstatě o iterační metodu řešení soustavy rovnic, při níž je jednotlivým krokům iterace přisouzen názorný fyzikální význam. Při řešení se nepočítají všechna pootočení uzlů současně, nýbrž postupně uvolňováním jednotlivých uzlů, přičemž ostatní uzly jsou nehybné. Metoda je přibližná a iterativním postupem se dosahuje požadované přesnosti.

Pro rámy s posuvnými styčníky rozšířil Crossovu metodu český akademik **Václav Dašek** tzv. **metodou rozdělování sil a momentů**, která se stala ve čtyřicátých a padesátých letech dvacátého století nejrozšířenější metodou řešení rámových soustav.

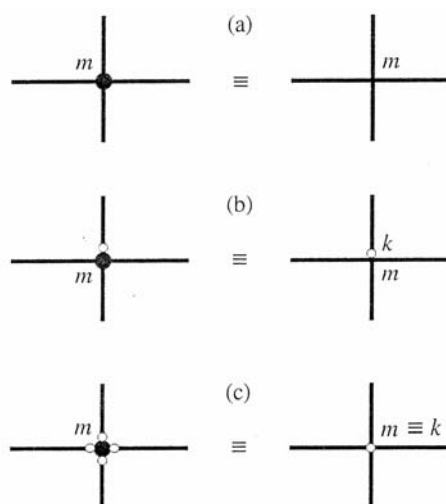
Renesance původní deformační metody přišla až s *rozvojem samočinných počítačů* (asi od šedesátých let dvacátého století). Značnou výhodou je přehledný a jednoznačný postup řešení (algoritmus). Zpočátku byla více používána **zjednodušená deformační metoda**, vhodná zejména pro pravoúhlé rámy. U této varianty vedla závislost odpovídajících posuvů uzlů vzájemně spojených pruty při zanedbání osově deformace prutů k podstatnému snížení počtu rovnic.

Praktické uplatnění v posledních desetiletích nachází **metoda konečných prvků** jako univerzální metoda řešení úloh mechaniky kontinua.

2.2 Výpočtový model rovinného rámu

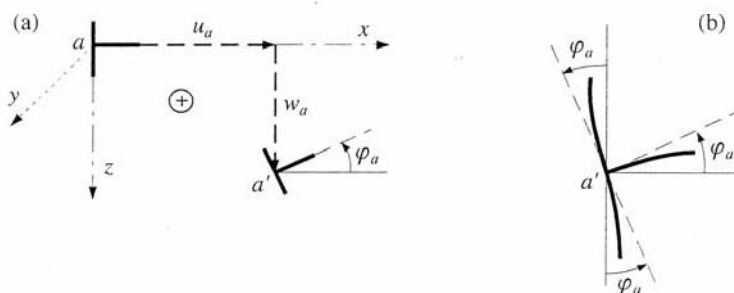
Výpočtový model představuje idealizovaný tvar rovinného rámu, tvořený střednicemi prutů s přisouzenými průřezovými charakteristikami a fyzikálními vlastnostmi materiálu prutů. Idealizované jsou styky prutů, vnější vazby a rovněž zatížení rámu.

Vzájemné spojení prutů soustavy v **uzlech (styčnicích)**, viz obr. 10.1. Uzel může být **monolitický** (rámový, tuhý) nebo **kloubový** (nerámový).



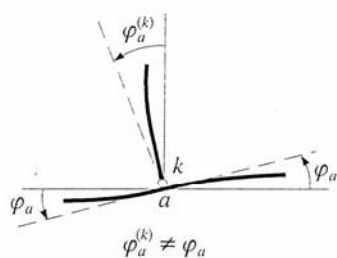
Obr. 10.1: Styčníky rovinné prutové soustavy

Podle způsobu připojení konců prutu k uzlům pak dostáváme prut oboustranně monoliticky připojený, jednostranně kloubově připojený a nebo oboustranně kloubově připojený. Styčník může být volný (nepodepřený) nebo podepřený (vázaný). Volný styčník vykoná při deformaci v rovině xz (obr.10.2) **tři složky přemístění** u , w , φ (neboli *parametry deformace*), které představují **tři stupně volnosti**. Kladné složky posunutí jsou ve směru kladných souřadnicových os a kladné pootočení je proti směru pohybu hodinových ručiček.

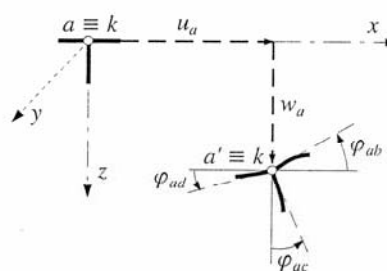


Obr. 10.2: Tři složky přemístění monolitického styčníku

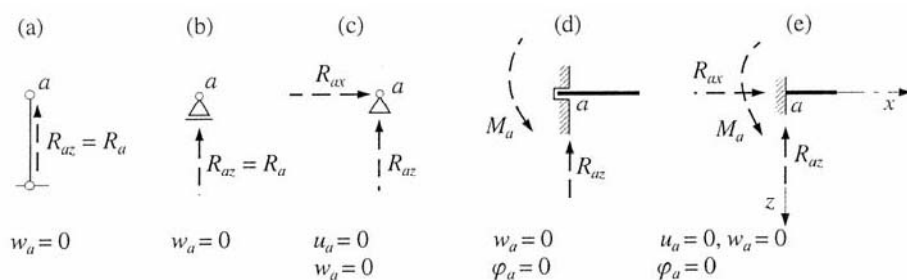
Všechny konce prutů, jdoucí do jednoho styčníku, mají stejné posuny. U monolitického styčníku (obr. 10.2) jsou i všechna pootočení konců prutů stejná. Prut kloubově připojený do styčníku (obr. 10.3) má jiné pootočení než monoliticky připojené pruty. U kloubového styčníku (obr. 10.4) jsou pootočení konců jednotlivých prutů naprosto nezávislá.



Obr. 10.3: Připojení prutu kloubem k monolitickému styčníku



Obr. 10.4: Dvě složky přemístění kloubového styčníku



Obr. 10.5: Vnější vazby rovinné prutové soustavy

Vnější vazby mohou být nepoddajné, poddajné či jednostranné. Nepoddajné (obr. 10.5) odebírají uzlu odpovídající stupně volnosti (váží složky přemístění).

Tab. 10.1: Počet neznámých parametrů deformace

Případ připojení	Schéma připojení	Popis připojení	Neznámé parametry deformace	
			počet	druh
1		monolitický styčnick	3	u, w, φ
2		kloubový styčnick	2	u, w
3		monolitický styčnick podepřený kyvným prutem	2	w, φ
4		kloubový styčnick podepřený kyvným prutem	1	u
5		monolitický styčnick podepřený pevným kloubem	1	φ
6		monolitický styčnick vetknutý	0	–
7		vetknutí	0	–
8		* neposuvný kloub	1	φ
			2	–
9		* posuvný kloub	1	u, φ
			2	u

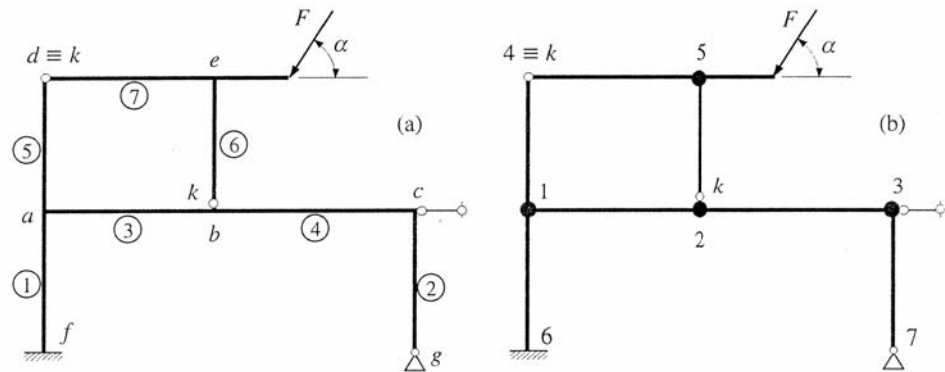
2.3 Stupeň přetvárné neurčitosti

Stupeň přetvárné neurčitosti představuje celkový **počet stupňů volnosti** rovinné prutové soustavy. Udává celkový *počet nezávislých složek přemístění* (parametrů deformace) u, w, φ styčnicků prutové soustavy a současně *počet rovnic* nezbytných pro vyřešení prutové soustavy. Lze ho určit pomocí vztahu

$$n_p = 3t + 2k + p - p_v, \quad (10.6)$$

kde značí t počet monolitických (tuhých) styčnicků, k počet kloubových styčnicků, p počet jednoduchých posuvných podepření (posuvný kloub, kyvný prut) a p_v počet vnějších vazeb umístěných u styčnicků (přepočtených na jednonásobné vazby). Stupeň přetvárné neurčitosti můžeme rovněž určit **rozborem jednotli-**

vých případů styčníků a podpor (např. podle tabulky 10.1). V této tabulce jsou u případů 8 a 9 uvedeny dvě alternativy podle toho, zda uvažujeme prut oboustranně upnutý (alternativa 1), nebo jednostranně kloubově ukončený do podpory (alternativa 2).

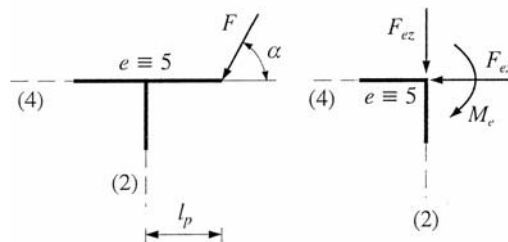


Obr. 10.6: Výpočtový model rovinné prutové soustavy

Jako **příklad** uveďme určení stupně přetvárné neurčitosti rámu z obr. 10.6a. Úložné podmínky v podporách f, g budeme hned respektovat. Do vztahu (10.6) dosadíme $t = 4$ (uzly a, b, c, e), $k = 1$ (uzel d), $p = 0$ a $p_v = 1$ (uzel c), takže

$$n_p = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 - 1 = 13.$$

Pro rozbor jednotlivých styčníků a podporových bodů rozepíšeme jednotlivé neznámé parametry deformace. Uzel a má volné parametry u_a, w_a, φ_a , uzel b parametry u_b, w_b, φ_b , uzel c pouze w_c, φ_c (vodorovný posun u_c je vázán kyvným prutem), uzel d pouze u, w_d (společné pootočení φ_d uzlu neexistuje) a uzel e má volné parametry u_e, w_e, φ_e , tedy celkem $n_p = 13$. Přitom prut 3–7 (jdoucí do podpory g) se uvažoval jako jednostranně kloubově připojený s pootočením ve skutečnosti $\varphi_g \neq 0$, ale uvažovaným smluvní hodnotou nulovou $\varphi_g = 0$, neboť při uvažovaném způsobu připojení prutu 3–7 nelze pootočení φ_g určit. Tímto postupem jsme získali minimální hodnotu stupně přetvárné neurčitosti.



Obr. 10.7: Vliv převislého konce na styčník prutové soustavy

Stupeň přetvárné neurčitosti mohou ovlivnit další faktory, např. způsob modelování **převislého konce**. Převislý konec můžeme

- nahradit ekvivalentním silovým účinkem do styčnicku (obr. 10.7),
- uvažovat konzolu jako
 - oboustranně monoliticky ukončený prut a přidat parametry u_h, w_h, φ_h ,

- jednostranně kloubově ukončený prut na volném konci a přidat neznámé parametry u_h , w_h , přičemž pootočení φ_h bude mít smluvní nulovou hodnotu.

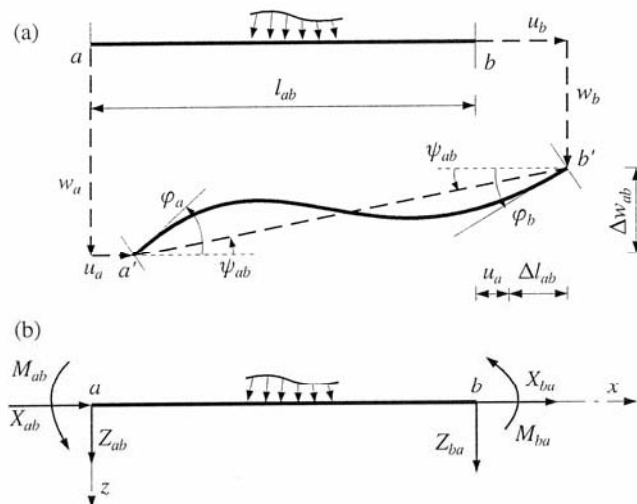
2.4 Podstata deformační metody

Stručně můžeme podstatu obecné deformační metody vystihnout tak, že pro každý uvolněný uzel a podporový bod sestavíme příslušné globální statické podmínky rovnováhy. Ve výsledném tvaru je musíme vyjádřit pomocí neznámých veličin – globálních parametrů deformace u , w , φ jednotlivých uzlů. Síly působící na styčníky vyšetřujeme jako koncové síly prutu, nejvýhodněji v lokální souřadnicové soustavě prutu pomocí lokálních parametrů deformace. Vazbu mezi lokálními a globálními veličinami (silami i deformacemi) zprostředkují transformační vztahy.

Vysvětlení podstaty deformační metody provedeme ve *skalárním tvaru*. Pro vlastní řešení pak bude výhodnější a přehlednější *maticová forma* zápisu.

2.5 Obecná deformační metoda ve skalárním tvaru

Po přiložení zatížení se prutová soustava pružně zdeformuje (styčníky se posunou a pootočí) a soustava se ustálí v rovnovážném stavu. Přitom obvykle zanedbáváme malý vliv posouvajících sil na přetvoření. Deformaci prutu (obr. 10.8) ovlivňuje jednak *zatížení* prutu (označíme jako *primární stav*) a *pružná přemísťení* konců prutů prostřednictvím uzlů (označíme jako *sekundární stav*).



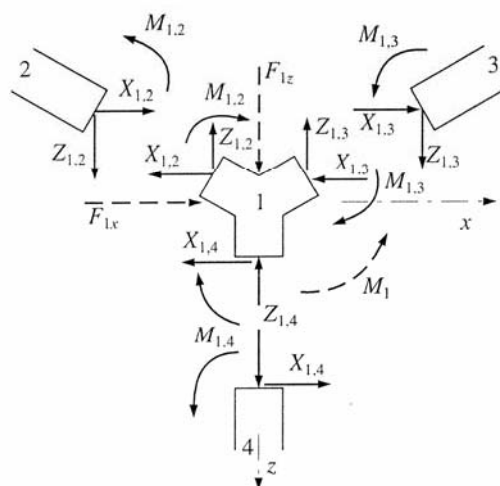
Obr. 10.8: Deformace prutu a – b pružně upnutého do styčníků a , b

V monolitickém uzlu (obr. 10.9) sestavíme tři statické podmínky rovnováhy

$$\sum_a F_x = 0, \quad \sum_a F_z = 0, \quad \sum_a M_y = 0, \quad (10.4)$$

v kloubovém uzlu (obr. 10.10) pak dvě statické podmínky rovnováhy

$$\sum_d F_x = 0, \quad \sum_d F_z = 0. \quad (10.5)$$

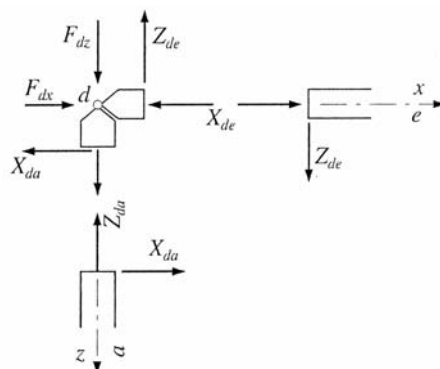


Obr. 11.1: Složky interakcí a uzlové zatížení monolitického uzlu

2.5.1 Ilustrativní obecně řešený příklad



Postup řešení rovinného rámu deformační metodou ve skalárním tvaru ukážeme na obecně řešeném **příkladu** jednoduchého kosoúhlého rámu (obr. 11.2). Přetvárně neurčité veličiny (při uvážení úložných podmínek) jsou u_1 , w_1 , φ_1 a u_2 , w_2 , φ_2 , takže stupeň přetvárně neurčitosti $n_p = 6$.



Obr. 10.10: Složky interakcí v kloubovém uzlu

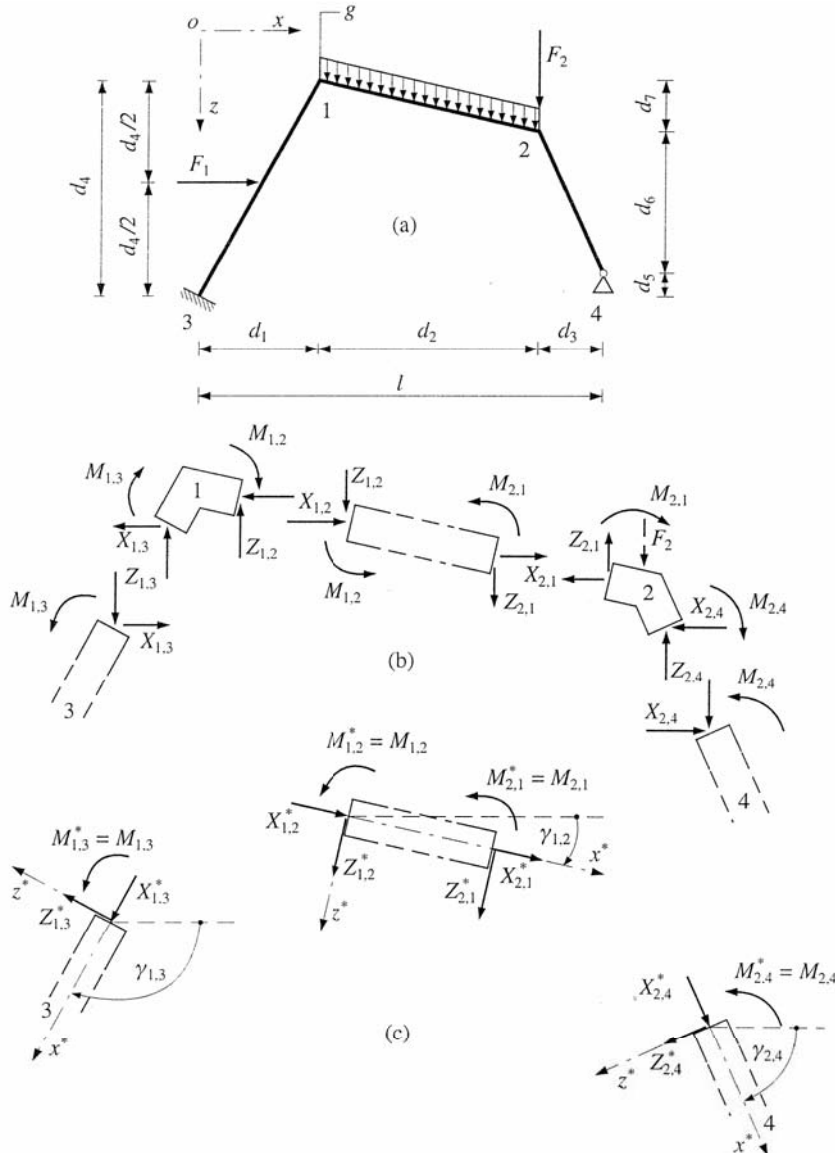
Podmínky rovnováhy v uzlech 1 a 2 (obr. 11.2b) vyjádříme pomocí **globálních koncových sil** $X_{a,b}$, $Z_{a,b}$, $M_{a,b}$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \sum F_{ix,1} = 0 &: -X_{1,2} - X_{1,3} = 0 \\
 \sum F_{iz,1} = 0 &: -Z_{1,2} - Z_{1,3} = 0 \\
 \sum M_{i,1} = 0 &: -M_{1,2} - M_{1,3} = 0 \\
 \sum F_{ix,2} = 0 &: -X_{2,1} - X_{2,4} = 0 \\
 \sum F_{iz,2} = 0 &: -Z_{2,1} - Z_{2,4} + F_2 = 0 \\
 \sum M_{i,2} = 0 &: -M_{2,1} - M_{2,4} = 0
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

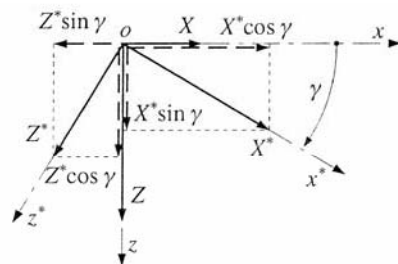
Koncové síly na prutech určíme nejsnadněji v jednotlivých **lokálních souřadnicových soustavách** x^* , z^* . Pro sestavení podmínek rovnováhy (11.1) je proto nutné provést geometrickou **transformaci** (obr. 11.3) a lokální koncové síly převést do globálních koncových sil pomocí vztahů

$$X = X^* \cos \gamma + Z^* \cos \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) = X^* \cos \gamma - Z^* \sin \gamma$$

$$Z = X^* \sin \gamma + Z^* \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) = X^* \sin \gamma + Z^* \cos \gamma$$
(11.2)



Obr. 11.2: Globální (b) a lokální (c) interakce na prutech a v uzlech



Obr. 11.3: Transformace koncových sil

Podmínky rovnováhy (11.1), vyjádřené v **lokálních koncových silách** pomocí (11.2), pak nabudou tvar

$$\begin{aligned}
 X_{1,2}^* \cos \gamma_{1,2} - Z_{1,2}^* \sin \gamma_{1,2} + X_{1,3}^* \cos \gamma_{1,3} - Z_{1,3}^* \sin \gamma_{1,3} &= 0 \\
 X_{1,2}^* \sin \gamma_{1,2} + Z_{1,2}^* \cos \gamma_{1,2} + X_{1,3}^* \sin \gamma_{1,3} + Z_{1,3}^* \cos \gamma_{1,3} &= 0 \\
 M_{1,2}^* + M_{1,3}^* &= 0 \\
 X_{2,1}^* \cos \gamma_{1,2} - Z_{2,1}^* \sin \gamma_{1,2} + X_{2,4}^* \cos \gamma_{2,4} - Z_{2,4}^* \sin \gamma_{2,4} &= 0 \\
 X_{2,1}^* \sin \gamma_{1,2} + Z_{2,1}^* \cos \gamma_{1,2} + X_{2,4}^* \sin \gamma_{2,4} + Z_{2,4}^* \cos \gamma_{2,4} &= 0 \\
 M_{2,1}^* + M_{2,4}^* &= 0
 \end{aligned} \tag{11.3}$$

Lokální koncové síly X^* , Z^* , $M^* = M$ v (11.3) je nutné vyjádřit pomocí neznámých geometrických veličin, tj. globálních parametrů deformace u_1 , w_1 , φ_1 , u_2 , w_2 , φ_2 .

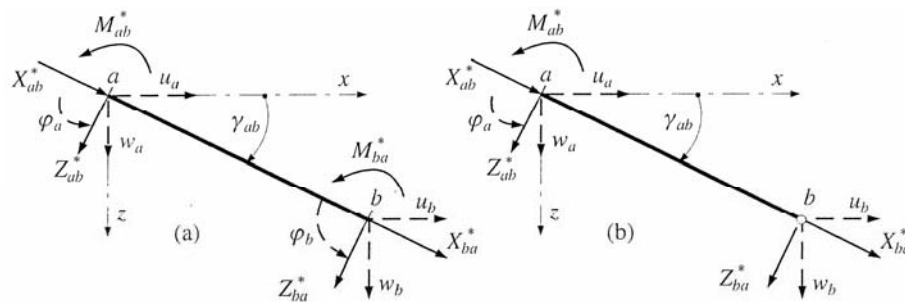
2.5.2 Vyjádření koncových sil pomocí parametrů deformace



Uvažujme prizmatický prut (konstantního průřezu) **oboustranně pružně upnutý** do styčniců, umístěný v lokální souřadnicové soustavě x^* , z^* (obr. 10.8). Nezávisle na sobě můžeme vyšetřit dva stavy, a to **osové** namáhání a **příčné** namáhání. Každý způsob namáhání přitom rozložíme na stav

- **primární** (označíme pruhem) od daného silového zatížení při nehybnosti rámové soustavy, tj. při neposuvnosti koncových bodů prutu,
- **sekundární** (označíme stříškou) od příslušných pružných změn prutu (jako vliv deformačního zatížení působícího v koncích prutu).

Uplatněním principu superpozice pak získáme **výsledný** stav.



Obr. 11.4: Globální parametry deformací a lokální koncové síly prutu

Osově namáhání vyvolá koncové osově síly, a to primární koncové síly \bar{X}_{ab}^* , \bar{X}_{ba}^* od osověho silového zatížení (řešíme silovou metodou, běžné případy lze najít v tabulkách) a sekundární koncové síly \hat{X}_{ab}^* , \hat{X}_{ba}^* od osově dilatace prutu. Výsledné **lokální** koncové osově síly vyjádřené pomocí **lokálních** parametrů deformace jsou

$$X_{ab}^* = \bar{X}_{ab}^* - \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} (u_b^* - u_a^*),$$

$$X_{ba}^* = \overline{X}_{ba}^* + \frac{EA_{ab}}{l_{ab}}(u_b^* - u_a^*). \quad (11.6)$$

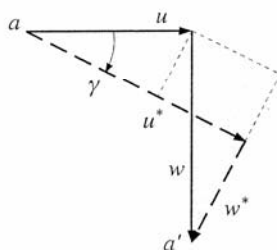
Příčné namáhání vyvolá příčné koncové síly a koncové momenty, a to **primární** koncové síly $\overline{M}_{ab}^*, \overline{M}_{ba}^*, \overline{Z}_{ab}^*, \overline{Z}_{ba}^*$ (řešíme silovou metodou, běžné případy lze najít v tabulkách) a **sekundární** koncové síly od koncových posunutí w_a^*, w_b^* a koncových pootočení φ_a, φ_b . Sekundární momentové složky řešíme silovou metodou pro deformační zatížení a sekundární příčné síly získáme uplatněním podmínek rovnováhy pro sekundární momentové složky. **Výsledné lokální** koncové síly vyjádřené pomocí **lokálních** parametrů deformace pak jsou dány výrazy

$$\begin{aligned} M_{ab}^* &= \overline{M}_{ab}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}} \left(2\varphi_a + \varphi_b - 3 \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} \right) \\ M_{ba}^* &= \overline{M}_{ba}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}} \left(\varphi_a + 2\varphi_b - 3 \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} \right) \\ Z_{ab}^* &= \overline{Z}_{ab}^* + \frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left(\varphi_a + \varphi_b - 2 \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} \right) \\ Z_{ba}^* &= \overline{Z}_{ba}^* + \frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left(\varphi_a + \varphi_b - 2 \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} \right) \end{aligned} \quad (11.9)$$

2.5.3 Vyjádření lokálních koncových sil pomocí globálních parametrů deformace

Lokální složky posunutí (obr. 11.5) u^*, w^* vyjádříme pomocí globálních složek u, w , příslušných celé řešené soustavě, pomocí výrazů

$$u^* = u \cos \gamma + w \sin \gamma, \quad w^* = -u \sin \gamma + w \cos \gamma \quad (11.10)$$



Obr. 11.5: Transformace složek posunutí

Vztahy (11.6) a (11.9) pak nabudou tvar

$$\begin{aligned} X_{ab}^* &= \overline{X}_{ab}^* - \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \cos \gamma_{ab} + (w_b - w_a) \sin \gamma_{ab}] \\ Z_{ab}^* &= \overline{Z}_{ab}^* - \frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left\{ \varphi_a + \varphi_b - \frac{2}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{ab}^* &= \overline{M}_{ab}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}} \left\{ 2\varphi_a + \varphi_b - \frac{3}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\} \\
X_{ba}^* &= \overline{X}_{ba}^* + \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \cos \gamma_{ab} + (w_b - w_a) \sin \gamma_{ab}] \\
Z_{ba}^* &= \overline{Z}_{ba}^* + \frac{6EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left\{ \varphi_a + \varphi_b - \frac{2}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\} \\
M_{ba}^* &= \overline{M}_{ba}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}} \left\{ \varphi_a + 2\varphi_b - \frac{3}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\} \quad (11.11)
\end{aligned}$$

2.5.4 Lokální koncové síly kloubově připojeného prutu

Uvažujme prizmatický prut (konstantního průřezu) pravostranně **kloubově připojený** ke styčnicku, umístěný v lokální souřadnicové soustavě x^* , z^* (obr. 10.). Obdobným postupem jako v odst. 2.4.3 získáme lokální koncové síly

$$\begin{aligned}
X_{ab}^* &= \overline{X}_{ab}^* - \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \cos \gamma_{ab} + (w_b - w_a) \sin \gamma_{ab}] \\
Z_{ab}^* &= \overline{Z}_{ab}^* - \frac{3EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left\{ \varphi_a - \frac{1}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\} \\
M_{ab}^* &= \overline{M}_{ab}^* + \frac{3EI_{ab}}{l_{ab}} \left\{ \varphi_a - \frac{1}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\} \quad (11.12) \\
X_{ba}^* &= \overline{X}_{ba}^* + \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \cos \gamma_{ab} + (w_b - w_a) \sin \gamma_{ab}] \\
Z_{ba}^* &= \overline{Z}_{ba}^* + \frac{3EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left\{ \varphi_a - \frac{1}{l_{ab}} [(u_b - u_a) \sin \gamma_{ab} - (w_b - w_a) \cos \gamma_{ab}] \right\}
\end{aligned}$$

2.5.5 Ilustrativní obecně řešený příklad – pokračování



Další postup řešení ukážeme na dříve obecně řešeném **příkladu** jednoduchého kosoúhlého rámu z obr. 11.2. Do podmínky rovnováhy (11.3) dosadíme konkrétní obecné výrazy pro lokální koncové síly vyjádřené pomocí globálních parametrů deformace, a to ze vztahů (11.11) určíme $X_{1,3}^*$, $Z_{1,3}^*$, $M_{1,3}^*$, $X_{1,2}^*$, $Z_{1,2}^*$, $M_{1,2}^*$, $X_{2,1}^*$, $Z_{2,1}^*$, $M_{2,1}^*$ a z výrazů (11.12) pak $X_{2,4}^*$, $Z_{2,4}^*$, $M_{2,4}^*$.

Výslednou **soustavu rovnic** vyjádřenou v neznámých globálních parametrech deformace lze v obecném tvaru zapsat přehledně do tabulky 11.1.

Tab. 11.1: Obecný tvar soustavy rovnic kosoúhlého rámu z obr. 11.2a

$$(c_{i,j} = \cos \chi_j, s_{i,j} = \sin \chi_j)$$

	u_1	w_1	φ_1	u_2	w_2	φ_2	Pravá strana	
1	$\frac{EA_{1,2} c_{1,2}^2}{I_{1,2}} + \frac{EA_{1,3} c_{1,3}^2}{I_{1,3}} + 12 \frac{EI_{1,2} s_{1,2}^2}{I_{1,2}^3} + 12 \frac{EI_{1,3} s_{1,3}^2}{I_{1,3}^3}$	$\left(\frac{EA_{1,2}}{I_{1,2}} - 12 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}^3} \right) \cdot s_{1,2} c_{1,2} + \left(\frac{EA_{1,3}}{I_{1,3}} - 12 \frac{EI_{1,3}}{I_{1,3}^3} \right) \cdot s_{1,3} c_{1,3}$	$6 \frac{EI_{1,2} s_{1,2}}{I_{1,2}^2} + 6 \frac{EI_{1,3} s_{1,3}}{I_{1,3}^2}$	$-\frac{EA_{1,2} c_{1,2}^2}{I_{1,2}} - 12 \frac{EI_{1,2} s_{1,2}^2}{I_{1,2}^3}$	$\left(-\frac{EA_{1,2}}{I_{1,2}} + 12 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}^3} \right) \cdot s_{1,2} c_{1,2}$	$\left(-\frac{EA_{1,2}}{I_{1,2}} + 12 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}^3} \right) \cdot s_{1,2} c_{1,2}$	$6 \frac{EI_{1,2} s_{1,2}}{I_{1,2}^2}$	$-\bar{X}_{1,2}^* c_{1,2} - \bar{X}_{1,3}^* c_{1,3} + \bar{Z}_{1,2}^* s_{1,2} + \bar{Z}_{1,3}^* s_{1,3}$
2		$\frac{EA_{1,2} s_{1,2}^2}{I_{1,2}} + \frac{EA_{1,3} s_{1,3}^2}{I_{1,3}} + 12 \frac{EI_{1,2} c_{1,2}^2}{I_{1,2}^3} + 12 \frac{EI_{1,3} c_{1,3}^2}{I_{1,3}^3}$	$-\frac{EI_{1,2} c_{1,2}}{I_{1,2}^2} - \frac{EI_{1,3} c_{1,3}}{I_{1,3}^2}$	$\left(-\frac{EA_{1,2}}{I_{1,2}} + 12 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}^3} \right) \cdot s_{1,2} c_{1,2}$	$-\frac{EA_{1,2} s_{1,2}^2}{I_{1,2}} - 12 \frac{EI_{1,2} c_{1,2}^2}{I_{1,2}^3}$	$-\frac{EI_{1,2} c_{1,2}}{I_{1,2}^2}$	$-\frac{EI_{1,2} c_{1,2}}{I_{1,2}^2}$	$-\bar{X}_{1,2}^* s_{1,2} - \bar{X}_{1,3}^* s_{1,3} - \bar{Z}_{1,2}^* c_{1,2} - \bar{Z}_{1,3}^* c_{1,3}$
3			$4 \left(\frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}} + \frac{EI_{1,3}}{I_{1,3}} \right)$	$-\frac{EI_{1,2} s_{1,2}}{I_{1,2}^2}$	$6 \frac{EI_{1,2} c_{1,2}}{I_{1,2}^2}$	$2 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}}$	$-(\bar{M}_{1,2}^* + \bar{M}_{1,3}^*)$	
4				$\frac{EA_{1,2} c_{1,2}^2}{I_{1,2}} + \frac{EA_{2,4} c_{2,4}^2}{I_{2,4}} + 12 \frac{EI_{1,2} s_{1,2}^2}{I_{1,2}^3} + 3 \frac{EI_{2,4} s_{2,4}^2}{I_{2,4}^3}$	$\left(\frac{EA_{1,2}}{I_{1,2}} - 12 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}^3} \right) \cdot s_{1,2} c_{1,2} + \left(\frac{EA_{2,4}}{I_{2,4}} - 3 \frac{EI_{2,4}}{I_{2,4}^3} \right) \cdot s_{2,4} c_{2,4}$	$-\frac{EI_{1,2} s_{1,2}}{I_{1,2}^2} - 6 \frac{EI_{1,2} s_{1,2}}{I_{1,2}^2} + 3 \frac{EI_{2,4} s_{2,4}}{I_{2,4}^2}$	$-\bar{X}_{2,1}^* c_{1,2} + \bar{Z}_{2,1}^* s_{1,2}$	
5					$\frac{EA_{1,2} s_{1,2}^2}{I_{1,2}} + \frac{EA_{2,4} s_{2,4}^2}{I_{2,4}} + 12 \frac{EI_{1,2} c_{1,2}^2}{I_{1,2}^3} + 3 \frac{EI_{2,4} c_{2,4}^2}{I_{2,4}^3}$	$6 \frac{EI_{1,2} c_{1,2}}{I_{1,2}^2} - 3 \frac{EI_{2,4} c_{2,4}}{I_{2,4}^2}$	$-\bar{X}_{2,1}^* s_{1,2} - \bar{Z}_{2,1}^* c_{1,2} + F_2$	
6						$4 \frac{EI_{1,2}}{I_{1,2}} + 3 \frac{EI_{2,4}}{I_{2,4}}$	$-\bar{M}_{2,1}^*$	

Symetric

Otázky



1. Význam globální a lokální souřadnicové soustavy při řešení prutové konstrukce.
2. Které veličiny se volí za neznámé a jaké podmínky se k tomu využívají?
3. Význam koncových sil (interakcí pro řešení konstrukcí deformační metodou.
4. Vyjádření koncových sil u prutu.
5. Význam primárních a sekundárních složek koncových sil.
6. Výhody a nevýhody skalární formy.

Shrnutí



Seznámili jsme se s principem obecné deformační metody. Ukázali jsme si, jak se vytvoří výpočtový model prutové konstrukce a stanoví počet stupňů volnosti, tj. počet neznámých složek přemístění a současně i počet rovnic. Ve skalárním tvaru jsme v jednotlivých krocích sledovali převedení obecně zapsaných podmínek rovnováhy v uzlu do tvaru rozepsaného v globálních složkách přemístění.

Skalární tvar je vhodný pouze k objasnění podstaty metody, pro praktické řešení či algoritmizaci je však málo použitelný. V další kapitole probereme maticovou formu obecné deformační metody, použitelnou zejména ve spojení s výpočetní technikou.

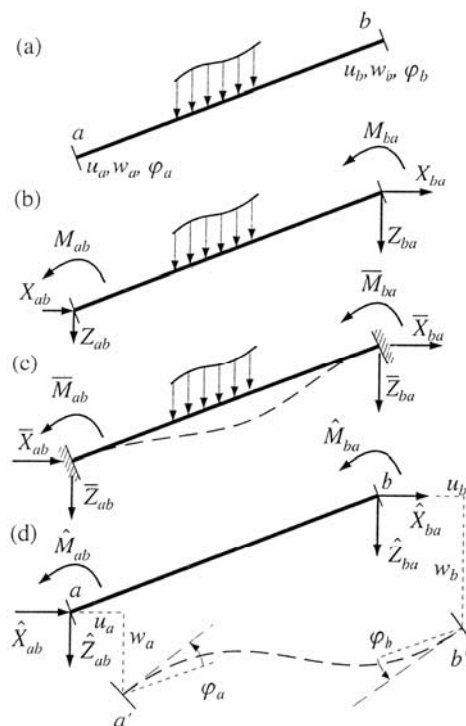
3 Maticová forma obecné deformační metody

Pro každý prut prutové soustavy je k sestavení podmínek rovnováhy ve styčnicích potřebné vyjádřit **globální** koncové síly pomocí **globálních** parametrů deformace prutu (3 složky v každém uzlu). Výhodné bude posléze provést analýzu na prutu v lokální souřadnicové soustavě a pak pomocí geometrické transformace převést do globálních složek.



3.1 Analýza prutu

Uvažujme obecně šikmý prut (obr. 11.6a) oboustranně monoliticky připojený do styčniců s obecným tvarem střednice a s obecným zatížením.



Obr. 11.6: Analýza oboustranně monoliticky připojeného prutu

Po uvolnění prutu ze styčniců působí na jeho koncích (obr. 11.6b) celkem šest globálních složek koncových sil (interakcí). Ty můžeme vyjádřit samostatně pro dokonale upnutý prut od vlivu daného silového zatížení (obr. 11.6c), tzv. **primární stav**, v němž vzniknou primární koncové síly, a od vlivu působení *neznámých* uzlových deformací (obr. 11.6d) při přemístění jednotlivých uzlů a tedy i koncových bodů prutu, tzv. **sekundární stav**, v němž vzniknou sekundární koncové síly.

Primární koncové síly závisí na konkrétním daném zatížení, takže je nemůžeme blíže specifikovat. Sekundární koncové síly vyjádříme (aplikací principu superpozice a úměrnosti) jako lineární funkce globálních parametrů deformace u , w , φ . Superpozicí primárního a sekundárního stavu získáme **výsledné globální koncové síly**

$$\begin{aligned}
X_{ab} &= \bar{X}_{ab} + k_{11}u_a + k_{12}w_a + k_{13}\varphi_a + k_{14}u_b + k_{15}w_b + k_{16}\varphi_b \\
Z_{ab} &= \bar{Z}_{ab} + k_{21}u_a + k_{22}w_a + k_{23}\varphi_a + k_{24}u_b + k_{25}w_b + k_{26}\varphi_b \\
M_{ab} &= \bar{M}_{ab} + k_{31}u_a + k_{32}w_a + k_{33}\varphi_a + k_{34}u_b + k_{35}w_b + k_{36}\varphi_b \\
X_{ba} &= \bar{X}_{ba} + k_{41}u_a + k_{42}w_a + k_{43}\varphi_a + k_{44}u_b + k_{45}w_b + k_{46}\varphi_b \\
X_{ba} &= \bar{X}_{ba} + k_{51}u_a + k_{52}w_a + k_{53}\varphi_a + k_{54}u_b + k_{55}w_b + k_{56}\varphi_b \\
X_{ba} &= \bar{X}_{ba} + k_{61}u_a + k_{62}w_a + k_{63}\varphi_a + k_{64}u_b + k_{65}w_b + k_{66}\varphi_b
\end{aligned} \tag{11.19}$$

kde k_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) jsou **tuhostní součinitele** (konstanty úměrnosti).

Maticově zapíšeme výrazy (11.19) obecně platným vztahem, platným pro prut zcela obecného tvaru

$$\mathbf{R}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{k}_{ab}\mathbf{r}_{ab}, \tag{11.20}$$

kde značí sloupcový vektor **výsledných globálních koncových sil** prutu ab

$$\mathbf{R}_{ab} = \{X_{ab}, Z_{ab}, M_{ab}, X_{ba}, Z_{ba}, M_{ba}\}^T, \tag{11.21}$$

sloupcový vektor **primárních globálních koncových sil** prutu ab

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \{\bar{X}_{ab}, \bar{Z}_{ab}, \bar{M}_{ab}, \bar{X}_{ba}, \bar{Z}_{ba}, \bar{M}_{ba}\}^T, \tag{11.22}$$

čtvercovou **globální matici tuhosti** prutu ab

$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \tag{11.23}$$

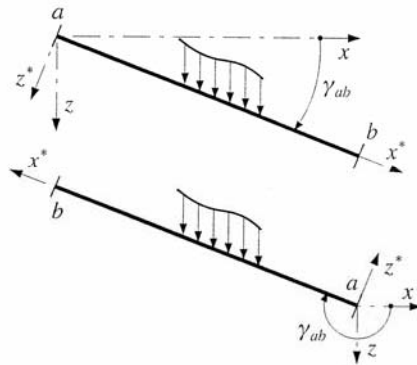
a sloupcový vektor **globálních parametrů deformace** prutu ab

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\}^T. \tag{11.24}$$

Přímé určení globálního vektoru (11.22) a globální matice (11.23) obecně umístěného prutu je obtížnější. Jednodušeji se realizuje v **lokální souřadnicové soustavě** x^*z^* .

3.2 Analýza přímého prutu v lokální souřadnicové soustavě

Pro obecně šikmý prut umístěný v globální soustavě xz zvolíme počátek a prutu, čímž je definována lokální souřadnicová soustava x^*z^* (obr. 11.7). Orientovaný úhel γ_{ab} odměřujeme po směru chodu hodinových ručiček od kladné globální osy x ke kladné lokální ose x^* .



Obr. 11.7: Orientace prutu

Pro **pruty různě připojené** se v lokální souřadnicové soustavě odvodí

- prvky lokálního primárního vektoru \mathbf{a}
- prvky lokální matice tuhosti.

Získáme je řešením jednoduchého staticky neurčitěho nosníku **silovou metodou**. Jako základní soustavu v silové metodě volíme prostý nosník. Určíme **základní deformační součinitele** prutu (*míry poddajnosti prutu*), a to

- od silového zatížení
 - osového, je to koncová osová dilatace δ_0 ,
 - příčného, což jsou koncová pootočení φ_{ab} , φ_{ba} ,
- od jednotkových koncových účinků (deformační zatížení), které vyjadřují přetvárné vlastnosti prutu (uvažujeme je v absolutní hodnotě)
 - koncová osová dilatace δ_1 ,
 - koncová pootočení α_a , α_b , β .

Základní deformační součinitele určíme např. z Maxwellova–Mohrova vztahu. Postupně vyšetříme obecné případy **neprizmatického** prutu

- oboustranně monoliticky připojeného
- jednostranně kloubově připojeného
- oboustranně kloubově připojeného

Zjednodušíme pak na případy **prizmatického** prutu různě připojeného.

3.2.1 Prut oboustranně monoliticky připojený

Primární stav určíme pro prut na obou koncích nehybně upnutý, přičemž na prut působí dané silové zatížení. Základní přetvárně určitý případ je třikrát staticky neurčitý a řeší se silovou metodou (3 přetvárné podmínky a 3 podmínky rovnováhy). Koncové síly (interakce) pak tvoří **lokální primární vektor** (lišící se podle druhu zatížení)

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{\bar{X}_{ab}^*, \bar{Z}_{ab}^*, \bar{M}_{ab}^*, \bar{X}_{ba}^*, \bar{Z}_{ba}^*, \bar{M}_{ba}^*\}^T. \quad (11.25)$$

Prvky vektoru (11.25) představují lokální primární koncové osové síly $\bar{X}_{ab}^*, \bar{X}_{ba}^*$, primární koncové příčné síly $\bar{Z}_{ab}^*, \bar{Z}_{ba}^*$ a primární koncové momenty $\bar{M}_{ab}^*, \bar{M}_{ba}^*$. Řešení složek koncových sil provedeme silovou metodou.

Pro **osové zatížení** uplatněním příslušné přetvárné podmínky vychází

$$\bar{X}_{ba}^* = -\frac{\delta_0}{\delta_1} \quad (11.27)$$

a ze silové podmínky rovnováhy pak získáme

$$\bar{X}_{ab}^* = -\bar{X}_{ba}^* - R = \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \quad (11.30)$$

Pro **příčné zatížení** sestavíme dvě přetvárné podmínky, jejichž obecné řešení je

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ab}^* &= \frac{\varphi_{ab}\alpha_{ba} - \varphi_{ba}\beta}{\alpha_{ba}\alpha_{ab} - \beta^2} \\ \bar{M}_{ba}^* &= \frac{\varphi_{ab}\beta - \varphi_{ba}\alpha_{ab}}{\alpha_{ba}\alpha_{ab} - \beta^2} \end{aligned} \quad (11.29)$$

a ze dvou momentových podmínek rovnováhy dostaneme

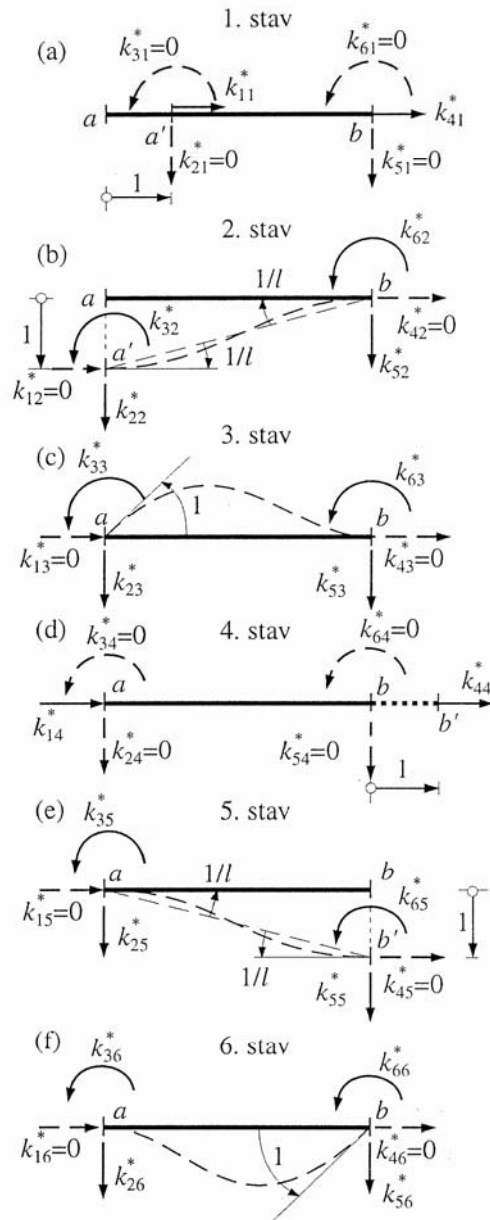
$$\bar{Z}_{ab}^* = Z_{ab,0}^* - \Delta\bar{M}, \quad \bar{Z}_{ba}^* = Z_{ba,0}^* + \Delta\bar{M} \quad (11.31)$$

kde $Z_{ab,0}^*, Z_{ba,0}^*$ představují svislé složky reakcí základní soustavy (prostého nosníku) a dále platí pro momentový doplněk

$$\Delta\bar{M}^* = \frac{1}{l}(\bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^*) = \frac{(\alpha_{ba} + \beta)\varphi_{ab} - (\alpha_{ab} + \beta)\varphi_{ba}}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l} \quad (11.32)$$

Primární vektor oboustranně dokonale upnutého prutu obecně proměnného průřezu pak má tvar

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* - \frac{(\alpha_{ba} + \beta)\varphi_{ab} - (\alpha_{ab} + \beta)\varphi_{ba}}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l} \\ \frac{\varphi_{ab}\alpha_{ba} - \varphi_{ba}\beta}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2} \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* + \frac{(\alpha_{ba} + \beta)\varphi_{ab} - (\alpha_{ab} + \beta)\varphi_{ba}}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l} \\ \frac{\varphi_{ab}\beta - \varphi_{ba}\alpha_{ab}}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2} \end{Bmatrix} \quad (11.33)$$



Obr. 11.12: Jednotkové deformační stavy oboustranně monoliticky připojeného prutu

Sekundární stav vyšetřujeme pro prut nezatížený, jehož koncům se postupně udělují lokální deformace (ve smyslu lokálních složek parametrů deformace)

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, \varphi_a^*, u_b^*, w_b^*, \varphi_b^*\}^T. \quad (11.34)$$

To vyvolá sekundární koncové síly. Udělíme-li jednotkové deformace (obr. 11.12), lze koncové síly sestavit do matice

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & 0 & 0 & k_{14}^* & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^* & k_{23}^* & 0 & k_{25}^* & k_{26}^* \\ 0 & k_{32}^* & k_{33}^* & 0 & k_{35}^* & k_{36}^* \\ k_{41}^* & 0 & 0 & k_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}^* & k_{53}^* & 0 & k_{55}^* & k_{56}^* \\ 0 & k_{62}^* & k_{63}^* & 0 & k_{65}^* & k_{66}^* \end{bmatrix}, \quad (11.37)$$

kteřá představuje **lokální matici tuhosti** oboustranně upnutého prutu. Nulové prvky v matici (11.37) jsou důsledkem nezávislého vlivu osových posunů u_a^*, u_b^* a příčných posunů w_a^*, w_b^* s pootočeními φ_a^*, φ_b^* .

Ukažme si **odvození prvků lokální matice tuhosti** oboustranně upnutého prutu. Uvolněnému prutu postupně udělíme jednotkové velikosti lokálních parametrů deformace (obr. 11.12). Silovou metodou postupně vyšetříme šest deformačních stavů, jimiž jsou vyvolané lokální *sekundární koncové síly* (různých fyzikálních rozměrů).

První deformační stav ($u_a^* = 1$) vede na přetvárnou podmínku, z níž plyne

$$k_{11}^* = \frac{1}{\delta_1} \quad (11.39)$$

Ze silové podmínky rovnováhy pak určíme

$$k_{41}^* = -k_{11}^* = -\frac{1}{\delta_1} \quad (11.40)$$

Druhý deformační stav ($w_a^* = 1$) vede k prutové výchylce. Řešením přetvárných podmínek získáme

$$k_{32}^* = -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l}, \quad k_{62}^* = -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l} \quad (11.43)$$

a z rovnováhy pak

$$k_{22}^* = -k_{52}^* = -\frac{1}{l}(k_{32}^* + k_{62}^*) = \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l^2} \quad (11.44)$$

Třetí deformační stav ($\varphi_a^* = 1$) vede na přetvárné podmínky, jejichž řešením dostaneme

$$k_{33}^* = \frac{\alpha_{ba}}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2}, \quad k_{63}^* = \frac{\beta}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2} \quad (11.46)$$

a z rovnováhy

$$k_{23}^* = -k_{53}^* = -\frac{1}{l}(k_{33}^* + k_{63}^*) = -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l} \quad (11.47)$$

Čtvrtý až šestý deformační stav řešíme analogicky.

Lokální matice tuhosti oboustranně upnutého prutu obecně proměnného průřezu má tvar

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ba}}{D} & 0 & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} \\ \hline -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} & 0 & \frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ab}}{D} \end{array} \right] \quad (11.48)$$

kde hodnota determinantu je

$$D = \alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2. \quad (11.49)$$

Maticе tuhosti (11.48) je symetrická (důsledek Bettiho věty) a je tvořena sedmi různými prvky, vyjádřenými pomocí deformačních součinitelů δ_1 , α_{ab} , α_{ba} , β a délkou l .

3.2.2 Prut pravostranně kloubově připojený

Primární stav se řeší na levostranně vetknutém a pravostranně kloubově uloženém nosníku a sekundární stav na pravostranně kloubově ukončeném prutu podobně jako v odst. 3.2.1.

Primární vektor pravostranně kloubově připojeného prutu obecně proměnného průřezu má tvar

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \begin{array}{c} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* - \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} l} \\ \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}} \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* + \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} l} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (11.54)$$

Lokální matice tuhosti pravostranně kloubově připojeného prutu obecně proměnného průřezu je

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & -\frac{1}{\alpha_{ab}l} & 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab}l} & \frac{1}{\alpha_{ab}} & 0 & \frac{1}{\alpha_{ab}l} & 0 \\ \hline -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & \frac{1}{\alpha_{ab}l} & 0 & \frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (11.62)$$

3.2.3 Prut oboustranně kloubově připojený

Podobně určíme pro prut oboustranně kloubově připojený **primární vektor**

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \begin{array}{c} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ 0 \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* \\ 0 \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* \\ 0 \end{array} \right\} \quad (11.66)$$

a lokální matice tuhosti

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \frac{1}{\delta_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (11.68)$$

U příhradové konstrukce s pouze styčnickovým zatížením pak je $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{0}$.

3.3 Prut konstantního průřezu

V odst. 3.2 byly odvozeny primární vektory (11.33), (11.54), (11.66) a lokální matice tuhosti (11.48), (11.62), (11.68). Platí pro pruty různým způsobem upnuté s **obecně proměnným průřezem**. Jsou vyjádřeny pomocí **základních deformačních součinitelů** δ_1 , α_{ab} , α_{ba} , β prostého nosníku (v absolutní hodnotě) a součinitelů δ_0 , φ_{ab} , φ_{ba} a veličin R , $Z_{ab,0}^*$, $Z_{ba,0}^*$ od daného silového zatížení prostého nosníku.

Prizmatický prut (prut konstantního průřezu, prut stálého průřezu, prut neproměnného průřezu) má $A = \text{konst.}$ a $I = \text{konst.}$ Podle *principu virtuálních*

prací (Maxwellova-Mohrova vztahu) řešíme deformační součinitele jako převročení základní soustavy (prostého nosníku). Pro osovou poddajnost platí

$$\delta_1 = \frac{l}{EA} \quad (11.69)$$

a pro ohybovou poddajnost (základní deformační úhly) je

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \alpha = \frac{l}{3EI}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{6EI}. \quad (11.70)$$

Pomocí nich můžeme sestavit *přímo použitelné tvary* lokálních matic tuhosti prutu konstantního průřezu, viz **tabulka 11.3**.

Dále pomocí (11.69) a (11.70) vyjádříme úpravou vztahů (11.30) a (11.27) osové koncové síly a z výrazů (11.29) koncové momenty oboustranně monoliticky připojeného prutu; obdobně i pravostranně kloubově připojeného prutu. Takto upravené vztahy však obsahují součinitele δ_0 , φ_{ab} , φ_{ba} závislé na *konkrétním daném silovém zatížení*. Například pro **plné spojitě rovnoměrné zatížení** působící po střednici prutu (rozložené na osové $n = \text{konst.}$ a příčné $q = \text{konst.}$) získáme

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \frac{nl^2}{EA} \quad (11.74)$$

a dále

$$\varphi_{ab} = \varphi_{ba} = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}, \quad (11.75)$$

$$R = nl, \quad Z_{ab,0}^* = Z_{ba,0}^* = -\frac{1}{2} ql. \quad (11.76)$$

Pomocí nich sestavíme *přímo použitelné tvary* primárních vektorů koncových sil prutu konstantního průřezu, viz **tabulka 11.2**.

Velmi často využíváme **tabulky primárních momentů** (event. i reakcí nebo posouvajících sil) oboustranně či jednostranně dokonale vetknutého nosníku konstantního průřezu (uapř. tabulky 14.10 a 14.11 na str. 416 – 420 učebnice [1]). Obvykle je *nutné přizpůsobit* tabelární výrazy *konvenci* použité při řešení obecnou deformační metodou.

3.4 Geometrická transformace do globální soustavy

Pruty v prutové soustavě jsou uspořádány zcela libovolně. S výhodou se vyšetřují v **lokálních** souřadnicových soustavách. Parametry deformace (složky přemístění u , w , φ) jsou **globální** pro celou řešenou konstrukci (obr. 11.20). Proto je nutné použít geometrickou transformaci.

Prutu ab přísluší **vektor globálních parametrů deformace**

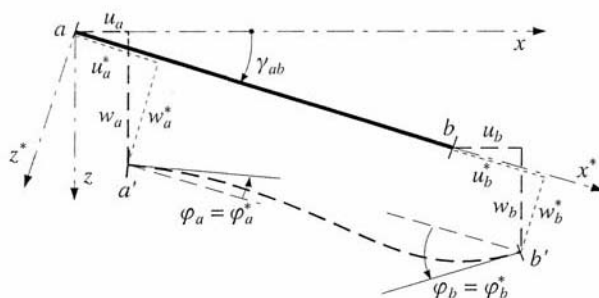
$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\}^T. \quad (11.90)$$

Vzájemný převod parametrů deformace znázorňuje obr. 11.5. Platí vztahy (11.10) a opačně je

$$u = u^* \cos \gamma - w^* \sin \gamma, \quad w = u^* \sin \gamma + w^* \cos \gamma, \quad (11.91)$$

příčměž

$$\varphi = \varphi^*. \quad (11.92)$$



Obr. 11.20: Globální a lokální parametry prutu

Podle (11.10) a (11.92) lze transformaci zapsat maticově

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \quad (11.93)$$

Transformační matice \mathbf{T}_{ab} definuje geometrickou závislost *lokálních složek na globálních*, takže

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.94)$$

Podle vztahů (11.91) a (11.92) platí obráceně

$$\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{r}_{ab}^*. \quad (11.95)$$

Rovněž platí $\mathbf{T}_{ab}^{-1} = \mathbf{T}_{ab}^T$, $\mathbf{T}_{ab} \mathbf{T}_{ab}^{-1} = \mathbf{E}$.

Úspornější zápis (11.94) můžeme provést pomocí submatic, takže platí

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{ab} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_{ab} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{ab}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{ab}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_{ab}^T \end{bmatrix} \quad (11.96)$$

$$\mathbf{t}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.97)$$

V **numerických výpočtech** rovněž využijeme vztahy

$$s = \sin \gamma_{ab} = \frac{z_b - z_a}{l}, \quad c = \cos \gamma_{ab} = \frac{x_b - x_a}{l} \quad (11.98)$$

$$l = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (z_b - z_a)^2} \quad (11.99)$$

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \begin{Bmatrix} u_a c + w_a s \\ -u_a s + w_a c \\ \varphi_a \\ u_b c + w_b s \\ -u_b s + w_b c \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \quad (11.100)$$

3.4.1 Transformace pro složky koncových sil

Vektor výsledných lokálních koncových sil, získaný při analýze prutu, má tvar

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \{X_{ab}^*, Z_{ab}^*, M_{ab}^*, X_{ba}^*, Z_{ba}^*, M_{ba}^*\}^T \quad (11.101)$$

Analogicky ke vztahům (11.93) a (11.95) platí

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{R}_{ab} \quad (11.102)$$

$$\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab}^* \quad (11.103)$$

Přitom pro momentové složky platí $M = M^*$. Obdobně i pro sekundární vektory

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{k}_{ab} \mathbf{r}_{ab}, \quad (11.104)$$

kde \mathbf{k}_{ab} je globální matice tuhosti prutu

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab}. \quad (11.105)$$

Globální matice tuhosti *prismatických prutů* jsou explicitně vyjádřeny v **tabulce 11.4**. V **numerických výpočtech** můžeme vyjádřit globální primární vektor vztahem

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ \bar{M}_{ab} \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ \bar{M}_{ba} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{ab}^T \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* c - \bar{Z}_{ab}^* s \\ \bar{X}_{ab}^* s + \bar{Z}_{ab}^* c \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* c - \bar{Z}_{ba}^* s \\ \bar{X}_{ba}^* s + \bar{Z}_{ba}^* c \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix} \quad (11.106)$$

Pro vyčíslení globální matice tuhosti oboustranně upnutého prutu (tab. 11.4(a)) je vhodné předem vypočítat koeficienty

$$K_1 = \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2, \quad K_2 = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs, \quad K_3 = \frac{6EI}{l^2} s, \\ K_4 = \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2, \quad K_5 = \frac{6EI}{l^2} c, \quad K_6 = \frac{4EI}{l}, \quad K_7 = \frac{K_6}{2} \quad (11.145)$$

a pro prut jednostranně kloubově ukončený (tab. 11.4(b)) koeficienty

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2, & K_2 &= \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs, & K_3 &= \frac{3EI}{l^2} s, \\
K_4 &= \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2, & K_5 &= \frac{3EI}{l^2} c, & K_6 &= \frac{3EI}{l}
\end{aligned} \tag{11.146}$$

3.4.2 Transformace u pravoúhlých rámu

V těchto případech se transformace podstatně zjednoduší. Transformační matice \mathbf{T}_{ab} (11.94) resp. \mathbf{t}_{ab} (11.97) obsahuje jen hodnoty 0, 1 a -1 . **Vodorovný prut** ab při $x \equiv x^*$ má $\gamma_{ab} = 0$ (tedy $\sin \gamma_{ab} = 0$, $\cos \gamma_{ab} = 1$), takže

$$\mathbf{T}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T = \mathbf{E} \tag{11.107}$$

a proto

$$\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}^*, \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab}^*, \quad \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}^*, \quad \mathbf{k}_{ab} = \mathbf{k}_{ab}^*. \tag{11.108}$$

U **svislého prutu** ab lze osu x^* lze volit dvěma způsoby. V případě, že osa x^* směřuje dolů, platí $\gamma_{ab} = \pi/2$ ($\sin \gamma_{ab} = 1$, $\cos \gamma_{ab} = 0$) a matice (11.97) má tvar

$$\mathbf{t}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.109}$$

V případě, že osa x^* směřuje nahoru, je $\gamma_{ab} = 3\pi/2$ ($\sin \gamma_{ab} = -1$, $\cos \gamma_{ab} = 0$) a matice (11.97) má tvar

$$\mathbf{t}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.110}$$

3.5 Globální vektory prutové soustavy

V analýze prutové soustavy přísluší globální matice a vektory prutové soustavy celé řešené *prutové soustavě* (konstrukci). Pro ukázkový případ řešení rámu (obr. 11.2a) máme přitom dvě možnosti volby výpočtového modelu, a to při $n_p = 6$ volíme prut 2–4 jako pravostranně kloubově ukončený a smluvně platí $\varphi_4 = 0$. Při $n_p = 7$ uvažujeme prut 2–4 jako oboustranně monoliticky připojený, takže $\varphi_4 \neq 0$ je další neznámý parametr deformace.

Globální vektor parametrů deformace \mathbf{r} obsahuje všechny volné globální složky přemístění uzlů celé prutové soustavy, sestavuje se v pořadí číslování uzlů (včetně podporových bodů) a pro každý i -tý uzel je stejné pořadí parametrů u_i , w_i , φ_i .

Používají se v podstatě **dvě varianty** globálního vektoru parametrů deformace, a to:

- **První varianta (zkrácená)**, v níž se vázané (nulové) parametry deformace neuvažují. Vektor \mathbf{r} má rozměr $(n_p, 1)$ a neobsahuje nulové členy. Úložné

podmínky jsou již uplatněny. Tatáž konstrukce při různých úložných podmínkách představuje jiné řešení.

- **Druhá varianta (nezkrácená)**, v níž se uvažují všechny parametry deformace všech uzlů (včetně podporových bodů). Vektor \mathbf{r} má rozměr $(3n, 1)$, kde n je celkový počet uzlů a podporových bodů a obsahuje všechny složky přemístění uzlů a podporových bodů, tj. i členy s nulovou hodnotou. Úložné podmínky se uplatňují dodatečně až po sestavení soustavy rovnic. Tímto způsobem lze řešit jednu konstrukci při různých úložných podmínkách jako jediné zadání řešené prutové soustavy (používá se např. v systému ANSYS).

V uvedeném **příkladu** z obr. 11.2a je při *zkrácené (první) variantě* při $n_p = 6$ resp. $n_p = 7$ je

$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T, \quad (11.13)$$

$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2, \varphi_4\}^T, \quad (11.14)$$

při *nezkrácené (druhé) variantě* pak

$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2, u_3, w_3, \varphi_3, u_4, w_4, \varphi_4\}^T. \quad (11.16)$$

Vektor (11.13) souhlasí se záhlavím tabulky 11.1. Vynecháním nulových parametrů na 7. až 11. pozici (resp. na 12. pozici) v důsledku vazeb přejde (11.16) na (11.14), resp. na (11.13).

Globální vektor uzlového zatížení \mathbf{S} má stejný rozměr a strukturu jako vektor \mathbf{r} . Obsahuje osamělé silové a momentové zatížení působící v uzlech. Jsou to kladné síly a momenty působí na kladných smyslech posunutí a pootočení. Síly a momenty působící v podporách jsou zachyceny vnějšími vazbami a při řešení se neuplatní.

V uvedeném **příkladu** z obr. 11.2a je při *zkrácené (první) variantě* s $n_p = 6$

$$\mathbf{S} = \{0, 0, 0, 0, F_2, 0\}^T \quad (11.15)$$

a při *nezkrácené (druhé) variantě*

$$\mathbf{S} = \{0, 0, 0, 0, F_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (11.17)$$

Vektor (11.15) je součástí pravé strany v tabulce 11.1.

3.5.1 Globální matice a vektory prutu

Globální matice a vektory prutu přísluší globální *souřadnicové soustavě*, v níž je popsána celá řešená konstrukce. Pro každý prut se výhodně v lokální souřadnicové soustavě získá lokální primární vektor $\overline{\mathbf{R}}_{ab}^*$ a lokální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab}^* .

Pro komplexní vyjádření společného účinku všech prutů je nutné geometrickou transformací vytvořit globální vektor primárních koncových sil \mathbf{R}_{ab} a globální matici tuhosti \mathbf{k}_{ab} .

3.5.2 Soustava rovnic

Z globálních vektorů $\bar{\mathbf{R}}_{ab}$ a matic k_{ab} jednotlivých prutů sestavíme *lokalizační* soustavu lineárních algebraických rovnic

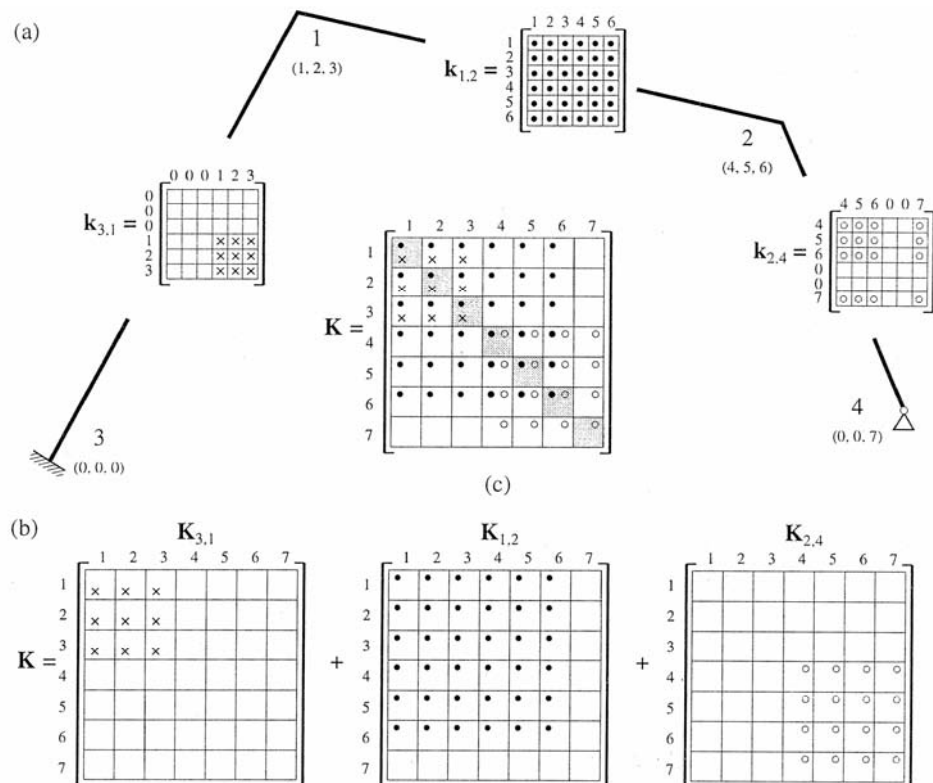
$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (11.140)$$

kde \mathbf{K} je (globální) **matice tuhostí prutové soustavy** (n_p, n_p), \mathbf{r} (globální) **vektor parametrů deformace prutové soustavy** ($n_p, 1$), \mathbf{F} je **zatěžovací vektor prutové soustavy** ($n_p, 1$), tj. **pravá strana**. Každá rovnice soustavy (11.140) představuje jednu silovou (či momentovou) podmínku rovnováhy. V *nezkrácené (druhé) variantě* se v rozměrech vektorů a matic nahradí parametry n_p velikostí $3n$.

Pravou stranu \mathbf{F} soustavy rovnic vytvoříme superpozicí různě definovaných účinků podle vztahu

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}, \quad (11.141)$$

kde \mathbf{S} je globální **vektor uzlového zatížení**, který obsahuje osamělé silové a momentové složky zatížení působící v uzlech, ve směrech a kladných smyslech globálních parametrů deformace, např. pro obě uváděné varianty ve tvarech (11.15) a 11.17), $\bar{\mathbf{R}}$ je **primární vektor prutové soustavy**, jenž zahrnuje vliv silového zatížení prutů prostřednictvím globálních primárních koncových sil; *záporné znaménko* vyjadřuje, že globální koncové síly je nutné převést na uzlové síly.



Obr. 11.25: Lokalizace matice tuhostí rámu

3.6 Lokalizace

Lokalizace se používá k určení primárního vektoru $\bar{\mathbf{R}}$ a matice tuhosti \mathbf{K} celé prutové soustavy. Prvky matic \mathbf{k}_{ab} se umístí na odpovídající místa matice \mathbf{K} (levé strany rovnic) podle pozice jednotlivých neznámých parametrů deformace a prvky vektorů $\bar{\mathbf{R}}_{ab}$ na odpovídající místa vektoru $\bar{\mathbf{R}}$ pro určení účinku zatížení prutů na pravé straně.

Postup je takový, že se pro každý prut sestaví vektor globálních parametrů deformace \mathbf{r}_{ab} a postupně se zpracují všechny pruty, přičemž nezáleží na jejich pořadí.

Názorně si ukažme lokalizaci na příkladu kosoúhlého rámu (obr. 11.2a) v alternativě s $\varphi_4 \neq 0$ a $n_p = 7$. Globální vektor parametrů deformace prutové soustavy je



$$\mathbf{r} = \left\{ u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2, \varphi_4 \right\}^T, \quad (11.142)$$

kde číslice představují lokalizační indexy. Uzly 1 – 4 mají očíslovány parametry deformace takto:

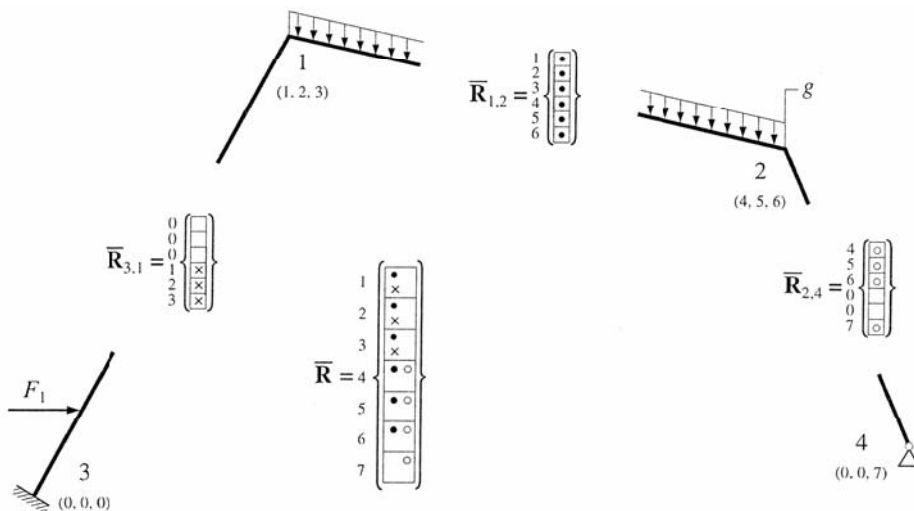
$$(1, 2, 3), (4, 5, 6), (0, 0, 0), (0, 0, 7).$$

Kódové číslo prutu představuje šestici čísel, definující pořadí globálních parametrů deformace obou konců prutu. Pro pruty 3–1, 1–2, 2–4 jsou vektory globálních parametrů deformace

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{3,1} &= \{0, 0, 0, u_1, w_1, \varphi_1\}^T, & \mathbf{r}_{1,2} &= \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T \\ \mathbf{r}_{2,4} &= \{u_2, w_2, \varphi_2, 0, 0, \varphi_4\}^T \end{aligned} \quad (11.143)$$

a jejich kódová čísla jsou

$$(0, 0, 0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 0, 0, 7). \quad (11.144)$$



Obr. 11.26: Lokalizace primárního vektoru rámu

Dvojice lokalizačních indexů (i, j) podle označení řádků a sloupců matice prutu \mathbf{k}_{ab} (obr. 11.25a) představuje adresu pro přiřazení prvku do matice tuhosti kon-

strukce \mathbf{K} . Existuje i velmi názorná (ale prakticky nerealizovatelná) představa, a to vytvoření **lokalizovaných matic** \mathbf{K}_{ab} (n_p, n_p) stejného rozměru jako globální matice tuhosti a jejich následná superpozice do výsledné matice \mathbf{K} , jak znázorňuje obr. 11.25b.

Lokalizace zatěžovacího vektoru probíhá analogicky (viz obr. 11.26), přičemž lokalizační index představuje pouze označení řádku vektoru.

3.7 Dokončení řešení prutů



Při dokončení řešení prutů se vracíme zpět k analýze prutu. Řešením soustavy rovnic (11.140) jsme získali **vektor globálních parametrů deformace prutové soustavy** \mathbf{r} ($n_p, 1$). Pro každý prut vybereme z tohoto vektoru \mathbf{r} podle kódového čísla prutu **globální vektor parametrů deformace prutu** \mathbf{r}_{ab} (6, 1) podle obr. 11.4 ve tvaru (11.90), v němž parametry deformace u_i, w_i, φ_i mají již konkrétní *číselné hodnoty*. Nulový lokalizační index představuje nulovou hodnotu složky přemístění (vnější vazba nebo nesledovaný parametr).

Lokální vektor složek deformací na prutu (11.90) určíme podle transformačního vztahu (11.93), popř. můžeme při numerickém řešení využít explicitního vyjádření (11.100).

3.7.1 Výpočet koncových sil a průběhy vnitřních sil

Vektor **lokálních** složek koncových sil vyřešíme z lokálního primárního vektoru (viz tabulka 11.2), lokální matice tuhosti (viz tabulka 11.3) a z lokálního vektoru známých složek deformací (11.93) ze vztahu

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \overline{\mathbf{R}}_{ab}^* + \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^* \quad (11.89)$$

Jiná varianta řešení spočívá v tom, že pomocí \mathbf{r}_{ab} se ze vztahu

$$\mathbf{R}_{ab} = \overline{\mathbf{R}}_{ab} + \hat{\mathbf{R}}_{ab} = \overline{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{k}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \quad (11.139)$$

určí vektor \mathbf{R}_{ab} a teprve pak se transformuje podle vztahu (11.102) na lokální vektor \mathbf{R}_{ab}^* .

Na uvolněném prutu necháme působit jak dané **silové zatížení**, tak **koncové síly** (interakce). Na základě těchto údajů vykreslíme **průběhy** všech složek výslednice **vnitřních sil** N, V, M . Konvence pro jejich vynášení je na obr. 11.4.

3.7.2 Pružná deformace prutu

Pružnou deformaci libovolného prutu můžeme určit jako

- **relativní** deformaci na vyjmutém prutu považovaném za prostý nosník či konzolu se silovým zatížením a koncovými reakcemi v lokální souřadnicové soustavě (metodami pro řešení přetvoření staticky určitých nosníků),
- **celkovou** deformaci ve vybraném průřezu vzhledem ke globální souřadnicové soustavě, a to přidáním deformace prutu jako tuhého celku od přetvoření koncových bodů (uzlů) k pružné lokální deformaci (po transformaci);

nejjednodušší je přidání nadbytečného uzlu přímo do místa hledané deformace (i když na úkor většího počtu neznámých).

3.7.3 Výpočet reakcí a kontrola řešení

Pro určení globálních složek reakcí a kontrolu řešení celé prutové soustavy pomocí podmínek rovnováhy v uzlech musíme znát u každého prutu vektor **globálních** složek koncových sil, získaný např. transformací

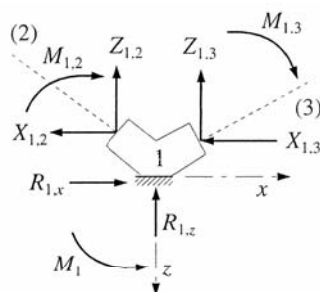
$$\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab}^* \quad (11.103)$$

nebo výpočtem z globálního vektoru složek deformací prutu ab (11.139). Výpočet reakcí se liší podle toho, zda podporový bod je

- **koncem prutu**, pak vektor \mathbf{R}_{ab} poskytne interakce, tj. globální složky reakcí (ve vektoru \mathbf{r}_{ab} a v kódovém čísle jim odpovídají *nuly*),
- představuje **ukončení více prutů** (obr. 11.27); pak se z konců jednotlivých prutů se převezmou globální interakce do uzlu a ve vetknutí se sestaví tři statické podmínky rovnováhy pro tři složky reakcí, v pevném kloubu pak dvě podmínky rovnováhy.

Jako **kontrolu** provedeme

- posouzením vyřešeného **deformačního stavu** z globálního vektoru \mathbf{r} ,
- rovnováhu globálních koncových sil **v uzlech** (obr. 11.1),
- statickou rovnováhu celé **prutové soustavy** podle zadaného zatížení a vypočtených složek reakcí.



Obr. 11.27: Výpočet složek reakcí ve vetknutí

Nejčastější chyby, které se při řešení prutové soustavy obecnou deformační metodou vyskytují, jsou

- při **zadávaní** (korektně se vyřeší jiný výpočtový model), tj. zadají se jiné fyzikálně geometrické vlastnosti, jiné úložné podmínky (vazby), event. jinak působící zatížení (změna znaménka),
- při **ručním řešení** (může nastat chyba v kterémkoli kroku výpočtu), nejčastěji jsou to chybně určená znaménka goniometrických funkcí pro transformaci, nesprávně sestavené matice a vektory prutů, chybné řešení soustavy rovnic či chybný výběr hodnot parametrů deformace prutu atd.

3.8 Numerické příklady

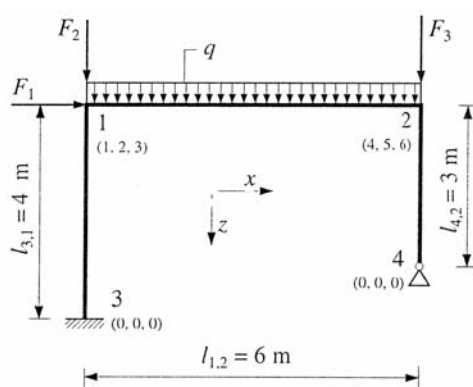
3.8.1 Pravoúhlý rám

Příklad 3.1

Zadání



Vyřešte jednoduchý pravoúhlý rovinný rám (obr. 11.34) s pruty konstantního průřezu a modulem pružnosti $E = 2 \cdot 10^7$ kPa. Sloupy mají průřezovou plochu $A = 6 \cdot 10^{-2}$ m² a moment setrvačnosti $I = 4 \cdot 10^{-4}$ m⁴, příčel má $A = 9 \cdot 10^{-2}$ m², $I = 12 \cdot 10^{-4}$ m⁴. Rám je zatížen uzlovými silami $F_1 = 4$ kN, $F_2 = 5$ kN, $F_3 = 10$ kN a spojitým rovnoměrným zatížením $q = 3$ kNm⁻¹ na příčeli.



Obr. 11.34: Jednoduchý pravoúhlý rám

Řešení



Uvažujme prut 2–4 jako levostranně kloubově uložený. Protože $u_3 = w_3 = \varphi_3 = u_4 = w_4 = \varphi_4 = 0$, stupeň přetvárné neurčitosti $n_p = 6$ a vektor uzlových parametrů deformace rámové soustavy je

$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T.$$

Vektor uzlového zatížení rámu má tvar

$$\mathbf{S} = \{F_1, F_2, 0, 0, F_3, 0\}^T = \{4, 5, 0, 0, 10, 0\}^T.$$

Prut 3–1:

$$\mathbf{r}_{3,1} = \{0, 0, 0, u_1, w_1, \varphi_1\}^T, \text{ kódové číslo } (0, 0, 0, 1, 2, 3),$$

$$l_{3,1} = 4 \text{ m}, c_{3,1} = 0, s_{3,1} = -1, A_{3,1} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2, I_{3,1} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{3,1}^* = \bar{\mathbf{R}}_{3,1} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T.$$

Rozdílné prvky pro lokální matici tuhosti podle tabulky 11.3(a) jsou

$$EA/l = 300\,000, 2EI/l = 4\,000, 4EI/l = 8\,000, 6EI/l^2 = 3\,000,$$

$$12EI/l^3 = 1\,500$$

a podle vztahů (11.145) získáme

$$K_1 = 1\,500, K_2 = 0, K_3 = -3\,000, K_4 = 300\,000, K_5 = 0, K_6 = 8\,000,$$

$$K_7 = 4\,000,$$

takže matice tuhosti pouze s prvky potřebnými k lokalizaci je

$$\mathbf{k}_{3,1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 & \dots & \dots & \dots & 1,5 & 0 & 3 \\ 2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 300 & 0 \\ 3 & \dots & \dots & \dots & 3 & 0 & 8 \end{array} \end{array} \cdot 10^3.$$

Prut 1–2:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T, \text{ kódové číslo } (1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$l_{1,2} = 6 \text{ m}, c_{1,2} = 1, s_{1,2} = 0, A_{1,2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2, I_{1,2} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Podle tabulky 11.2(a) pro $q = 3 \text{ kNm}^{-1}$ a $n = 0$ určíme

$$\bar{\mathbf{R}}_{1,2}^* = \bar{\mathbf{R}}_{1,2} = \{0, -9, 9, 0, -9, -9\}^T.$$

Pro matici tuhosti podle tabulky 11.3(a) vypočteme

$$EA/l = 300\,000, 2EI/l = 8\,000, 4EI/l^2 = 16\,000, 6EI/l^3 = 4\,000,$$

$$12EI/l^3 = 1\,333,33$$

a pak

$$\mathbf{k}_{1,2}^* = \mathbf{k}_{1,2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1,3 & -4 & 0 & -1,3 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 16 & 0 & 4 & 8 \\ \hline 4 & -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1,3 & 4 & 0 & 1,3 & 4 \\ 6 & 0 & -4 & 8 & 0 & 4 & 16 \end{array} \end{array} \cdot 10^3.$$

Prut 4–2:

$$\mathbf{r}_{4,2} = \{0, 0, 0, u_2, w_2, \varphi_2\}^T, \text{ kódové číslo } (0, 0, 0, 4, 5, 6),$$

$$l_{4,2} = 3 \text{ m}, c_{4,2} = 0, s_{4,2} = -1, A_{4,2} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2, I_{4,2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{4,2}^* = \bar{\mathbf{R}}_{4,2} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T.$$

Do tabulky 11.3(c) potřebujeme

$$EA/l = 400\,000, 3EI/l = 8\,000, 3EI/l^2 = 2\,666,66; 3EI/l^3 = 888,88$$

a pro tabulku 11.4(c) podle vztahů (11.146) vyčíslíme

$$K_1 = 888,88; K_2 = 0, K_3 = -2\,666,66; K_4 = 400\,000, K_5 = 0, K_6 = 8\,000,$$

takže

$$\mathbf{k}_{4,2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 4 & \dots & \dots & \dots & 0,8 & 0 & 2,6 \\ 5 & \dots & \dots & \dots & 0 & 400 & 0 \\ 6 & \dots & \dots & \dots & 2,6 & 0 & 8 \end{array} \end{array} \cdot 10^3.$$

Analýza prutové soustavy vychází

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 301,5 & 0 & 3 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 301,3 & -4 & 0 & -1,3 & -4 \\ 3 & -4 & 24 & 0 & 4 & 8 \\ -300 & 0 & 0 & 300,8 & 0 & 2,6 \\ 0 & -1,3 & 4 & 0 & 401,3 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & 2,6 & 4 & 24 \end{bmatrix} \cdot 10^3,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & +0 \\ 0 & -9 \\ 0 & +9 \\ 0 & +0 \\ -9 & +0 \\ -9 & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -9 \\ 0 \\ 19 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Řešením soustavy rovnic (11.140) získáme vektor globálních parametrů deformace

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2,23043 \\ 2 & 0,041423 \\ 3 & -0,784889 \\ 4 & 2,22040 \\ 5 & 0,051433 \\ 6 & 0,38825 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

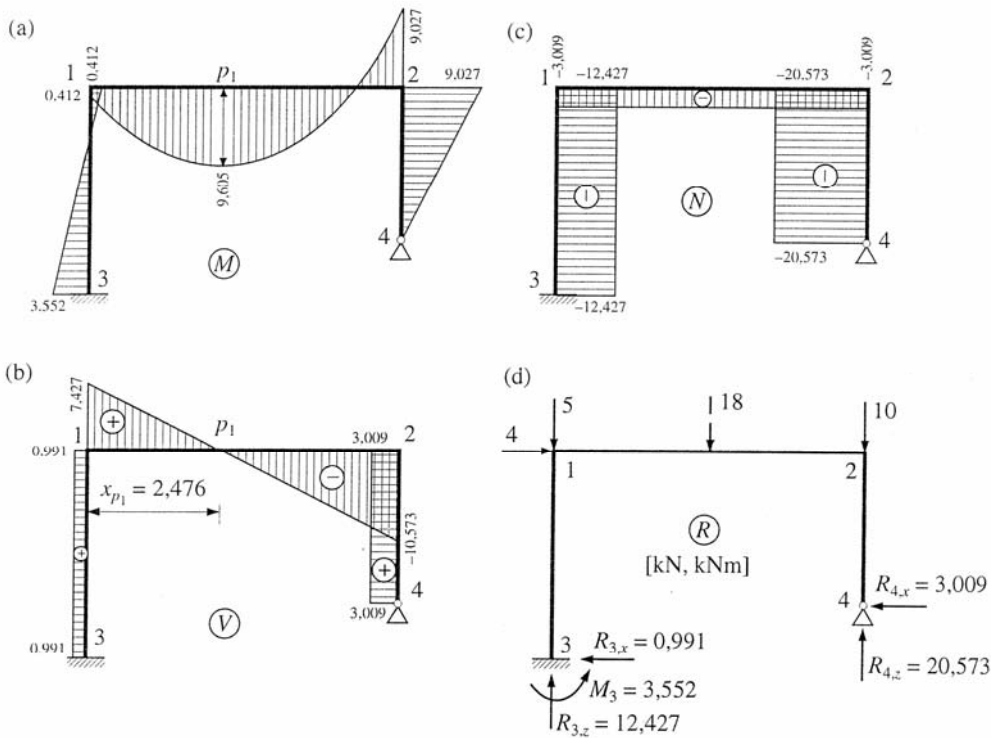
Z vektoru \mathbf{r} stanovíme výběrem pomocí kódových čísel vektory globálních přemístění prutů $\mathbf{r}_{3,1}$, $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}^*$ a $\mathbf{r}_{4,2}$. Pro svislé pruty 3-1, 4-2 je podle (11.100) převedeme do lokálních tvarů. Z rovnice (11.89) pak získáme vektory lokálních koncových sil jednotlivých prutů:

$$\mathbf{R}_{3,1}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & -300 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1,5 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 4 \\ \hline \dots & \dots & \dots & 300 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1,5 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,041423 \\ 2,23043 \\ -0,784889 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} 12,427 \\ -0,991 \\ 3,552 \\ -12,427 \\ 0,991 \\ 0,412 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{1,2}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \\ 0 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3 & -4 & 0 & -1,3 & -4 \\ 0 & -4 & 16 & 0 & 4 & 8 \\ -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & -1,3 & 4 & 0 & 1,3 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \begin{Bmatrix} 2,23043 \\ 0,041423 \\ -0,784889 \\ 2,22040 \\ 0,051433 \\ 0,38825 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 3,009 \\ -7,427 \\ -0,412 \\ -3,009 \\ -10,573 \\ -9,027 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{4,2}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & -400 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -0,8 & -2,6 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 400 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0,8 & 2,6 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 2,6 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,051433 \\ 2,22040 \\ 0,38825 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 20,573 \\ -3,009 \\ 0 \\ -20,573 \\ 3,009 \\ 9,027 \end{Bmatrix}.$$

V podporových průřezích 3 a 4 jsou přímo vypočteny složky reakcí, ale vzhledem k lokálním souřadnicovým soustavám jednotlivých prutů (obr. 11.35d). V uzlech 1 a 2 pak snadno můžeme zkontrolovat globální rovnováhu. Průběhy složek vnitřních sil a velikosti složek reakcí vnějších vazeb rámu jsou uvedeny na obr. 11.35.



Obr. 11.35: Diagramy vnitřních sil a reakce pravoúhlého rámu

3.8.2 Nosník s vnitřním kloubem

Příklad 3.2

Zadání



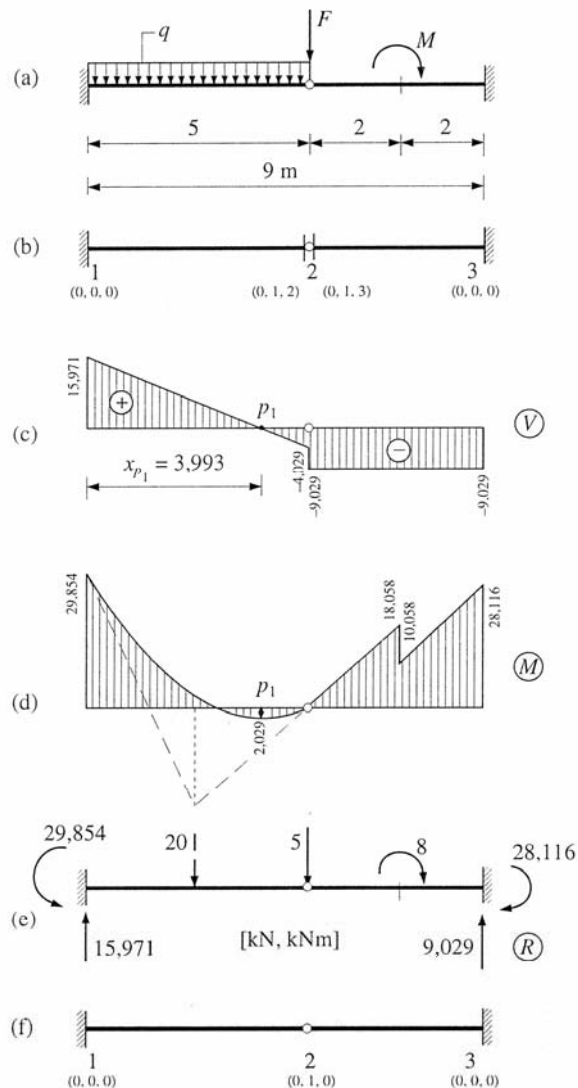
Vyřešte oboustranně vetknutý nosník s vnitřním kloubem z obr. 11.38a. Nosník je konstantního průřezu ($A = 0,18 \text{ m}^2$, $I = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$) s modulem pružnosti $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kPa}$ a se zatížením $q = 4 \text{ kNm}^{-1}$, $F = 5 \text{ kN}$, $M = 8 \text{ kNm}$.

Řešení



Uvažujme oba pruty oboustranně monoliticky připojené (obr.11.38b). Vzhledem k absenci osového zatížení je $u_2 = 0$. Vložený kloub v uzlu 2 způsobí rozdílná potočení obou připojených prutů, tedy $\varphi_{2,1} \neq \varphi_{2,3}$. Každé z nich je pak označeno jiným číslem parametru deformace. Stupeň přetvárné neurčitosti je $n_p = 3$ a vektor uzlových parametrů deformace je

$$\mathbf{r} = \{w_2, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,3}\}^T.$$



Obr. 11.38: Přímý nosník s vnitřním kloubem

Prut 1–2:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \{0, 0, 0, 0, w_2, \varphi_{2,1}\}^T, \text{ kódové číslo } (0, 0, 0, 0, 1, 2).$$

Pro $l_{1,2} = 5 \text{ m}$, $q = 4 \text{ kNm}^{-1}$ a $n = 0$ je podle tabulky 11.2(a)

$$\bar{\mathbf{R}}_{1,2}^* = \bar{\mathbf{R}}_{1,2} = \{0; -10; 8,33; 0, -10; -8,33\}^T.$$

Pomocí $EA/l = 720\,000$, $2EI/l = 24\,000$, $4EI/l = 48\,000$, $6EI/l^2 = 14\,400$ a $12EI/l^3 = 5\,760$ sestavíme podle tabulky 11.3(a)

$$\mathbf{k}_{1,2}^* = \mathbf{k}_{1,2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -5,76 & -14,4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 14,4 & 24 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 5,76 & 14,4 \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 14,4 & 48 \end{array} \end{array} \cdot 10^3.$$

Prut 2–3:

$$\mathbf{r}_{2,3} = \{0, w_2, \varphi_{2,3}, 0, 0, 0\}^T, \text{ kódové číslo } (0, 1, 3, 0, 0, 0).$$

Podle tabulky 11.2(d) pro $M = 8 \text{ kNm}$, $l = 4 \text{ m}$, $a = b = 2 \text{ m}$ vyjádříme

$$\bar{\mathbf{R}}_{2,3}^* = \bar{\mathbf{R}}_{2,3} = \{0, 3, -2, 0, -3, -2\}^T.$$

S hodnotami $EA/l = 900\,000$, $2EI/l = 30\,000$, $4EI/l = 60\,000$, $6EI/l^2 = 22\,500$, $12EI/l^3 = 11\,250$ určíme z tabulky 11.3(a)

$$\mathbf{k}_{2,3}^* = \mathbf{k}_{2,3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 11,25 & -22,5 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & \dots & -22,5 & 60 & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -11,25 & 22,5 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -22,5 & 30 & \dots & \dots & \dots \end{array} \end{array} \cdot 10^3.$$

Pro celou prutovou soustavu získáme lokalizací

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 17,01 & 14,4 & -22,5 \\ 14,4 & 48 & 0 \\ -22,5 & 0 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^3, \quad \mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -10 & +3 \\ -8,3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 8,3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

a řešení soustavy rovnic je

$$\mathbf{r} = \{2,410347; -0,549493; 0,937213\}^T \cdot 10^{-3}.$$

Lokální vektory koncových sil obou prutů podle (11.89) pak vycházejí

$$\mathbf{R}_{1,2}^* = \{0; -15,971; 29,854; 0; -4,029; 0\}^T,$$

$$\mathbf{R}_{2,3}^* = \{0; 9,029; 0; 0; -9,029; -28,116\}^T$$

a pomocí nich jsou vykresleny diagramy V , M a schéma složek reakcí na obr. 11.38c–e.

Pokud bychom určovali pouze jedno z pootočení $\varphi_{2,1}$ nebo $\varphi_{2,3}$, potom druhý prut než je ten, u něhož hledáme pootočení, se uvažuje jako kloubově připojený do uzlu 2.

Chceme-li daný nosník řešit s co nejmenším počtem rovnic, volíme **jinou variantu řešení** s oběma pruty kloubově připojenými (odst. ...) ke styčníku 2 (obr. 11.38f) a s nulovými smluvními hodnotami pro pootočení $\varphi_{2,1} = \varphi_{2,3} = 0$. Pak vystačíme pouze s jedinou rovnicí, neboť v uzlu 2 zůstane jen svislý posuv w_2 a je tedy $n_p = 1$, $\mathbf{r} = \{w_2\}$. Pro oba pruty jednostranně kloubově připojené vyjde

$$\bar{\mathbf{R}}_{1,2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12,5 \\ 12,5 \\ 0 \\ -7,5 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{1,2} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1,44 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 7,2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1,44 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \cdot 10^3,$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{2,3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2,25 \\ 0 \\ 0 \\ -2,25 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{2,3} = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2,8125 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -2,8125 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -11,25 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot 10^3.$$

Z toho získáme

$$\mathbf{K} = \{4,2525\} \cdot 10^3; \quad \mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}} = \{5\} - \{-7,5 + 2,25\} = 10,25;$$

$$\mathbf{r} = \{w_2\} = \frac{10,25}{4,2525 \cdot 10^3} = 2,410347 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

a vektory koncových sil vyjdou stejně jako v původní variantě.

Otázky



1. Výhody a nevýhody maticové formy deformační metody.
2. Jednotlivé fáze řešení prutové soustavy deformační metodou.
3. Co představuje analýza prutu a v jaké souřadnicové soustavě se realizuje?
4. Maticový zápis výrazů pro složky koncových sil; význam jednotlivých vektorů a matic.
5. Při jakém uložení prutu se vyšetřuje primární a sekundární stav?
6. Význam primárního vektoru.
7. Význam jednotlivých sloupců matice tuhosti prutu a způsob určení jejich prvků.

8. Proč jsou v lokální matici tuhosti přímého prutu některé prvky nulové?
9. Co je příčinou symetrie matice tuhosti prutu?
10. Proč se pootočení u kloubového připojení jednostranně kloubově uloženého prutu nemusí uvažovat jako neznámý parametr deformace?
11. Jakou závislost definuje transformační matice; jak se určí globální primární vektor a globální matice tuhosti prutu?
12. Zjednodušení při transformaci u pravoúhlého rámu.
13. Princip sestavení soustavy rovnic pro určení neznámých globálních parametrů deformace.
14. Postup lokalizace a význam kódového čísla.
15. Které parametry deformace se využijí k výpočtu koncových sil?
16. Možnosti výpočtu globálních složek reakcí.
17. Kdy je výhodné modelovat pro kloubovou podporu prut jednostranně kloubově ukončený?
18. Možnosti modelování vnitřního kloubu v rámu.
19. Lze řešit základní přetvárně určitý případ prutu jednostranně monoliticky připojeného deformační metodou?

Shrnutí

Odvození potřebných vztahů, matic a vektorů v obecné deformační metodě je poněkud zdlouhavé a na první pohled méně přehledné. Vlastní algoritmus řešení prutové soustavy obecnou deformační metodou je však velmi přehledný, snadno algoritmizovatelný a můžeme ho shrnout do těchto bodů:



- **Analýza prutů**
 - určení **lokálních** vektorů a matic prutů $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$, \mathbf{k}_{ab}^* ,
 - geometrická **transformace** do globálních souřadnic (matice \mathbf{T}_{ab}),
 - určení **globálních** vektorů a matic prutů $\bar{\mathbf{R}}_{ab}$, \mathbf{k}_{ab} .
- **Analýza prutové soustavy**
 - určení matice tuhosti celé **konstrukce** a pravé strany \mathbf{K} , \mathbf{F} ,
 - řešení **soustavy rovnic** (podmínek rovnováhy) a získání vektoru \mathbf{r} .
- **Analýza prutů**
 - výběr **globálních** parametrů deformace prutu \mathbf{r}_{ab} ,
 - určení **lokálních** parametrů deformace prutu \mathbf{r}_{ab}^* ,
 - určení vektoru **lokálních** koncových sil \mathbf{R}_{ab}^* ,
 - vykreslení **průběhů** N , V , M ,
 - určení vektoru **globálních** koncových sil \mathbf{R}_{ab} .

- Kontrola řešení **prutové soustavy**
 - globální **rovnováha ve styčnicích** podle rovnic (10.4), resp. (10.5),
 - určení globálních složek **reakcí**,
 - globální **rovnováha prutové soustavy** (zatížení a reakce).

Na rozdíl od silové metody, která využívá staticky určitou základní soustavu, se v obecné deformační metodě řeší naprosto stejným algoritmem prutové konstrukce staticky určité i staticky neurčité. Platí to zejména při použití programu. Při ručním řešení bychom vzhledem k náročnosti obecné deformační metody řešili staticky určitou konstrukci pouze s využitím podmínek rovnováhy.

Při řešení prutové konstrukce deformační metodou je vždy vhodné zkontrolovat i statickou neurčitost, abychom omylem nezadávali do programu či neřešili rušně mechanismus.

4 Další možnosti řešení

V této kapitole se stručně zmíníme o některých alternativních řešeních či variantách, s nimiž se můžeme při použití obecné deformační metody také setkat. Uvedeme rovněž další možnosti, jako je např. vliv deformačního zatížení, popř. specifikujeme možnosti řešení u jiných typů prutových konstrukcí, než byly dříve citované rámové soustavy. Poslední poznámka se bude týkat základních úprav pro zjednodušenou deformační metodu s podstatnou redukcí počtu rovnic.



4.1 Jiný tvar globální matice a vektoru prutu

V odst. 3.5 jsme uvedli, že se používají dvě varianty vytvoření globálních vektorů, a to varianta **zkrácená**, u níž se uvažují jen volné globální parametry deformace a počet neznámých je n_p , a varianta **nezkrácená**, u níž se uvažují parametry všech uzlů včetně podporových bodů a počet neznámých je $3n$.

Nezkrácenou variantu si osvětlíme na obecně řešeném příkladu rámu z obr. 11.2a. Pro 4 uzly a podporové body se sestavuje vyšší počet rovnic, a to $n_p = 3n = 12$. Každý uzel má vždy celou trojici čísel pro parametry deformace, takže v příkladu je

$$(1, 2, 3), (4, 5, 6), (\underline{7}, \underline{8}, \underline{9}), (\underline{10}, \underline{11}, 12).$$

Podtržená čísla neznámých představují vázané parametry (úložné či okrajové podmínky). Vektory parametrů deformace (11.16) a uzlových sil (11.17) mají rozměry $3n$.

Lokalizace matice \mathbf{K} z matic k_{ab} a vektoru $\bar{\mathbf{R}}$ z vektorů $\bar{\mathbf{R}}_{ab}$ pak probíhá podle kódových čísel

$$(\underline{7}, \underline{8}, \underline{9}, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, \underline{10}, \underline{11}, \underline{12}).$$

Soustava rovnic (11.140) v počtu $3n$ však nemá jednoznačné řešení, neboť matice \mathbf{K} je **singulární** a její determinant je roven nule. Je to důsledek dosud neuplatněných úložných podmínek (konstrukce zatím není nehybná). Pro zajištění regulární matice tuhosti se soustava rovnic musí upravit. Obvykle se ponechá původní rozměr matice \mathbf{K} i vektoru \mathbf{F} , ale dodatečně se ošetří vliv uložení. Realizuje se tak, že

- každý řádek odpovídající vazbě v matici \mathbf{K} a ve vektoru \mathbf{F} se vynuluje,
- z důvodu symetrie \mathbf{K} se vynulují i odpovídající sloupce,
- do diagonálního prvku matice \mathbf{K} se přiřadí „1“,
- vytvoří se vlastně podmínky rovnováhy formou *triviální rovnice* $r_i \cdot 1 = 0$.

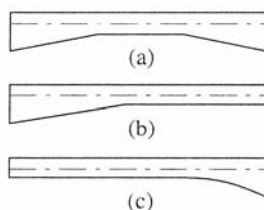
Podrobnosti včetně grafického ztvárnění uvedeného postupu lze nalézt v učebnici [1] na str. 286 – 287.

4.2 Spojitý nosník

Vodorovný spojitý nosník se v zásadě řeší jako kterákoliv rámová konstrukce. Zvláštností je, že globální osa x je totožná s lokálními osami x^* všech prutů, proto se nemusí provádět geometrická transformace ($\cos \gamma_{ab} = 1$, $\sin \gamma_{ab} = 0$, $\mathbf{T}_{ab} = \mathbf{E}$) a k sestavení soustavy rovnic se využijí přímo lokální matice a vektory. Uzly jsou pouze dvojnásobné a vkládají se obvykle pouze nad podpory.

Při ručním řešení obecnou deformační metodou můžeme (pro úsporu práce) rozlišit tyto alternativy řešení:

- Nosník má více vazeb proti osovému posunu a obecné zatížení. Pak řešení probíhá stejně jako u rovinného rámu.
- Existuje pouze jediná vazba proti osovému posunu a zatížení je obecné. Pak v případě, že nás zajímají osová dilatace, probíhá řešení jako u rovinného rámu. V případě, že nesledujeme osová dilatace, řešení se zjednoduší, neboť můžeme uvažovat *smluvní hodnoty* $u_i = 0$.
- Má-li nosník pouze jedinou vazbu proti osovému posunu a jen příčné zatížení, bude *vždy* $u_i = 0$ a jedinými neznámými veličinami zůstanou volná pootočení φ_i , takže dostáváme minimální počet neznámých n_p . S podobnými výhodami je řešení i dříve uvedený numerický příklad 3.2.

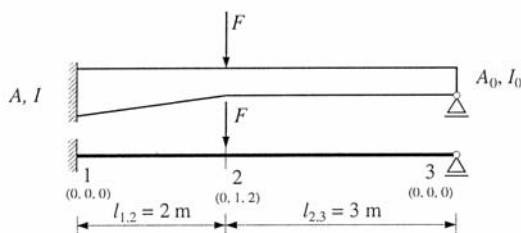


Obr. 11.18: Pruty s výškovými náběhy

4.3 Pruty proměnného průřezu

Náběhy mohou být **výškové** (jsou staticky účinnější) nebo šířkové. Realizují se u konců monoliticky připojených do uzlů. Způsobují zakřivení střednice, které se obvykle zanedbává, takže se uvažuje původní přímá osa (obr. 11.18).

Pro neprizmatické pruty jsou primární vektory $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$ a lokální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab}^* vyjádřeny ve vztazích (11.33), (11.54), (11.66) a (11.48), (11.62), (11.68) pomocí základních **deformačních součinitelů** δ_1 , α_{ab} , α_{ba} , β prostého nosníku a **součinitelů** δ_1 , φ_{ab} , φ_{ba} s veličinami R , $Z_{ab,0}$, $Z_{ba,0}$ daného silového zatížení prostého nosníku.

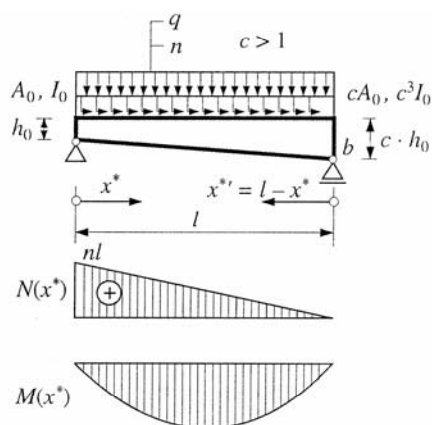


Obr. 11.39: Nosník s přímkovým náběhem

Nejčastějším případem je prut s výškovým přímkovým náběhem oboustranným (symetrickým) nebo jednostranným (viz obr. 11.18).

Každý prut s náběhem (obr. 11.39) lze pomocí dalšího **uměle vloženého uzlu** rozdělit na část s konstantním průřezem a na část pouze s náběhem. Základní deformační součinitele lze pak určit

- **numerickou integrací** (např. Simpsonovo pravidlo),
- vyjádřením **explicitních výrazů** (s použitím Maxwellova-Mohrova vztahu), viz např. obr. 11.19; odvození pro prut s výškovým přímkovým náběhem je provedeno v učebnici [1] na str. 264 – 266.
- pomocí **tabulek** deformačních úhlů prutů s náběhy (např. tabulky 14.6 a 14.7 v učebnici [1]).

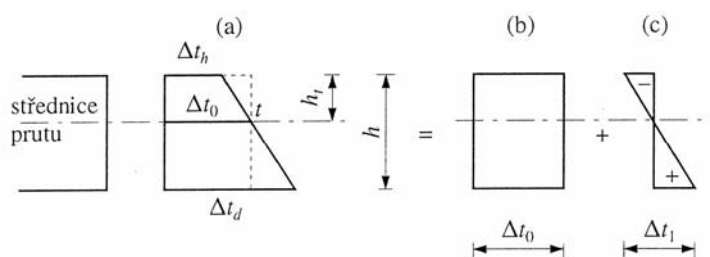


Obr. 11.19: Prut s lineární změnou výšky průřezu

4.4 Deformační zatížení

4.4.1 Vliv změny teploty

Předpokladem řešení je lineární průběh teploty po výšce průřezu a konstantní hodnota teploty po šířce průřezu. Vliv změny teploty na prut se vyjadřuje (obr. 11.22) oteplením střednice prutu Δt_0 a rozdílem Δt_1 přírůstku teploty dolních (Δt_d) a horních (Δt_h) vláken průřezu. Oba případy lze vyšetřovat odděleně.



Obr. 11.22: Rozklad lineární změny teploty po výšce průřezu

Teplotní rozdíl

$$\Delta t_1 = \Delta t_d - \Delta t_h \quad (11.111)$$

obsahuje ve znaménku *konvenci* předpokládaného přetvoření prutu. Změna teploty střednice závisí na tom, zda těžiště leží uprostřed výšky průřezu (např. obdélník), pak

– obecná poloha těžiště po výšce průřezu

$$\Delta t_0 = \Delta t_h + \frac{h_z}{h} \Delta t_1 \quad (11.113)$$

Lokální matice tuhosti k_{ab} prutu zůstává stejná jako u silového zatížení.

Rovnoměrné oteplení **změní délku prutu o δ_0** při obecné funkci Δt_0

a při konstantní funkci Δt_0

kde α_t je součinitel tepelné roztažnosti.

Změna délky prutu vyvolá u prizmatického prutu **primární koncovou sílu**

$$\overline{X}_{ba}^* = -\overline{X}_{ab}^* = -EA\alpha_t\Delta t_0 \quad (11.117)$$

a při $\Delta t_0 = \text{konst.}$

Lineární změna teploty po výšce průřezu vyvolá ohyb prutu.

Koncová pootočení při obecné funkci Δt_1

a při konstantní funkci Δt_1 u prizmatického prutu

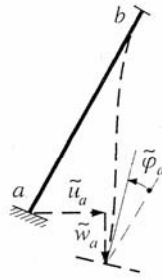
Ohyb prutu vyvolá **primární koncové momenty**

a při $\Delta t_1 = \text{konst.}$ u prizmatického prutu

$$\overline{M}_{ab}^* = -\overline{M}_{ba}^* = \frac{1}{h} EI\alpha_t\Delta t_1 \quad (11.120)$$

Příčné primární síly ($\Delta t_1 = \text{konst.}$)

4.4.2 Dané nepružné přemístění podpor



Obr. 11.23: Popuštění podpory

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a, w_a, \varphi_a, 0, 0, 0\}^T \quad (11.124)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{k}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \quad (11.125)$$

- Podporové body se mohou – pružně deformovat (zde nevyšetřujeme)
 – nepružně přemísťovat

Vlastnosti:

- hodnoty přemístění se zadávají v **globální** souřadnicové soustavě
- vliv daného přemístění se vyjadřuje **prostřednictvím prutu** – převádí se na primární účinky \mathbf{R}_{ab}
- matice tuhosti prutu \mathbf{k}_{ab} zůstává stejná jako u silového zatížení

Podporový bod a se přemísťí o zadanou hodnotu

- vodorovného posunu u_a
- svislého posunu w_a
- pootočení φ_a

Primární stav vytvoříme:

- vynulujeme neznámé parametry deformace volných uzlů (zajistíme nehybnou soustavu)
- podporovým bodům s daným přemístěním přidělíme dané složky přemístění
- sestavíme globální **vektor daných složek přemístění** prutu ab
- určíme **vyvolaný globální primární vektor** (jako sekundární část)

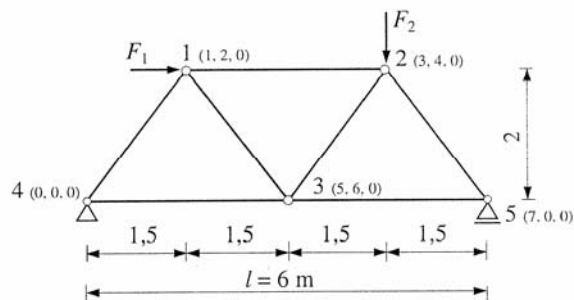
- pruty nedotčené daným přemístěním mají

$$\mathbf{R}_{ab} = 0$$

Výpočet koncových sil prutů

- vektor \mathbf{r}_{ab} obsahuje neznámé parametry deformace a u vazby hodnoty
- transformací převedeme \mathbf{r}_{ab} na \mathbf{r}_{ab} a řešíme jako u silového zatížení

4.5 Příhradový nosník



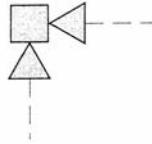
Obr. 11.41: Příhradový nosník

4.6 Zjednodušená deformační metoda

Zjednodušená deformační metoda – skalární tvar

- Předpoklady
- přetvoření prutu je vyvoláno jen ohybem
 - zanedbáváme vliv N (prut je **nestlačitelný**) a V
 - použitelné pouze pro **pravoúhlé rámy**, většinou s pruty **stálého průřezu**

$n_{p,z}$... pomocí základní deformačně určité soustavy (vkládáním nezbytně nutného počtu **fiktivních vazeb** pro vytvoření nehybné soustavy)



Obr. 12.1: Tři fiktivní vazby volného styčnicku

Neznámé veličiny:

- pootočení styčnicků φ
- posunutí celých skupin styčnicků (na společné průběžné příčli, průběžném sloupu)

$$u, w \rightarrow \Delta_I, \Delta_{II}, \dots \rightarrow \psi_{ab}$$

Koncové síly

Označují se jako složky vnitřních sil

$$N_{ab}, V_{ab}, M_{ab}, N_{ba}, V_{ba}, M_{ba}$$

Znaménková konvence:

$N, V \dots$ jako v silové metodě

(pružnostní konvence):

N – tahové

V – pootáčí prutem ve směru chodu hodinových ručiček

M – otáčí koncem prutu **ve směru chodu hodinových ručiček**

Koncové momenty – oboustranně upnutý prut

Koncové momenty závisí na:

- silovém zatížení ... *primární* stav
- deformaci prutu ... *sekundární* stav

uvažují se pootočení (kladná ve směru chodu hodinových ručiček):

- koncových průřezů φ_a, φ_b
- prutová ψ_{ab} (prutová výchylka)

Výsledné koncové momenty

kde jsou *prutové konstanty*:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------|
| a – ohybová tuhost konce prutu | koncové momenty |
| b – převedená tuhost konce prutu | od jednotkových |
| c – výchylková tuhost konce prutu | deformací ; |

platí

neboť podle Maxwellovy věty je

Prutové konstanty lze vyjádřit pomocí *základních deformačních úhlů prostého nosníku*

kde

Pro **prut stálého průřezu** je

takže prutové konstanty jsou

Zavedeme-li (skutečnou) *ohybovou tuhost prutu stálého průřezu*

získáme **základní vztahy zjednodušené deformační metody**

nebo vyjádřené místo ψ_{ab} pomocí Δw_{ab} (12.1):

Jednostranně kloubově připojený prut

Koncový moment obecně

kde a_{bak} , c_{bak} je *ohybová* a *výchylková tuhost* konce prutu s kloubem:

Pro prut **konstantního průřezu** vychází

a pro koncový moment platí

neboli

kde

Pomocí Δw_{ab} (12.1) lze vyjádřit

Prut stálého průřezu – poměrné tuhosti

Při ručním řešení zjednodušenou deformační metodou se nepracuje se *skutečnou* ohybovou tuhostí (dále značena *)

ale s **poměrnou ohybovou tuhostí**

kde konstanta c (stejná pro všechny pruty rámu) je volena tak, aby všechny k_{ab} byly řádově v jednotkách; nejčastěji $c = 10^3$ nebo $c = 10^4$.

Platí vztah mezi tuhostmi

a mezi pootočeními

Zatížení – *silové* ... lze použít *poměrné* ohybové tuhosti

– *deformační* ... nutno použít *skutečné* ohybové tuhosti

Vnitřní síly přímého prutu (stálého průřezu)

Na prut působí

– dané silové zatížení

– koncové momenty M_{ab} , M_{ba}

(v konvenci zjednodušené def. metody)

Mezipodporový moment

kde $M_{x,0}$ je ohybový moment na

prostém nosníku od daného zatížení.

Posouvající síla

v libovolném průřezu

kde $V_{x,0}$ je posouvající síla prostého nosníku od daného zatížení, pro koncové momenty M_{ab} , M_{ba} platí (12.18).

V koncových průřezech:

neboli

kde

Prut levostranně kloubově ukončený $M_{ab,k} = 0$, $M_{ba,k}$ (12.25),

platí (12.37) s jedním nulovým koncovým momentem, nebo:

kde

Normálové síly

v koncových průřezech prutů se řeší

ze součtových podmínek rovnováhy

uvolněných styčniců:

výpočet normálových sil

... sestavení styčnicové rovnice (viz dále)

Postup řešení N :

a dále např. v průřezu x :

Výskyt **staticky neurčité části** v rámu:

Průběžný prut (např. $a-b-c-d$)

oboustranně neposuvně uložený v a , d

poskytuje pouze 2 silové podmínky

do vodorovné osy (v uzlech b , c)

pro 3 neznámé osově síly N_{ab} , N_{bc} , N_{cd} .

Způsob řešení:

- jako osově staticky neurčitá část
- obecnou deformační metodou

Styčnicová rovnice

Za rovnovážného stavu (po deformaci rámu) musí být v každém uzlu splněna **momentová podmínka rovnováhy**

kde M_{ai} jsou koncové momenty monoliticky připojených prutů,

M_a je momentové zatížení uzlu.

Po rozepsání (12.46)

kde

Styčnicková rovnice uzlu a

Patrová rovnice

- sestavuje se pro každý nezávislý posun $u, w \rightarrow \Delta \rightarrow \psi$
- vyjadřuje silovou podmínku rovnováhy uvolněné části rámu (oddělenou řezem) se všemi uzly společného posunu

Příklad sestavení patrových rovnic:

Tři fiktivní silové vazby brání

- vodorovnému posunu části $a-b-c \dots \Delta_I$
- vodorovnému posunu části $e-d \dots \Delta_{II}$
- svislému posunu části $e-b \dots \Delta_{III}$

Nezávislé posuny Δ vyjádříme pomocí zvolených **nezávislých prutových pootočení**

Závislá prutová pootočení (určíme z geometrických rovnic):

V **příkladu** sestavíme – 5 styčnickových rovnic pro $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d, \varphi_e$

- 3 patrové rovnice pro $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$

Pro **zajištění symetrické soustavy rovnic** při použití ψ je nutno dodržet zásady:

- řezem můžeme přetnout pouze *jeden prut s nezávislým ψ* , všechny ostatní pruty
 - mají závislá ψ (nesmíme řezem přetnout prut s jiným nezávislým ψ)
- celou rovnici *roznásobíme délkou prutu s nezávislým ψ*

Patrová rovnice pro ψ_I podle obr. (d)

- řez vedeme hlavami sloupů $a-f, c-g$
 - a uvolníme celou horní část
- účinek odstraněné spodní části
 - nahradíme kladnými posouvajícími silami V_{af}, V_{cg}
- silová podmínka:

kde

takže po úpravě získáme obecný tvar

Při použití řezu podle obr. (g) přetneme prut $b-e$ s jiným nezávislým pootočením ψ_{II} , rovnice by byla použitelná (soustava řešitelná), ale *soustava* by byla *nesymetrická*.

Patrová rovnice pro ψ_{II} podle obr. (e)

- uvolníme horní část rámu
(jediná možnost)
- silová podmínka

kde

a po úpravě

Patrová (sloupová) rovnice pro ψ_{III} podle obr. (f)

- vyjmeme sloup $b-e$
- silová podmínka do svislé osy

kde

a podobně sestavíme obecný tvar patrové rovnice.

Alternativa sestavení patrových rovnic

Při použití neznámých patrových posunů Δ vedeme řezy tak, aby každá vyjmutá část rámu obsahovala **všechny uzly se společným posunem Δ** :

Podmínka rovnováhy

dává patrovou rovnici

Další příklady vedení patrových řezů

Posuvná kloubová podpora

Posun vnitřního kloubu

4.6.1 Rekapitulace postupu řešení rámu ZDM s pruty konstantního průřezu

- **Poměrné ohybové tuhosti**

- prut oboustranně upnutý (12.31)

- prut jednostranně kloubově ukončený (12.26)

- **Koncové momenty**

- prut oboustranně upnutý (12.18)

- prut jednostranně kloubově ukončený (12.25)

- **Koncové posouvající síly** (12.37)
- **Sestavení styčnickových a patrových rovnic**
v neznámých pootočeních φ , ψ . Řešení soustavy rovnic.
- **Výpočet**
 - koncových momentů
 - koncových posouvajících sil
 - normálových sil
 - mezipodporových momentů
 - reakcí
- **Vykreslení průběhů složek vnitřních sil**
- **Kontrola rovnováhy**
 - momentů v uzlech
 - posouvajících sil a vnějšího zatížení v patrových řezech
 - celé rámové soustavy

$$\begin{aligned} M_{ab} &= \bar{M}_{ab} + a_{ab}\varphi_a + b_{ab}\varphi_b - c_{ab}\psi_{ab} \\ M_{ba} &= \bar{M}_{ba} + a_{ba}\varphi_b + b_{ba}\varphi_a - c_{ba}\psi_{ab} \end{aligned} \quad (12.3)$$

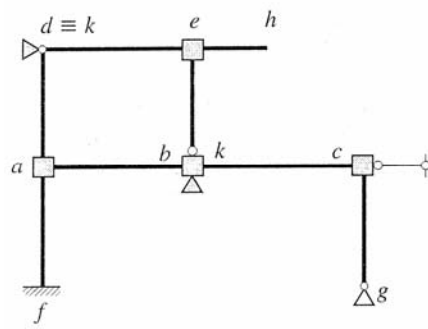
$$\begin{aligned} M_{ab} &= \bar{M}_{ab} + k_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) \\ M_{ba} &= \bar{M}_{ba} + k_{ab}(2\varphi_b + \varphi_a - 3\psi_{ab}) \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$M_{ba,k} = \bar{M}_{ba,k} + k'_{ab}(2\varphi_b - 2\psi_{ab}) = \bar{M}_{ba,k} + \frac{3}{2}k_{ab}(\varphi_b - \psi_{ab}) \quad (12.25)$$

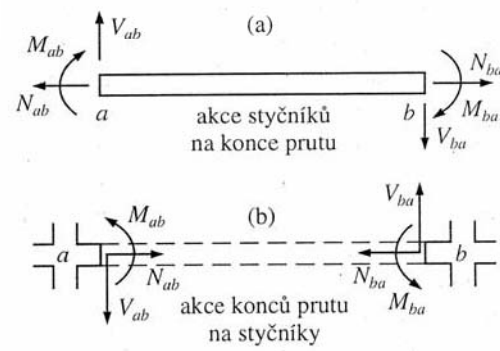
$$\begin{aligned} M_x &= M_{x,0} + \Delta M_x = \\ &= M_{x,0} + \frac{M_{ab}x' - M_{ba}x}{l_{ab}} \end{aligned} \quad (12.35)$$

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_x = V_{x,0} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}} \quad (12.36)$$

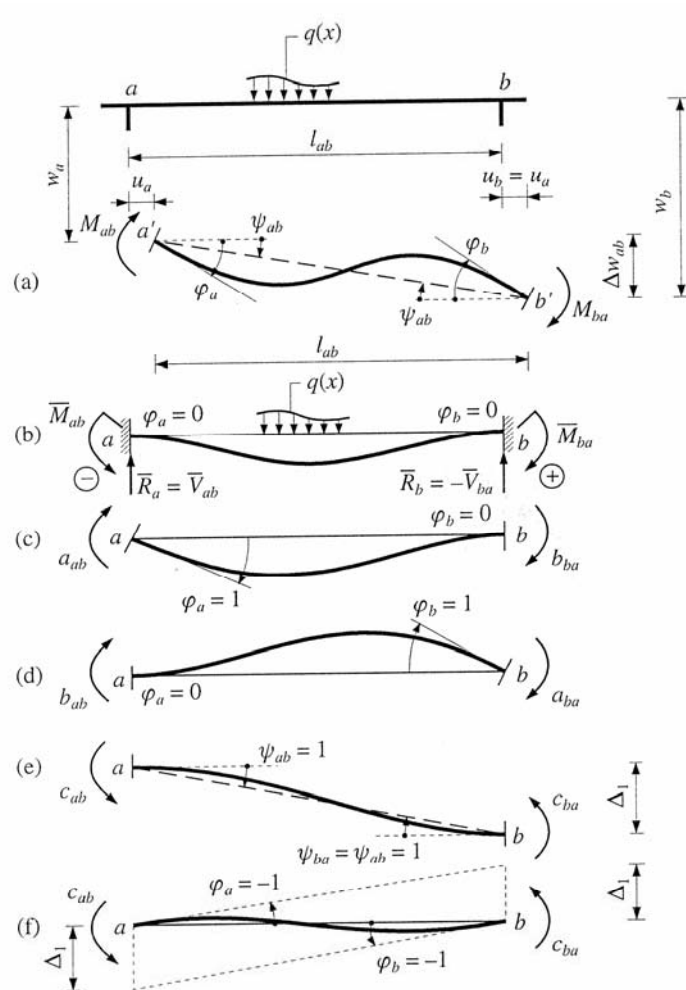
$$\sum M_{ai} = M_a \quad (i = b, c, d, e) \quad (12.46)$$



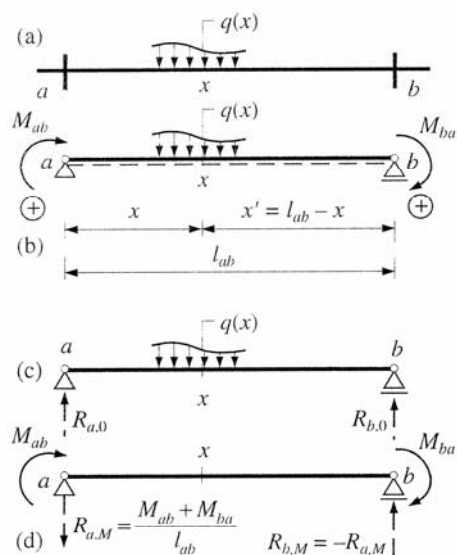
Obr. 12.2: Základní deformačně určitá soustava



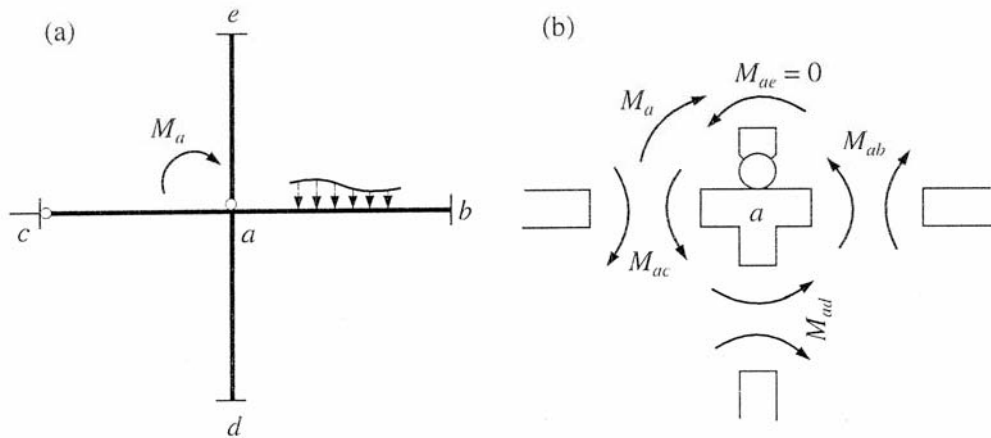
Obr. 12.5: Složky vnitřních sil N , V , M , v koncových průřezech prutu



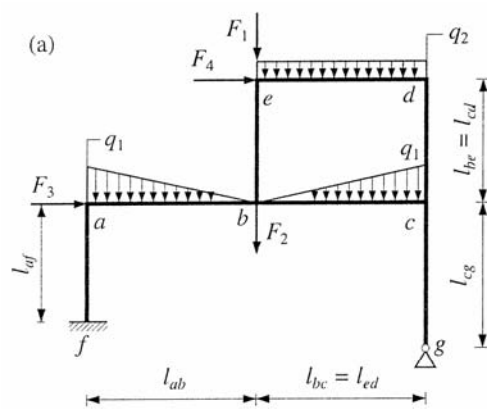
Obr. 12.6: Prut oboustranně pružně upnutý



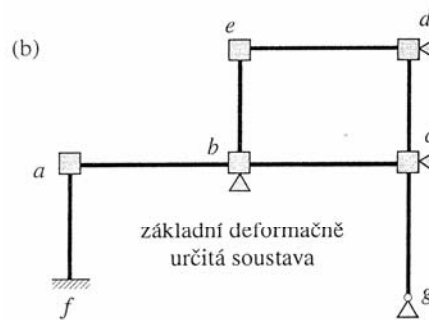
Obr. 12.10: Pružně upnutý prut s příčným zatížením



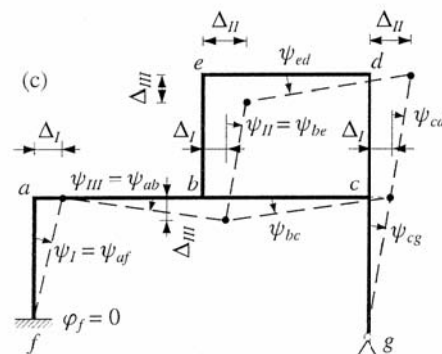
Obr. 12.13: Monolitický styčnick rovinného rámu



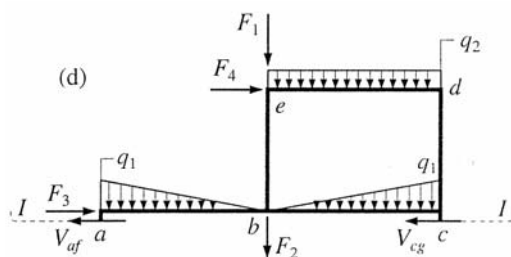
Obr. 12.14a: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



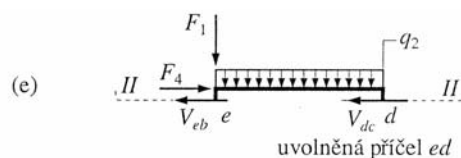
Obr. 12.14b: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



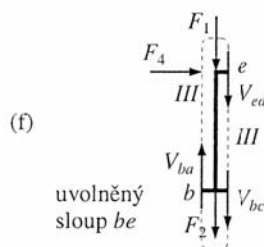
Obr. 12.14c: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



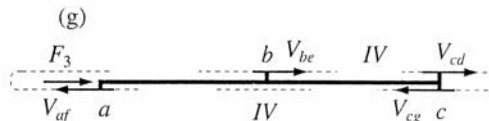
Obr. 12.14d: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



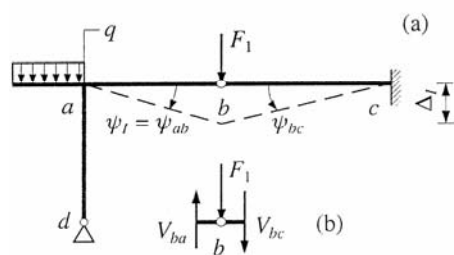
Obr. 12.14e: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



Obr. 12.14f: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



Obr. 12.14g: Rovinný patrový rám s neprůběžným sloupem



Obr. 12.16: Jednoduchý rovinný rám s vnitřním kloubem

Otázky



1. Způsob řešení vlivu nerovnoměrné změny teploty na pruty rovinného rámu.
2. Způsob vyšetřování vlivu daného nepružného přemístění podpor rámu.
3. Kdy je matice tuhosti prutové soustavy singulární a jak singularitu odstraníme?
4. V jakém případě uvažujeme u spojitého nosníku nulové osové posuvy?

5. Proč nelze řešit příhradovou soustavu zjednodušenou deformační metodou?

Shrnutí

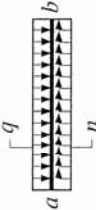
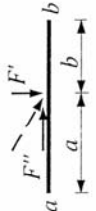
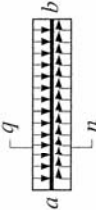
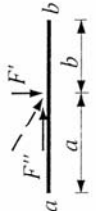
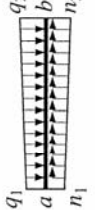
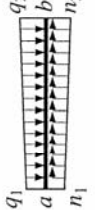
Pro účely budoucí statické analýzy prutových konstrukcí byly zavedeny a osvětleny pojmy kvadratických momentů rovinných obrazců. Definovali jsme pojmy momenty setrvačnosti a deviační momenty jednoduchých obrazců k potočeným souřadným osám, abychom analyticky i graficky (Mohrova moment setrvačnosti).

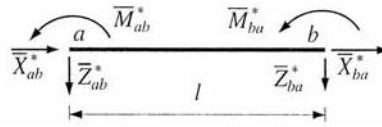


5 Tabulky

V této kapitole jsou pro prismatický prut (prut konstantního průřezu) uvedeny obecně použitelné tabulky, vhodné pro ukázkové ruční řešení jednoduchých rámových konstrukcí.

Tab. 11.2: Primární vektory koncových sil $\overline{\mathbf{R}}_{ab}^*$ (obr. 11.2) prismatického prutu

<p>(a) Plné spojitě zatížení</p> 	$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}$	<p>(c) Osamělá síla</p> 	$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F'b/l \\ -F'b(3l^2 - b^2)/(2l^3) \\ F'ab(l+b)/(2l^2) \\ -F'a/l \\ -F'a^2(3l-a)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$
<p>(b) Plné lichoběžníkové zatížení</p> 	$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)/6 \\ -(7q_1 + 3q_2)l/20 \\ (3q_1 + 2q_2)l^2/60 \\ -(n_1 + 2n_2)l/6 \\ -(3q_1 + 7q_2)l/20 \\ -(2q_1 + 3q_2)l^2/60 \end{Bmatrix}$	<p>(d) Osamělý moment</p> 	$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6Mab/l^3 \\ -Mb(2l-3b)/l^2 \\ 0 \\ -6Mab/l^3 \\ -Ma(2l-3a)/l^2 \end{Bmatrix}$
<p>(c) Osamělá síla</p> 	$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F'b/l \\ -F'b^2(l+2a)/l^3 \\ F'ab^2/l^2 \\ -F'a/l \\ -F'a^2(l+2b)/l^3 \\ -F'a^2b/l^2 \end{Bmatrix}$	<p>(d) Osamělý moment</p> 	$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3M(l^2 - b^2)/(2l^3) \\ -M(l^2 - 3b^2)/(2l^2) \\ 0 \\ -3M(l^2 - b^2)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$



Obr. 11.2: Konvence koncových sil k tab. 11.2 a 11.5

Tab. 11.3: Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

<p>(a) Prut oboustranně monoliticky připojený</p> $k_{ab}^* = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	<p>(b) Prut pravostranně kloubově připojený</p> $k_{ab}^* = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/l^3 & 3EI/l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/l^2 & 2EI/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>(c) Prut levostranně kloubově připojený</p> $k_{ab}^* = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/l^2 & 3EI/l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	<p>(d) Prut oboustranně kloubově připojený</p> $k_{ab}^* = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tab. 11.4: Globální matice tuhosti prismatického prutu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený	
$k_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & -\frac{6EI}{l^2}c & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2\right) & -\frac{6EI}{l^2}c \\ \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} \\ -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\frac{6EI}{l^2}s \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2\right) & \frac{6EI}{l^2}c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & \frac{6EI}{l^2}c \\ \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$	
(b) Prut pravostranně kloubově připojený	
$k_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{3EI}{l^2}s & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & -\frac{3EI}{l^2}c & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & 0 \\ \frac{3EI}{l^2}s & -\frac{3EI}{l^2}c & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{3EI}{l^2}c & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & \frac{3EI}{l^2}c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

Tab. 11.4: Globální matice tuhosti prizmatického prutu (pokračování)

(c) Prut levostranně kloubově připojený

$c = \cos \gamma$
 $s = \sin \gamma$

$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & 0 & -\left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & \frac{3EI}{l^2} s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & -\left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2\right) & -\frac{3EI}{l^2} c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & 0 & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & -\frac{3EI}{l^2} s \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & -\left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2\right) & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & \frac{3EI}{l^2} c \\ \frac{3EI}{l^2} s & -\frac{3EI}{l^2} c & 0 & -\frac{3EI}{l^2} s & \frac{3EI}{l^2} c & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený




$c = \cos \gamma$
 $s = \sin \gamma$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

K výpočtu lokálních koncových sil z globálních parametrů deformace:

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & 0 & -c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ab}$$

Tab. 11.5: Primární vektory koncových sil $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$ (obr. 11.2) prizmatického prutu od změny teploty

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený 	(b) Prut pravostranně kloubově připojený 	(c) Prut levostranně kloubově připojený 
$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} EA\alpha, \Delta t_0 \\ 0 \\ \frac{EI\alpha, \Delta t_1}{h} \\ -EA\alpha, \Delta t_0 \\ 0 \\ \frac{EI\alpha, \Delta t_1}{h} \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} EA\alpha, \Delta t_0 \\ \frac{3EI\alpha, \Delta t_1}{2hl} \\ 2h \\ \frac{3EI\alpha, \Delta t_1}{2h} \\ -EA\alpha, \Delta t_0 \\ \frac{3EI\alpha, \Delta t_1}{2hl} \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} EA\alpha, \Delta t_0 \\ \frac{3EI\alpha, \Delta t_1}{2hl} \\ 0 \\ -EA\alpha, \Delta t_0 \\ \frac{3EI\alpha, \Delta t_1}{2hl} \\ \frac{3EI\alpha, \Delta t_1}{2h} \\ 2h \end{Bmatrix}$

6 Studijní prameny

6.1 Seznam použité literatury

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce*. Učebnice, druhé vydání. VUTIUM, Brno 2004
- [2] Benda, J. a kol. *Statika stavebních konstrukcí II*. Skriptum. CERM, Brno 1996
- [3] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí III*. Skriptum. VUT v Brně, Brno 1991



6.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [4] Chobot, K., Drahoňovský, Z., Hájek, V., Novotná, H. *Statika stavebních konstrukcí III*. Učebnice. SNTL/ALFA, Praha 1985
- [5] Sobota, J. *Statika stavebních konstrukcí 2*. ALFA, Bratislava 1991
- [6] Harvančík, J., Pekarovič, J., Sobota, J. *Stavební mechanika – příklady*. ALFA/SNTL, Bratislava 1986
- [7] Cais, S. *Statika stavebních konstrukcí – Dějiny stavební mechaniky*. Doplňková skripta. ČVUT, Praha 1991



6.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [8] <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians>



Poznámky