

# PRUŽNOST A PLASTICITA

## 1) Pole popisující rovinné těleso

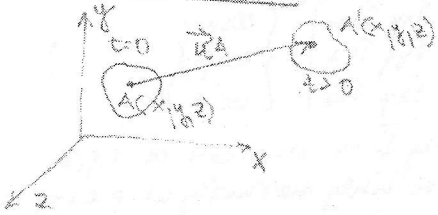
→ pole posunutí: 3 fce  $(u_x, u_y, u_z)$

→ pole deformací: 6 fce  $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx})$

→ pole napětí: 6 fce  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$

}  $\Sigma \rightarrow 15$  fce pro popis rovinné těleso

### POLE POSUNUTÍ

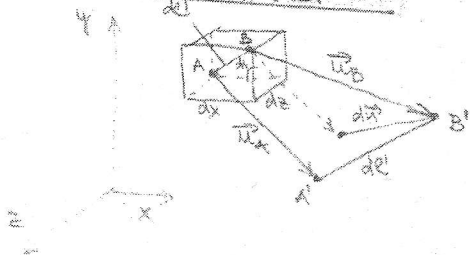


VEKTOR POSUNUTÍ

$$\vec{\Sigma} \vec{u} = \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases} = \vec{u} \quad \begin{cases} u_x = x' - x \\ u_y = y' - y \\ u_z = z' - z \end{cases}$$

↑ složky vektoru  $\vec{u}$

### POLE DEFORMACÍ



před deformací

$$d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

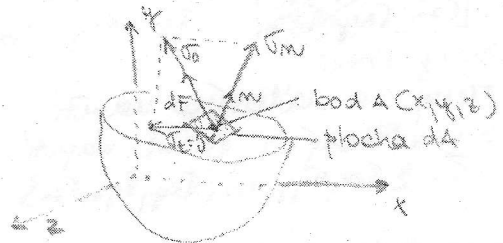
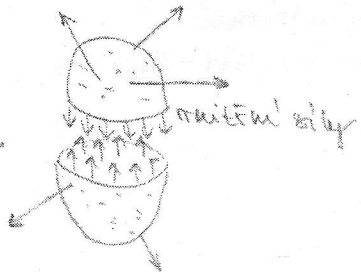
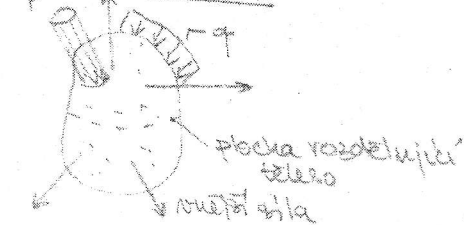
po deformaci

$$(d\vec{r}')^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + (dz + du_z)^2$$

$$d\vec{r}' = \begin{cases} du_x \\ du_y \\ du_z \end{cases}$$

↑ složky vektoru  $d\vec{r}'$

### POLE NAPĚTÍ



$$\vec{T}_0 = \frac{dF}{dA}$$

$\vec{T}_0$  ... zděná na poloze elementární plochy dA

... je rozkládána na  $\vec{T}_n$  a  $\vec{T}_t = \vec{T} \cdot \vec{n}$

( $\vec{T}_n$  ... normálové napětí)

( $\vec{T}_t = \vec{T} \cdot \vec{n}$  ... tečné napětí)

## 2) Základní vztahy mezi nimi

deformace a posunutí  $\rightarrow$  deformace je fce posunutí  $\vec{\epsilon} = f(\vec{u})$

$$\vec{\epsilon} = \vec{T}_\epsilon \vec{u} + \vec{T}_u \vec{u}$$

$\vec{\epsilon}$  ... vektor deformací;  $\vec{u}$  ... vektor posunutí

$\vec{T}_\epsilon$  ... lineární operátor;  $\vec{T}_u$  ... nelineární operátor

napětí a deformace  $\rightarrow$  jednovásová mapovatost (elastopní materiále)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ \epsilon_{yy} &= -\nu \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ \epsilon_{zz} &= -\nu \frac{1}{E} \sigma_{xx} \end{aligned}$$



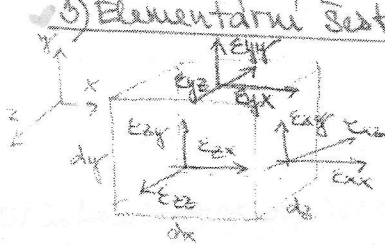
E ... modul pružnosti (Youngův)

$\nu$  ... Poissonův souč. ( $\nu = \nu_x = \nu_y = \nu_z$ ) souč. příčné kontrakce

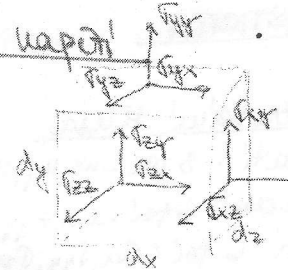
prostorová úloha  
 $\vec{\epsilon} = \vec{T}_\epsilon \vec{\epsilon}$  ... vztah mezi polem napětí a deformací  
 $\vec{\epsilon} = \vec{T}_\epsilon \vec{\epsilon}$  ... vztah mezi polem deformací a polem napětí

D ... matice pružnosti konstant

3) Elementární šestiúhelník - deformace a napětí



$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} \\ \epsilon_{yz} &= \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{zx} &= \epsilon_{xz} \end{aligned}$$



•  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz} \dots$  normálové napětí  
 •  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz} \dots$  tečné napětí

→ deformace → lib. bodě tělesa

$$\vec{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \underbrace{\sum \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz}}_{\text{poměrné defor. objemu} \rightarrow \text{TRANSLACE}} \underbrace{\sum \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \epsilon_{zx}}_{\text{úhlové} \rightarrow \text{ROTACE poměrné defor.}}$$

$$\vec{\sigma}_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz} \dots$  složky  $\vec{\sigma}$  ne směřují os x, y, z  
 $\alpha, \beta, \gamma \dots$  směřují úhly normály el. plochy dA

→ stav napětí → libovolným bodě A

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}$$

4) Tenzor deformace a napětí

• tenzor napětí → jednoznačně definuje stav napjatosti

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

→ matice je symetrická  
 $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \sigma_{zy} = \sigma_{yz}$

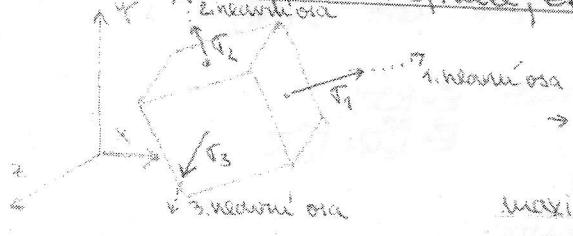
- složky symetrie
- složky normálového napětí
- 6 nezávislých složek napětí
- $\vec{\sigma} = \sum \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$

• tenzor deformace

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\epsilon_{xy} & \frac{1}{2}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{zx} & \frac{1}{2}\epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

→  $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3 \dots$  hlavní deformace

5. Hlavní napětí - definice, způsob určení



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$  hlavní napětí → odpovídá poloze hl. os

- existuje 3 plochy dA (navzájem  $\perp$ ), pro které napětí  $\vec{\sigma}$  v libovolném bodě A má hodnoty: maximum  $\sigma_{max}$ , minimum  $\sigma_{min}$ , střední  $\sigma_{st}$
- směry normál na 3 plochách dA definují hl. osy napětí v daném bodě
- tečné napětí  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$  jsou v nich rovna 0.

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \geq \sigma_{st} \geq \sigma_2 \geq \sigma_{min} = \sigma_3$$

### 6) Základní rovnice pro popis chování tělesa

- analytické řešení chování (určení posunutí, deformací, napětí) →
  - zohlednění určitých podmínek (působení sil, teplota)
  - určení 15 rovnic

- pole posunutí - 3 ree  $(u_x, u_y, u_z)$  ... ree rovnicových
- pole deformací - 6 ree  $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx})$
- pole napětí - 6 ree  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$   
≥ 15 rovnic

- vztah mezi posunutím a deformací

$$\vec{\epsilon} = (\text{GR})$$

$$\vec{\epsilon} = \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\Gamma} \vec{u}$$

- vztah mezi napětím a deformací

→ jednováková vztahost

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

$$\epsilon_{zz} = -\nu \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

→ prostorová rovnice

$$\vec{\Gamma} = \vec{D} \cdot \vec{\epsilon}$$

$$\vec{\Sigma} = \vec{D}^T \cdot \vec{\Gamma}$$

$D_{ij}$  matice pružnostních konstant (6x6)

### 7) Geometrické rovnice

- udává vztah mezi posunutím a poměrnými deformacemi
- platí i pro "malé deformace" → ree obsahují pouze lineární členy
- 6 rovnic

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

### 8) Fyzikální rovnice

- vztahy mezi napětím a poměrnými deformacemi
- pro kubitní materiál → Hookův zákon
- 6 rovnic

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})]$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz}$$

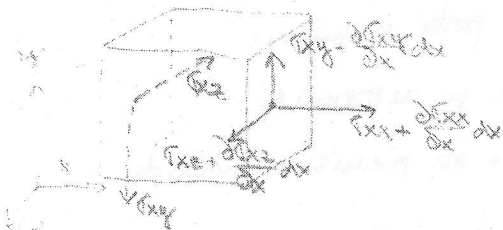
$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{G} \sigma_{zx}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

... modul pružnosti ve smyku

### 9) Rovnice rovnováhy

- odvození na elementárním tělesech → působí 9 složek napětí



$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0$$

### 10) Podmínky kompatibility

- vyjadřují skutečnost, že těleso, které je spojitě vyplněno látkou před deformací, zůstane spojitě i po deformaci

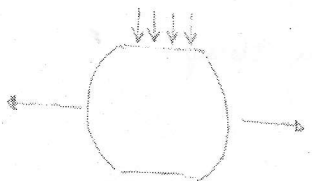
- 2 postupy řešení deformačního úlohy  $\Rightarrow$  nutno splnit podmínky kompatibility
- deformační varianta (v posunutích)
  - silová varianta (v napětích)
  - kombinace

### 11) Postup řešení rovnice

- $\rightarrow$  deformační varianta  $\rightarrow$  primární = posuny  $u \rightarrow$  algoritmus odpovídá principu virtuálních posunutí
- $\rightarrow$  silová metoda  $\rightarrow$  primární = napětí  $\sigma \rightarrow$  algoritmus odpovídá principu virtuálních sil
- $\rightarrow$  smíšená varianta  $\rightarrow$  kombinace obou postupů

### 12) Rovinná napjatost

- $\rightarrow$  předpoklady
  - střední rovina tělesa  $\approx$  rovina  $xy$
  - $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$  Cauchyho povrch složky rovinné s rot.  $xy$
  - zatížení působí v rovině  $xy$
  - symetrické uspořádání konstrukce



$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{zy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

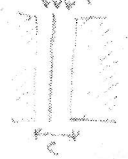
$$\sigma_{zz} = \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha T \quad ; \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0$$

$\rightarrow$  dostatečně přesné řešení pouze u tenkých stěn (rovinná napjatost tělesa s malou tloušťkou)  $\rightarrow$  některé podmínky kompatibility narušeny

### 13) Rovinná deformace

- $\rightarrow$  předpoklad  $\cdot \epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$
  - deformace kmožná pouze v rovině  $xy$
- $$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{zy} \end{pmatrix}$$
- $$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E \cdot \alpha T \quad ; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

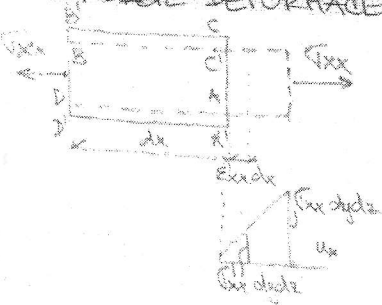


### 14) Deformační práce vnějších sil

- těleso je ideální pružné (po uvolnění se vrací do původní polohy)
  - statické zatížení tělesa (roste relativně pomalu)
- DEF. PRÁCE VNĚJŠÍCH SIL - při zatížení konají na tělese práci pronikající vnější síly

#### ENERGIE DEFORMACE

- energie uakumulovaná v tělese po deformaci
- elementární práce "vnější síly"  $\sigma_{xx} dy dz$  na přánístoví  $d\epsilon_{xx} dx$   
 $\int \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} dx dy dz$
- celková práce lineárně narážající síly  
 $dL = \int_{\epsilon=0}^{\epsilon} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} dx dy dz = dU$
- při jednodušším tahu platí  
 $dU = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 dx dy dz$

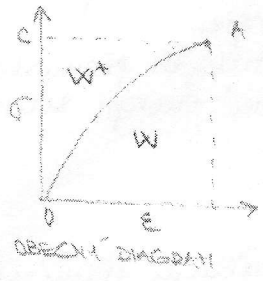
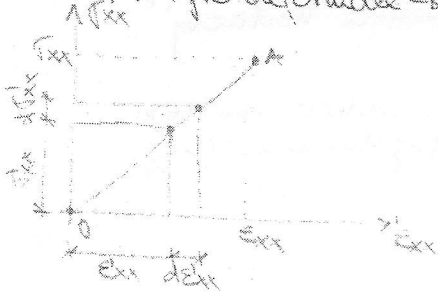


✓ 15) Deformační práce nultřídové síly

- při deformaci tělesa se mění vzájemná vzdálenost částic →
- nultřídové síly konají práci (změna vzdálenosti atomů v krystalické mřížce)

✓ 16) Energie deformace a komplementární energie

- deformační práce nultřídové síly → konají práci síly při zatežování (deformaci) tělesa
- energie deformace → nahromaděná energie v tělese po zatežování



→ z obou diagramů →  
poměrná deformační energie  
 $W = \int_0^E \sigma(\epsilon') d\epsilon'$

doplňková komplementární energie  
 $W^* = \int_0^\sigma \epsilon(\sigma') d\sigma'$

→ postupně složem' jednotli. energii (prostorové namáhání)

$$W^d = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{xy}\epsilon_{xy} + \sigma_{yz}\epsilon_{yz} + \sigma_{zx}\epsilon_{zx})$$

→ přetvářena' práce nultřídových síly = přetvářena' práce nultřídové síly

$$\Pi = \int W^d dV = \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{xy}\epsilon_{xy} + \sigma_{yz}\epsilon_{yz} + \sigma_{zx}\epsilon_{zx}) dV$$

$\Pi$  ... potenciální energie síly nahromaděná v tělese v důsledku deformace

✓ 17) Potenciální energie soustavy

= celková potenciální energie

$\Pi = U + L$  → U ... potenciální energie deformace

$$U = \int W^d (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}) dV$$

→ L ... potenciální energie nultřídových síly

$$L = - \int (\bar{p}_x u_x + \bar{p}_y u_y + \bar{p}_z u_z) dV - \int (\bar{p}_x u_x + \bar{p}_y u_y + \bar{p}_z u_z) ds$$

$W^d$  ... hustota potenciální energie deformace

$$W^d = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-\nu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \geq 0$$

✓ 18) Komplementární energie soustavy

= celková doplňková energie

$\Pi_c = U_c + L_c$  →  $U_c$  ... doplňková energie deformace

$$U_c = \int W_c^d (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}) dV$$

→  $L_c$  ... doplňková energie nultřídových porcových síly na  $S_u$

$$L_c = - \int (\bar{p}_x u_x + \bar{p}_y u_y + \bar{p}_z u_z) ds$$

pro lineární pružnou látku platí

$$W_c^d = W^d = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \frac{2(1+\nu)}{2E} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx}) \geq 0$$

### 19) Variacní principy - podstata

- Lagrangeův princip minima potenciální energie ...  $\delta U + \delta L = \delta(U+L) = \delta \Pi = 0$   
 → že všech možných deformovaných stavů prázdného tělesa, které neporuší jeho spjatost a vyhovují všem okraj. podmínkám nastane právě ten, při kterém je potenciální energie minimální.
- Castiglianiův princip minima doplnkové energie ...  $\delta U_c + \delta L_c = \delta(U_c + L_c) = \delta \Pi_c = 0$   
 → že všech staticky přípustných stavů tělesa jediné skutečné uypjatost dává komplementární energii soustavy minimální hodnotu
- Věta o abs. minimu potenciální energie  
 → že všech přípustných kinematických přemístění jediné skutečné přemístění dává potenciální energii soustavy minimální hodnotu

### 20) Virtuální práce

- $\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$  ... práce skutečné síly na virtuálním přemístění
- $\delta \vec{F} \cdot \vec{r}$  ... práce virtuální síly na skutečném přemístění
- $\vec{F} \cdot \vec{r}$  ... síla a přemístění vzájemně nesouvisí

### 21) Virtuální síla, napětí, přemístění

VIRTUÁLNÍ SÍLA → libovolná (povrchová nebo objemová) síla, která uzaltrní na skutečném přemístění

VIRTUÁLNÍ NAPĚTÍ →  $\delta \sigma_{xx}, \delta \sigma_{yy}, \delta \sigma_{zz}$   
 → musí plnit diferenciální rovnice rovnováhy  $\sigma$  a statické podmínky rovnováhy na  $S_p$

VIRTUÁLNÍ PŘEMÍSTĚNÍ → libovolné volné přemístění  $\vec{r}$  mezer nitřních a vnějších mezí  
 →  $\delta u_x(x,y,z); \delta u_y(x,y,z); \delta u_z(x,y,z)$

### 22) Princip virtuální práce

→ když těleso nebo jeho libovolná část se uvaladí a rovnováže, potom virtuální práce všech skutečných vnějších a nitřních sil na virtuálních přemístěních a deformacích se rovná 0.

$$\int_V \left[ \left( \frac{\delta \sigma_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_{zx}}{\delta z} + \bar{x} \right) \delta u_x + \left( \frac{\delta \sigma_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_{yy}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_{yz}}{\delta z} + \bar{y} \right) \delta u_y + \left( \frac{\delta \sigma_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_{zz}}{\delta z} + \bar{z} \right) \delta u_z \right] dV - \int_{S_p} [(p_x - \bar{p}_x) \delta u_x + (p_y - \bar{p}_y) \delta u_y + (p_z - \bar{p}_z) \delta u_z] dS = 0$$

### 23) Princip virtuální síly

→ součet prací virtuálních vnějších a vnějších sil na skutečných přemístěních a deformacích se rovná nule = princip generalizované práce

$$\int_V (\epsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \epsilon_{yy} \delta \sigma_{yy} + \epsilon_{zz} \delta \sigma_{zz} + \epsilon_{xy} \delta \sigma_{xy} + \epsilon_{yz} \delta \sigma_{yz} + \epsilon_{zx} \delta \sigma_{zx}) dV - \int_{S_n} (\bar{u}_x \delta p_x + \bar{u}_y \delta p_y + \bar{u}_z \delta p_z) dS = 0$$

## 24) Variační metody (poznámky)

- 1) VM dovolují relativně jednoduše sestavit soustavu Eulerových rovnic  
- jednodušší způsob než variační formulaci úlohy → pracujeme se skalárními funkcemi (potenciál, atd.) a ne s vektory (síly, posunutí)
- 2) VM přechází řešením na soustavu Eulerových rovnic a dává podmínky
- 3) poskytuje některé doplňující informace o řešení problému a dává možnost kontroly při formulaci problému
- 4) pro aproximaci řešení lze použít širokou třídu náhradních funkcí  
- ↑ možná případy je vyhodnotit variační formulaci než diferenciální formulaci  
- při užití variační formulace náhradní funkce nemusí splňovat všem okrajovým podmínkám (některé podmínky jsou obsaženy ve funkcionálu)

## 25) Výpočtové metody konstrukce - postup tvorby, zjednodušení, dělení podle geometrických poměrů

- postup tvorby → 3 kroky:
  - 1) návrh (myšlenky, údaje)
  - 2) analýza (typ modelu)
  - 3) testování (experiment, měření)
- náhrada výpočtovým modelem:
  - a) model = co nejnormovanější geometrie nosného systému konstrukce
  - b) model = místo co nejvíce vystihnout mechanické reaktivity konstrukce
- dělení dle geometrických poměrů a způsobu zatížení:
  - 1) části příhradové kce (prut přenáší tah a tlak)
  - 2) nosníky (prut přenáší moment, přetváří a dává síly)
  - 3) části kce → rovinné na 2D úlohy (stěny, liniové stavby)
  - 4) ohybové desky (plošné kce zatížené příčnými zatíženími)
  - 5) uvnitř části přenáší pouze membránové napětí (tenké skořápky)
  - 6) plošné kce nahrazené ohybem a membrán. napětí (stěna - deska)
  - 7) tenké a středně tlusté skořápky
  - 8) prostorové útvary - 3D úlohy (obecná tělesa)

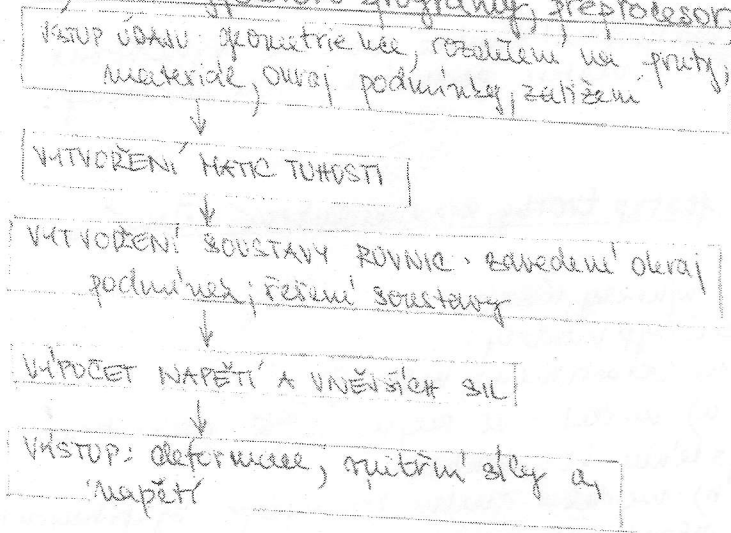
## 26) Metoda konečných prvků - kroky analýzy

- 1) idealizace soustavy - nahrazení soubojem prvků
- 2) rovnováha prvků - podm. rovnováhy sestaveny ze stavových proměnných
- 3) spojení prvků - sestavení soustavy rovnic pro určené hledané stavové proměnné na základě propojení prvků
- 4) řešení odezvy - po vyřešení soustavy rovnic získáme hodnoty stavových proměnných a z podmínek rovnováhy dopočítáme zbyvající proměnné

✓ 27) Metoda konečných prvků - základní kroky, výchozí metody, varianta

- VÝCHOZÍ METODA - deformační metoda (řešení v přemístění)
  - ZÁKLADNÍ KROKY - 1) idealizace ke pomocí nosníkovým a prvkovým prvků spojeným členům
  - 2) identifikace nezávislých parametrů
  - 3) sestavení rovnice rovnováhy (+ případ řešení)
  - 4) po vyjádření hodnot přemístění - rozdělení vnitřních sil
  - 5) posouzení konstrukce
- VARIANTA - nejčastěji používaná deformační varianta

✓ 28) MKP NÚPOČTOVÉ PROGRAMY: PREPROCESSOR, ŘEŠIČ, POSTPROCESSOR



PREPROCESSOR - složení a provedení a zjednodušení těchto úloh

ANALÝZA PRVKŮ

ANALÝZA KONSTRUKCE

ŘEŠIČ - řešení úlohy

DOUKONČENÍ ANALÝZY

POSTPROCESSOR - zpracování a výstup a uchození výsledků

✓ 29) Postup odvození matice tuhosti prvků

- 1) vytvoření výpočtového modelu
- 2) určení okraj. podmínek
- 3) předpoklad - lineární přiblíž: stanovem' fci' posunutí  $U(x), V(x)$
- 4) maticeový zápis  
 $s \cdot a = k \cdot e \rightarrow a = s^{-1} \cdot k \cdot e \rightarrow$  získáme výraz  $V(x) = p \cdot s^{-1} \cdot k \cdot e$
- 5) derivace  $V(x)$  podle  $x$ : potenciál deformace  
 $\epsilon_x = \frac{\partial U(x)}{\partial x}$
- 6) určení potenciálu energie prvu  
 $V = \frac{1}{2} \int \epsilon_x^T \cdot E \cdot \epsilon_x \cdot A \cdot dx \rightarrow$  dosazení
- 7) matice tuhosti  
 $k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

30) Postup odvození zatěžovacího vektoru

31) BAZOVÉ funkce - vysvětlení

- používají se v MKP aproximací uvnitř pole na koncům prvky a závislosti na rozložení řešivé úlohy
- hledání těchto příměstev, jsou na každém koncovém pruhu  $\bar{\sigma}$ , aproximativně srovnávajími bázevými funkcemi
- hodnoty bázevých fun = ušlové parametry příměstev

$$u = \sum u_i; u_2; u_3; \dots; u_n^T$$

$K \cdot u = R$   
 $u \dots$  hodnoty bázevých fun  
 $K \dots$  matice tuhosti  
 $R \dots$  vektor vztahující síly

na  $u_i$  dle významu prvku

32) Popis používaných prvků + stupně volnosti

- používání prvky  $\rightarrow$  prutové
- $\rightarrow$  plošné
- $\rightarrow$  prostorové

PRUTOVÉ PRVKY  $\rightarrow$  osové zatížení v 2D



4 stupně volnosti  
 $\bar{\sigma} = [u_1, v_1, u_2, v_2]^T$



osové zatížení v 3D  
 6 stupňů volnosti

$$\bar{\sigma} = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T$$



v prostoru  
 12 stupňů volnosti

$$\bar{\sigma} = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4]^T$$

PLOŠNÉ PRVKY  $\rightarrow$  rovinný  $\Delta$

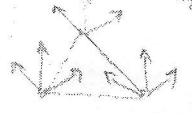
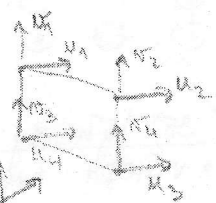


6 stupňů volnosti  
 $\bar{\sigma} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]^T$

$\rightarrow$  rovinný  $\square$

8 stupňů volnosti

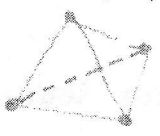
$$\bar{\sigma} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]^T$$



$\Delta$  v 3D  
 9 stupňů volnosti

$\square$  v 3D  
 12 stupňů volnosti

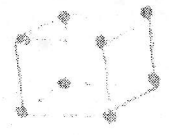
PROSTOROVÉ PRVKY  $\rightarrow$  čtyřstěn 3D



4. uzly = 12 stupňů volnosti

$\rightarrow$  kvádr 3D

24 stupňů volnosti



$\rightarrow$  přímka

2 stupňů volnosti

$\rightarrow$  kvadratické prvky

počet uzlů = 3 uzly (u, v, w)



### 33) Sestavení globální matice a vektorů



matice tuhosti jednotl. prvku

$$k_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{EA}{L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

celková energie napjatosti

$$W = \sum W_i = \frac{1}{2} U^T \cdot (k_1 + k_2 + k_3)$$

globální matice tuhosti

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

vektor zatížení R

$$P = \sum P_i = U^T (R_1 + R_2 + R_3)$$

Randimova - řádkový vektor po řádku a hlavním maticí  
 Morobububova - řádkové maticí po řádku  
 Gausova - hlavní vektor po hlavním maticí

### 34) Izo-, super-, sub-parametrické prvky

• IZOPARAMETRICKE PRVKY - geometrie prvku i tvar uhradnicov' funkce pro popis hledan' uhr' pole maj' stejn' počet parametrů



• SUPERPARAMETRICKE PRVKY - geometrie prvku je zadana' většim' počtem parametrů než tvar uhradnicov' funkce



• SUBPARAMETRICKE PRVKY - geometrie prvku je zadana' menšim' počtem parametrů než tvar uhradnicov' funkce



- bod s předepsanou souřadnicí prvku
- bod s parametry posunutí

### 35) Výhody izoparametrického postupu odvození

- VÝHODY: tvar izopar. prvku je větší obecný → při odvození matice tuhosti se využijí transformace jednotkov'ho prvku na skutečný
- POSTUP ODVOZENÍ: 1) transformace na jednotkový prvek



- 2) definice transformace vztahů mezi karte'z a příroz. souřad.
- 3) matice tuhosti
- 4) bazové funkce pro popis posunu
- 5)  $N_i = \hat{N}_i \dots$  je geometrie popsána' stejnym' polynomem jako pole posuvů je stejnym' polynomem parametrů → izoparametrický prvek

méně přesná - klesá se zvedáním

podáním' symetrie

mávním' bazovým' fci

### 36) Numerická integrace - postupy, dělení, výsledky

- použití - u vyjádření matice tuhosti a zatížení zakřivených trvaní
- matice integrálů

$$\int F(\xi) d\xi$$

1-dimenzionální řez.

$$\int F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

2-dimenzionální řez.

$$\int F(\xi, \eta, \xi_1) d\xi d\eta d\xi_1$$

3-dimenzionální řez.

- integrály řešíme numericky

$$\int F(\xi) d\xi = \sum_i w_i F(\xi_i)$$

$$\int F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j w_{ij} F(\xi_i, \eta_j)$$

$$\int F(\xi, \eta, \xi_1) d\xi d\eta d\xi_1 = \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} F(\xi_i, \eta_j, \xi_{1k})$$

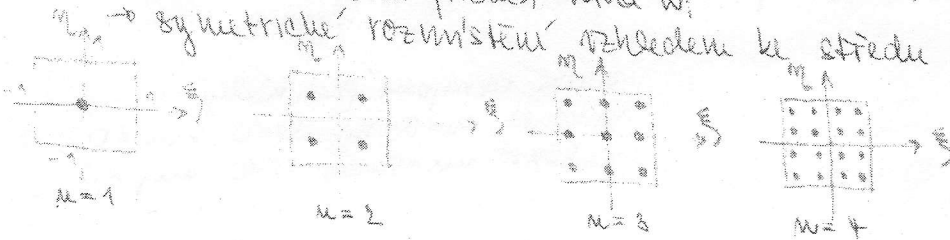
$w_{...}$  váhový koeficient

$F_{...}$  matice hodnot v integrálních bodech

- dělení podle metod získání interpolovaného polynomu  $\psi(\xi)$ 
  - 1) Lagrangeho interpolace
  - 2) pomocí Vandermondeovy matice
  - 3) Newton-Collisonovy vztahy

### 37) Gaussova numerická integrace - umístění integračních bodů - výsledky analýzy

- používá se téměř vždy jako metoda řešení numerické integrace
- umístění integračních bodů (pro dosažení nejvyšší přesnosti integrace)
  - každému bodu přiřadí váha  $w_i$
  - symetrické rozmístění vzhledem ke středu



→ zvýšování počtu řádků integrace zprůměrujeme aproximaci

- při výpočtu  $k$  matice zvolit řád integrace → ovlivní celou hodnotu

### 38) Ohýbání desky - základní přístupy, dělení, stupně volnosti u MKP

- desky - rovinná tělesa s rovinnou střednicovou plochou
- podpory idealizované bodově (stěpy)

liniově (stěny) → → →  
 plošně (zář. přídě) → → →  
 PROSTĚ VETKVNUTÍ VOLNĚ ULOŽENÍ

- dělení desek (dle teorii)
  - tuhé desky
  - $w/E \ll 1$  → tlusté desky
  - desková tělesa
  - velmi tuhé desky

- stupně volnosti - oběti křeha 3 dimenzionální (4 uzly · 3 stupně volnosti = 12)
  - jako nematematické přiblížení chyb → můžeme řešit jako 2D dimenzionální křeh (4 uzly · 2 stupně volnosti = 12)

39) Vnitřní síly dle jednotl. teorii, popis teorii - tenké, střední, tlusté

TENKÉ DESKY • poměr  $1/50 < h/l < 1/10$   
 • klasická kirchhoffova teorie - zanedbává mhy

TLUSTÉ DESKY • poměr  $1/10 < h/l < 1/5$   
 • Mindlinova teorie - vplácením prostřednictvím MKP - má mhy

disková deska  $h/l > 1/5 \rightarrow$  vyžaduje 3D řešení  
 velmi tenké desky  $h/l < 1/50 \rightarrow$  chová se jako membrána a do kategorie desek nepatří

40) Rovnice tenké ohybané desky

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{P}{D}$$

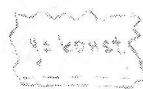
lze zapsat jako Laplaceův operátor  
 $\Delta \Delta u_z$

41) Okrajové podmínky ohybané desky

1) prostá podpora



$u_z = 0$   
 $w_x = 0$



$u_z = 0$   
 $w_y = 0$

kinematické (geometrické) okraj. podmín.  
 $x = \text{const } u_z = 0, \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$   
 $y = \text{const } u_z = 0, \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$

sílové okrajové podmínky  
 $x = \text{const } m_x = 0 = m_y, t_r \neq 0, m_{xy} \neq 0$   
 $y = \text{const } m_x = 0 = m_y, t_r \neq 0, m_{xy} \neq 0$

2) volný okraj



$m_x = 0$   
 $m_{xy} = t_x = 0$

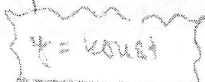


$m_y = 0$   
 $m_{xy} = t_y = 0$

3) netknutý okraj



$u_z = 0$   
 $\theta_x = 0$



$u_z = 0$   
 $\theta_y = 0$

$\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$

$\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$

sílové podmínky

$m_x = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$

$m_y = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = D m_x$

$m_y = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$

$m_x = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = D m_y$

42) Využití speciálních okrajových podmínek

- průřeví podpora
- liniový kloub
- průřeví netknutí
- plošná podpora desek

využití u desek které mají jiný tvar než obdélníkový  
 komplikovaně vyjadřem okrajových podmínek  
 (mimo vhodné počítání a vnitřní síly v síťové fázi)

2/16

konk. podmínky

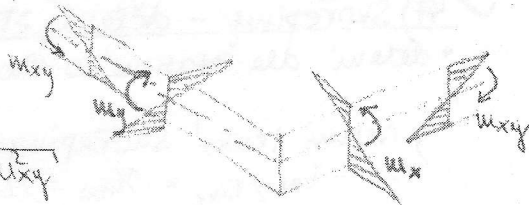
konk. - elipsa

### ✓ 43) Hlavní momenty u desek

- použití speciální u dimenzování ŽB desek
- $M_I, M_{II}$

$$M_{I,II} = \frac{1}{2} [m_x + m_y \pm \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}]$$

- extrém krouželko momentu  
 $m_{xy} = \pm \frac{1}{2} (m_I - m_{II})$



### ✓ 44) Metody řešení desek

#### A) ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

- dvojitými nekonečnými řadami
- jednodušími nekonečnými řadami

#### B) PŘÍBLIŽNÉ ŘEŠENÍ

- metoda kolekcí
- metoda minima četnosti výsk
- metoda konečných diferencí
- variační metody

### ✓ 45) Přesnější modely desek

- ORTOTROPIE - materiál desky má různé vlastnosti + různé směry x a y
- tloušťka desky  $D_x \neq D_y$
  - 4 vzájemné konstanty

$E_x, E_y \dots$  modul pružnosti  
 $\nu_x, \nu_y \dots$  součinitel příčné kontrakce

formule tuhosti desky

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$$

formule ortotropní desky

$$D_x \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \cdot D_{xy} \cdot \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = P$$

### ✓ 46) Kondenzace vnitřních parametrů

- vhodná v případě vyhodnocení superkonstrukce (skupina prvků je redukovaná na jeden prvek), případně tam, kde lze při tvorbě matice některé parametry zjednotit
- BEM lze vyjádřit soustavu rovnic  
 $\vec{K}^* \vec{u}_m = \vec{F}^*$   
 $\vec{K}^* \dots$  matice tuhosti superprvků  
 $\vec{F}^* \dots$  zatěžovací vektor

- kvadratická funkce - minimalizace

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \vec{u}_m^T \vec{K}^* \vec{u}_m - \vec{u}_m^T \vec{F}^*$$

(hledáme minimum vzhledem ke ostatním parametrům)

#### ✓ 47) Skořepiny - dělení, stupně volnosti MKP

- dělení dle statického chování  
 $r_{avr} \dots$  střední tloušťka  
 $r_{avr} \dots$  střední poloměr

1) tenká skořepina

$r_{avr}/r_{avr} = 1/400 = 1/200$ ; materiál kovy  
zdeškovky, potrubí velkých rozměrů, kádře

2) tenká skořepina

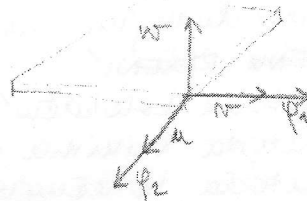
$r_{avr}/r_{avr} = 1/50 = 1/200$ ; materiál beton  
střední skořepiny, kornice, žb. pláště obkladních věží

3) tlustá skořepina

$r_{avr}/r_{avr} = 1/20 = 1/30$ ; materiál beton  
podokapy, přehradní hráze, opěrné zdi

- stupně volnosti MKP

5 stupňů volnosti v každém bodě



#### ✓ 48) Vnitřní síly a napětí podle jednotl. teorie u skořepin

- základní teorie skořepin = teorie tenkých skořepin →

- 3 variace této teorie:
- 1) přesná výpočetní teorie
  - 2) technická blyb. teorie
  - 3) membránová teorie

• MEMBRÁNOVÁ TEORIE - uvažuje jenž vnitřní síly v rovině  $M_x$  a  $M_y$

• TECHNICKÁ OHMB. TEORIE - uvažuje 8 vnitřních sil protože  $M_{xy} = M_{yx}$ ,  $M_{xy} = M_{yx}$

• PŘESNÁ OHMB. TEORIE - napjatost je popsána 20 vnitřními silami

- stěnové síly ...  $u_x, u_y, u_{xy}, u_{yx}$

- deskové síly ...  $u_x, u_y, u_{xy}, u_{yx}, t_x, t_y$

#### ✓ 49) Analýza konvergence

= porovnání výsledky při metodickaneobnám řešení kee

- přesnost řešení závisí na:
  - : zvolené síti prvků
  - : aproximaci hledaných fncí
  - : kombinaci obou metod

- typy - monotónní
- nemonotónní

MONOTÓNNI - prvky musí být úplné a kompatibilní

úplnost → fnc posunutí → musí být zajištěno, že při pohybu kee  
nedojde k průřezným deformacím

- výpočet napětí - z uzlových hodnot → lze vyčíslit napětí v každém bodě

## ✓ 50) Modely podloží - typy, dělení, použití

- DĚLENÍ - dle metody MKP - povrchové modely podloží  
- prostorové modely podloží

### • TYPY - PVRCHOVÉ

→ Winklerův model podloží



- uvažuje ovlivnění sousedními přítlaky od základů
- reakce podloží je přímo-úměrná přetížení

→ Pasternakův model podloží



- reakce podloží je přímo-úměrná přetížení, ale vznikají plošné přehybové křivky

### - PROSTOROVÉ

- jednotlivé skupinové prvky je nutno přiřadit vlastnosti podloží
- vyšší úroveň na použití PC
- může modelovat základy na pilotách, podzemní kee (tunely)