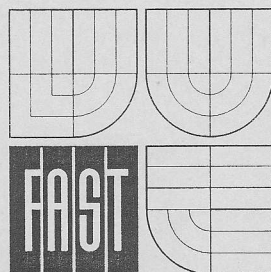


RNDr. Helena Koutková, CSc.
RNDr. Oldřich Dlouhý

**SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z PRAVDĚPODOBNOTI
A MATEMATICKÉ STATISTIKY**



OPSAH

RNDr. Helena Koutková, CSc., RNDr. Oldřich Dlouhý

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z PRAVDĚPODOBNOTI

A

MATEMATICKÉ STATISTIKY

LITERATURA

TABULKOVÁ PRÍLOHA

Tabulka: den žití národních herojů, 1945-1990

Tabulka: vývoj průměrné roční mzdy v ČR, 1990-2004

Tabulka: kvantile $F_{1,10}$

Tabulka: kvantile $F_{1,10}$

DODATEK

BRNO

leden 2005

HELENA KOUTKOVÁ, OLDŘICH DLOUHÝ
SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z PRAVDĚPODOBNOSTI
MATEMATICKÉ STATISTIKY

ISBN 80-214-2882-1
2005

OBSAH

1. PRAVDĚPODOBNOST	5
1.1 Rozdělovací funkce	5
1.2 Pravděpodobnost	7
1.3 Distribuční funkce	11
1.4 Marginální a simultánní náhodný vektor	17
1.5 Nezávislé náhodné veličiny	19
1.6 Transformace náhodných veličin a náhodných vektorů	21
1.7 Číselné charakteristiky	23
1.8 Některé zákony rozdělení	27
2. MATEMATICKÁ STATISTIKA	31
2.1 Bodový odhad parametru	31
2.2 Intervalový odhad parametru	34
2.3 Testování statistických hypotéz	40
2.4 Testy dobré shody	47
LITERATURA	52
TABULKOVÁ PŘÍLOHA	53
Tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny	54
Tabulka kvantilů normované normální náhodné veličiny	56
Tabulka kvantilů χ^2 rozdělení	56
Tabulka kvantilů t rozdělení	58
DODATEK	59

OBŠAH

I. PRAVDĚPODOBŇOST 8

1.1 Rozdělovací funkce 8

1.2 Pravděpodobnost 7

1.3 Distribuční funkce 11

1.4 Měřitelná a simulovaná náhodná veličina 17

1.5 Nezávislé náhodné veličiny 19

1.6 Transformace náhodných veličin a náhodných vektorů 21

1.7 Číselné charakteristiky 23

1.8 Některé základy teorie měření 27

II. MATEMATICKÁ STATISTIKA 31

2.1 Bodový odhad parametru 31

2.2 Intervalový odhad parametru 34

2.3 Testování statistických hypotéz 40

2.4 Teorie statistické shody 44

LITERATURA 52

TABULKOVÁ PŘÍLOHA 53

Tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny 54

Tabulka kvantilů normované t-distribuční náhodné veličiny 56

Tabulka kvantilů χ^2 rozdělení 58

Tabulka kvantilů F rozdělení 58

DODATEK 59

1. PRAVDĚPODOBNOST

1.1 ROZDĚLOVACÍ FUNKCE

Příklad 1. Obor hodnot diskrétní náhodné veličiny X je $\{0, 1, 2, 3\}$. X má pravděpodobnostní funkci p danou tabulkou

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/2	1/8	1/8	?

Určete $p(3)$.

$$[p(3) = 0, 25]$$

Příklad 2. Náhodná veličina X má obor hodnot $\{-1, 0, 1\}$. Zjistěte, zda funkce p, q, r, s dané tabulkou mohou být pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X .

x	-1	0	1
$p(x)$	-1/2	1	1/2

x	-1	0	1
$q(x)$	1/2	1	1/2

x	-1	0	1
$r(x)$	1/12	8/12	3/12

x	-1	0	1
$s(x)$	1/4	3/4	0

[p není; q není; r je; s není]

Příklad 3. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci p :

a) $p(x) = c(x^2 + 4)$ pro $x = 0, 1, 2, 3$;

b) $p(x) = c \binom{2}{x} \binom{3}{3-x}$ pro $x = 0, 1, 2$;

c) $p(x) = \begin{cases} c(1/4)^x & \text{pro } x = 3, 4, 5, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$;

d) $p(x) = \begin{cases} c(2/3)^{x+1} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$;

e) $p(x) = \begin{cases} c \frac{2^x + 3^{x+1}}{6^x} & \text{pro } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Určete konstantu c .

$$[a) c = \frac{1}{30}; b) c = \frac{1}{10}; c) c = 48; d) c = \frac{3}{4}; e) c = \frac{2}{15}]$$

Příklad 4. Náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnostní funkci p :

a) $p(x, y) = \begin{cases} c(1/3)^{x+y} & \text{pro } x = 1, 2, \dots, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$;

b) $p(x, y) = \begin{cases} c(1/4)^{2x+y} & \text{pro } x = 1, 2, \dots, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Určete konstantu c .
 [a) $c = \frac{4}{3}$; b) $c = \frac{45}{4}$]

Příklad 5. Náhodná veličina X má obor hodnot $\langle -1, 1 \rangle$. Mohou být následující funkce hustotou spojitě náhodné veličiny X ?

a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$

c) $r(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$

d) $s(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$

e) $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

[a) není; b) je, X má tzv. rovnoměrné rozdělení s parametry $-1, 1$ - značíme $X \sim R(-1, 1)$; c) není, ale je to hustota náhodné veličiny X s oborem hodnot $\langle 0, 1 \rangle$, tedy $R(0, 1)$; d) není; e) není]

Příklad 6. Určete konstantu c tak, aby následující funkce byla hustotou spojitě náhodné veličiny X na uvedeném oboru hodnot:

a) $f(x) = cx^2$ pro $0 < x < 2$;

b) $f(x) = c \sin x$ pro $0 < x < \pi$;

c) $f(x) = c \cdot \operatorname{tg} x$ pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$;

d) $f(x) = c \cdot \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}$ pro $x \in \langle 2, 3 \rangle$;

e) $f(x) = c \cdot \sin^2 x$ pro $x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$;

f) $f(x) = c \cdot \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + x}$ pro $x \in (1, 2)$;

g) $f(x) = c \cdot x^2 \sin x$ pro $x \in (0, \pi)$.

[a) $c = \frac{3}{8}$; b) $c = \frac{1}{2}$; c) $c = \frac{1}{\ln \sqrt{2}}$; d) $c = \frac{1}{\ln \frac{16}{5}}$; e) $c = \frac{24}{2\pi - 3}$; f) $c =$

$\frac{1}{-\frac{3\pi}{4} + \ln \frac{5}{4} + 3\operatorname{arctg} 2}$; g) $c = \frac{1}{\pi^2 - 4}$]

Příklad 7. Určete konstantu c tak, aby následující funkce byla hustotou spojitě náhodného vektoru (X, Y) .

a) $f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times (0, 2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$

b) $f(x, y) = \begin{cases} c \cos(2x + 3y) & \text{pro } [x, y] \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle \times \left\langle 0, \frac{\pi}{18} \right\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$

c) $f(x, y) = \begin{cases} cxy^2 & \text{pro } \Omega = \{[x, y] : 2x^2 + 3y^2 \leq 6, x > 0, y > 0\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$

$$[a) c = 1; b) c = \frac{4}{\sqrt{3}-1}; c) c = \frac{5}{2\sqrt{2}}]$$

Příklad 8. Určete konstantu c tak, aby následující funkce byla hustotou spojitého náhodného vektoru (X, Y, Z) .

$$a) f(x, y, z) = \frac{c}{(x + y + z + 1)^3} \quad \text{pro } x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z \leq 1;$$

$$b) f(x, y, z) = cz\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{pro } y^2 + x^2 - 2x \leq 0, x > 0, y > 0, 0 < z \leq 1;$$

$$c) f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)c \quad \text{pro } 3x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 3, x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$[a) c = \frac{1}{-\frac{5}{16} + \ln \sqrt{2}}; b) c = \frac{9}{8}; c) c = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}]$$

1.2 PRAVDĚPODOBNOST

Příklad 1. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vypočtěte $P(X \in (-1, 2))$, $P(X \in (-1, 2))$, $P(X \leq 3)$, $P(X < 3)$, $P(X = 3)$, $P(X > 3)$, $P(X \leq 3 \cup X > 5)$.

$$\left[\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{29}{32}\right]$$

Příklad 2. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \frac{3}{7}(0.7)^x \quad \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots$$

Vypočtěte $P(X < 3)$, $P(X > 4)$, $P(1 < X < 4)$, $P(X = 0)$.

$$[0.51; 0.2401; 0.357; 0]$$

Příklad 3. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \frac{x}{16} \quad \text{pro } x = 1, 3, 5, 7.$$

Vypočtěte $P(X = 1 \cup X = 3)$, $P(1/2 < X < 7/2)$, $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(X > 7)$.

$$[0.25; 0.25; 0.25; 0]$$

Příklad 4. Hrací kostka je konstruovaná tak, že 1 nebo 2 padne 2-krát častěji než 5, která padne 3-krát častěji než 3, 4 nebo 6. Označme X počet ok při jednom hodu touto kostkou.

a) Určete obor hodnot Ω a rozdělovací funkci náhodné veličiny X .

b) Vypočítejte pravděpodobnost, že padne sudé číslo.

c) Vypočítejte pravděpodobnost, že padne číslo ostře větší než 4.

$$[a) \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, p(x) = \begin{cases} \frac{6}{18} & \text{pro } x = 1, 2 \\ \frac{3}{18} & \text{pro } x = 5 \\ \frac{1}{18} & \text{pro } x = 3, 4, 6 \end{cases}, b) \frac{8}{18}, c) \frac{4}{18}]$$

Příklad 5. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = 3x^2 \quad \text{pro } x \in (0, 1).$$

Určete $P(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2})$, $P(X < \frac{1}{4})$, $P(X \leq \frac{1}{2})$.

$$[\frac{7}{64}; \frac{1}{64}; \frac{1}{8}]$$

Příklad 6. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{4-x^2} & \text{pro } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vypočtěte $P(1 < X \leq \sqrt{3})$.

$$[\frac{1}{3}]$$

Příklad 7. Náhodně vybíráme bod z intervalu $\langle 0, 2 \rangle$, přičemž každý bod má stejnou šanci dostat se do výběru. Označme X x-ovou souřadnici náhodně zvoleného bodu.

- Určete obor hodnot Ω a rozdělovací funkci f náhodné veličiny X .
- Určete pravděpodobnost, že vybereme bod z intervalu $\langle 1.5, 2.5 \rangle$.
- Určete pravděpodobnost, že vybereme bod o souřadnici 1.7.

$$[a) \Omega = \langle 0, 2 \rangle, f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, X \sim R(0, 2), b) 0.5, c) 0]$$

Příklad 8. Váhy jsou oceňovány po 1 gramu. Určete rozdělovací funkci chyby zaokrouhlení a pravděpodobnost, že absolutní hodnota chyby zaokrouhlení bude menší než 0.25 [g].

$$[f(x) = 1 \quad \text{pro } x \in \langle -0.5, 0.5 \rangle, X \sim R(-0.5, 0.5), 0.5]$$

Příklad 9. Necht X je náhodná veličina, $A, B \subset R$, $A \cap B = \emptyset$, $P(X \in A) = 0.3$, $P(X \in B) = 0.5$. Určete $P(X \in A \cup B)$, $P(X \in \bar{A})$, $P(X \in \bar{A} \cap B)$.

$$[0.8, 0.7, 0.5]$$

Příklad 10. Necht X je náhodná veličina, $A, B, C \subset R$, $P(X \in A) = 0.7$, $P(X \in B) = 0.8$, $P(X \in C) = 0.3$, $P(X \in A - C) = 0.7$, $P(X \in A - B) = 0.1$. Vypočtěte $P(X \in A \cap C)$, $P(X \in A \cup C)$, $P(X \in A \cup B)$.

$$[0, 1, 0.9]$$

Příklad 11. Vypočtěte s přesností na 5 desetinných míst

- $P(X \in \langle 5, 9 \rangle)$, jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, přičemž $\mu = 5$, $\sigma^2 = 16$ a hustota náhodné

veličiny $N(\mu, \sigma^2)$ je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pro } x \in R.$$

[tzv. normální náhodná veličina s parametry μ, σ^2]

b) $P(-1 \leq X \leq 8)$, jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, přičemž $\mu = 2, \sigma = 3$.

[a) 0.34134; b) 0.81859]

Příklad 12. Je dána tabulka:

$x \backslash y$	-1	0	1	2
0	1/9	1/18	1/6	1/9
1	1/6	1/9	1/12	1/36
2	1/24	1/18	1/36	?

Určete:

- zbývající hodnotu v tabulce, aby jí byla určena pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y) ;
- $P((X, Y) \in \langle -0.2, 2 \rangle \times \langle -0.5, 1.6 \rangle)$;
- $P((X, Y) \in \langle 1, 2 \rangle \times (0, 2))$;
- $P((X, Y) \in (0, 2) \times (-1, 1))$.

[a) $\frac{1}{24}$; b) $\frac{15}{36}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $\frac{7}{36}$]

Příklad 13. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$g(x, y) = \frac{x+y}{30} \quad \text{pro } x = 0, 1, 2, 3; y = 0, 1, 2.$$

Určete

- $P(X \leq 2, Y = 1)$;
- $P(X > 2, Y \leq 1)$;
- $P(X > Y)$;
- $P(X + Y = 4)$.

[a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{7}{30}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{4}{15}$]

Příklad 14. Je dána pravděpodobnostní funkce p diskrétního náhodného vektoru (X, Y) , přičemž

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3y} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \dots, y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vypočtěte $P((X, Y) \in A)$, jestliže

- $A = \{[x, y] \in N \times N; x < 3, 0 < y \leq 2\}$;
- $A = \{[x, y] \in R^2; x \in \langle 1.3; 2.8 \rangle, y \in \langle 0.3; 3.7 \rangle\}$;

c) $A = \{[x, y] \in N \times N; x \geq 3, y \geq 1\}$.
 [a) 0.11536; b) 0.02339; c) 0.17969]

Příklad 15. V krabici jsou 3 modré, 2 červené a 3 zelené náplně. Náhodně vybíráme 2 náplně. Označme X počet modrých a Y počet zelených náplní. Určete rozdělovací funkci náhodného vektoru (X, Y) a $P[(X, Y) \in A]$, kde $A = \{[x, y] \in R^2; x + y \leq 1\}$.

$x \backslash y$	0	1	2
0	1/28	3/14	3/28
1	3/14	9/28	0
2	3/28	0	0

[13/28]

Příklad 16. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{pro } [x, y] \in \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určete:

a) Konstantu k .

b) Následující pravděpodobnosti $P(X \leq 1, Y \leq 2), P(X < 1, Y \leq 2), P(X \geq 1.5, Y \leq 2), P(X = 1, Y \leq 2), P(X \geq 1, Y = 2), P(X = 1, Y = 2), P((X, Y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle), P((X, Y) \in H)$, kde H je vnitřek trojúhelníka s vrcholy $A = [0, 0], B = [4, 0], C = [4, 4]$.

[a) $k = \frac{1}{8}$, b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$]

Příklad 17. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \frac{1}{64}(2x + 3y) \quad \text{pro } [x, y] \in (0, 2) \times (0, 4).$$

Určete $P[(X, Y) \in \langle -1, \frac{1}{2} \rangle \times \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle]$.

[$\frac{13}{64^2}$]

Příklad 18. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \quad \text{pro } 0 < x < y, 0 < y < 1.$$

Vypočtěte $P(X + Y > \frac{1}{2})$.

[0.6534]

Příklad 19. Náhodný vektor (X, Y) má hustotu:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y & \text{pro } [x, y] \in \Omega \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin \Omega \end{cases},$$

kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}$. Vypočtěte $P((X, Y) \in A)$, je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x + y \geq 2\}$.

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

Příklad 20. Náhodný vektor (X, Y) má hustotu:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} \text{ pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2, a > 0, b > 0.$$

Určete $P((X, Y) \in A)$, je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 b^2 + y^2 a^2 \leq k^2 a^2 b^2, k > 0\}$.

$$\left[1 - e^{-\frac{k^2}{2}}\right]$$

Příklad 21. Dva lidé se domluvili, že se potkají během 1 hodiny na určitém místě. Předpokládejme, že oba lidé mají stejnou šanci během dané hodiny přijít. Určete pravděpodobnost

a) že se potkají, když ten, co přijde první počká 20 minut;

b) že přijdou ve stejnou dobu.

$$\left[\text{a) } \frac{5}{9}; \text{ b) } 0\right]$$

Příklad 22. Náhodný vektor (X, Y, Z) má hustotu

$$f(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{(2\pi)^3} 15} e^{-\left(\frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{25} + \frac{z^2}{2}\right)} \text{ pro } [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Určete na pět desetinných míst $P((X, Y, Z) \in E)$, jestliže $E = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 100x^2 + 36y^2 + 225z^2 \leq 900\}$.

$$\left[0.73854\right]$$

1.3 DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Příklad 1. Určete distribuční funkci F náhodné veličiny X , jestliže má X pravděpodobnostní funkci

$$\begin{aligned} \text{a) } p(x) &= \frac{1}{4} \text{ pro } x = 1, 2, 3, 4; \text{ c) } p(x) = \binom{3}{x} (0.1)^x (0.9)^{3-x} \text{ pro } x = 0, 1, 2, 3; \\ \text{b) } p(x) &= \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{pro } x = 2, 4 \\ \frac{2}{9} & \text{pro } x = 6, 8 \\ \frac{1}{3} & \text{pro } x = 10 \end{cases}; \text{ d) } p(x) = \frac{(0.7)^x e^{-0.7}}{x!} \text{ pro } x = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$[a) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{4} & \text{pro } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & \text{pro } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{pro } x \geq 4 \end{cases} ; b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 2 \\ \frac{1}{9} & \text{pro } 2 \leq x < 4 \\ \frac{2}{9} & \text{pro } 4 \leq x < 6 \\ \frac{4}{9} & \text{pro } 6 \leq x < 8 \\ \frac{6}{9} & \text{pro } 8 \leq x < 10 \\ 1 & \text{pro } x \geq 10 \end{cases} ;$$

$$c) F(x) = \begin{cases} 0.000 & \text{pro } x < 0 \\ 0.729 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0.972 & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ 0.999 & \text{pro } 2 \leq x < 3 \\ 1.000 & \text{pro } x \geq 3 \end{cases} ; d) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \sum_{t \leq x, t \in \mathbb{Z}, t \geq 0} \frac{(0.7)^t e^{-0.7}}{t!} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Příklad 2. Určete distribuční funkci F náhodné veličiny X , jestliže X má hustotu f , kde

$$a) f(x) = \frac{1}{4} \text{ pro } 1 \leq x \leq 5 ; \quad c) f(x) = \frac{3}{8} x^2 \text{ pro } 0 < x \leq 2 ;$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2} \sin x \text{ pro } 0 < x < \pi ; \quad d) f(x) = 2x e^{-x^2} \text{ pro } x > 0 .$$

$$[a) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-1) & \text{pro } 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{pro } x > 5 \end{cases} ; b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{pro } 0 < x < \pi \\ 1 & \text{pro } x \geq \pi \end{cases}$$

$$c) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{pro } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases} ; d) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou následující funkce distribuční funkce náhodné veličiny X . V případě, že ano, určete o jakou náhodnou veličinu se jedná a rozdělovací funkci f této náhodné veličiny.

$$a) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x < 0 \\ 1 & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} ; \quad g) F(x) = \frac{2}{\pi} \arctg x \text{ pro } x \in \mathbb{R} ;$$

$$b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -3 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x \geq -3 \end{cases} ; \quad h) F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} g x \text{ pro } x \in \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned}
c) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{pro } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pro } x \geq 3 \end{cases}; & i) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 2x & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}; \\
d) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ \frac{1}{7} & \text{pro } -1 \leq x < 0 \\ \frac{3}{7} & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}; & j) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 2x & \text{pro } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pro } x > \frac{1}{2} \end{cases}; \\
e) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 2 \\ \frac{1}{8} & \text{pro } 2 \leq x < 4 \\ \frac{3}{8} & \text{pro } 4 \leq x < 6 \\ \frac{4}{8} & \text{pro } 6 \leq x < 8 \\ 1 & \text{pro } x \geq 8 \end{cases}; & k) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{pro } x > 0 \end{cases}; \\
f) F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \sum_{t \leq x, t \in \mathbb{Z}, t \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^t & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}; & l) F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.
\end{aligned}$$

[a) F není distribuční funkce; b) F není distribuční funkce; c) F není distribuční funkce;

$$d) F \text{ je distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny; } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{pro } x = -1 \\ \frac{2}{7} & \text{pro } x = 0 \\ \frac{4}{7} & \text{pro } x = 1 \end{cases};$$

$$e) F \text{ je distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny; } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{pro } x = 2 \\ \frac{2}{8} & \text{pro } x = 4 \\ \frac{1}{8} & \text{pro } x = 6 \\ \frac{4}{8} & \text{pro } x = 8 \end{cases}; f) F$$

je distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny; $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ pro $x = 1, 2, 3, \dots$; g) F není distribuční funkce; h) F není distribuční funkce; i) F není distribuční funkce; j) F je distribuční funkce spojité náhodné veličiny; $f(x) = 2$ pro $0 < x \leq \frac{1}{2}$; k) F je distribuční funkce spojité náhodné veličiny; $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x > 0$; h) F je distribuční funkce spojité náhodné veličiny; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$

Příklad 5. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \sum_{t \leq x, t \in \mathbb{N}} \frac{1}{10} & \text{pro } x \in \langle 1, 10 \rangle \\ 1 & \text{pro } x > 10 \end{cases}.$$

Určete následující pravděpodobnosti $P(X \leq 7), P(X < 7), P(X = 7), P(X = 3.5), P(X \in (3, 5)), P(X \in \langle 3, 5 \rangle), P(X \in (3, 5)), P(X \in \langle 3, 5 \rangle)$.

$$\left[\frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{1}{10}, 0, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10} \right]$$

Příklad 6. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ x - 1 & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}.$$

Určete následující pravděpodobnosti $P(X \leq 1.5), P(X < 1.5), P(1.5 \leq X \leq 1.7), P(1.5 < X < 1.7), P(1.5 \leq X < 1.7), P(1.5 < X \leq 1.7), P(X > 1.7), P(X \geq 1.7), P(X = 1.7)$.

$$[0.5; 0.5; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.3; 0.3; 0]$$

Příklad 7. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -5 \\ \frac{x+5}{7} & \text{pro } -5 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}.$$

Určete následující pravděpodobnosti $P(-2 < X < 2), P(X = 2), P(-6 \leq X < 1), P(X \leq 1), P(X \geq 1)$.

$$\left[\frac{4}{7}; 0; \frac{6}{7}; \frac{6}{7}; \frac{1}{7} \right]$$

Příklad 8. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ k x^3 & \text{pro } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{pro } x > 2 \end{cases}.$$

Určete:

- konstantu k ;
- hustotu f náhodné veličiny X ;
- $P(0 < X < 1)$.

$$[\text{a) } k = \frac{1}{8}; \text{ b) } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{pro } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}; \text{ c) } 0.125]$$

Příklad 9. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} k + \frac{l}{1+x^2} & \text{pro } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}.$$

Určete:

- konstanty k, l ;
- hustotu f náhodné veličiny X ;
- $P(1 < X < 2)$.

$$[\text{a) } k = 1, l = -1; \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{pro } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}; \text{c) } 0.3]$$

Příklad 10. Distribuční funkce spojitě náhodné veličiny X má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ a + b \sin x & \text{pro } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Určete konstanty a, b a hustotu náhodné veličiny X .

$$[a = 0, b = 1, f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}]$$

Příklad 11. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} k + l e^{-x} & \text{pro } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}.$$

Určete:

- konstanty k, l ;
- hustotu f náhodné veličiny X ;
- $P(0 < X < 3)$.

$$[\text{a) } k = 1, l = -1; \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{pro } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}; \text{c) } 1 - \frac{1}{e^3}]$$

Příklad 12. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = k + l \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \quad \text{pro } -\infty < x < \infty.$$

Určete:

- konstanty k, l ;
- hustotu f náhodné veličiny X ;
- x_1 tak, aby $P(X > x_1) = \frac{1}{4}$.

$$[\text{a) } k = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{\pi}; \text{b) } f(x) = \frac{2}{\pi(4+x^2)} \quad \text{pro } x \in R \text{ c) } x_1 = 2]$$

Příklad 13. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -a \\ k + l \arcsin \frac{x}{a} & \text{pro } -a < x < a, a > 0. \\ 1 & \text{pro } x \geq a \end{cases}$$

Určete:

- konstanty k, l ;
- hustotu f náhodné veličiny X ;
- $P(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2})$, $a > 0$.

$$[\text{a) } k = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{\pi}; \text{ b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{pro } |x| < a \\ 0 & \text{pro } |x| \geq a \end{cases}; \text{ c) } \frac{1}{3}]$$

Příklad 14. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = k + l \arctg e^x \text{ pro } -\infty < x < \infty.$$

Určete:

- konstanty k, l ;
- hustotu f náhodné veličiny X ;
- $P(X \geq 0)$.

$$[\text{a) } k = 0, l = \frac{2}{\pi}; \text{ b) } f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} \text{ pro } x \in \mathbb{R}; \text{ c) } \frac{1}{2}]$$

Příklad 15. Určete distribuční funkci F náhodného vektoru (X, Y) , jestliže má tento vektor rozdělovací funkci:

- $g(x, y) = \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right)$ pro $[x, y] \in (0, 2) \times (0, 3)$;
- $g(x, y) = xy$ pro $[x, y] \in (0, 1) \times (0, 2)$.

$$[\text{a) } F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(\frac{x^2 y}{4} + \frac{y^2 x}{6} \right) & \text{pro } [x, y] \in (0, 2) \times (0, 3) \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \cup y \leq 0 \\ 1 & \text{pro } [x, y] \in \langle 2, \infty \rangle \times \langle 3, \infty \rangle; \\ \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) & \text{pro } [x, y] \in (0, 2) \times \langle 3, \infty \rangle \\ \frac{1}{6} \left(y + \frac{1}{3} y^2 \right) & \text{pro } [x, y] \in \langle 2, \infty \rangle \times (0, 3) \end{cases}$$

$$\text{b) } F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{4} & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times (0, 2) \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \cup y \leq 0 \\ 1 & \text{pro } [x, y] \in \langle 1, \infty \rangle \times \langle 2, \infty \rangle \\ x^2 & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times \langle 2, \infty \rangle \\ \frac{1}{4} y^2 & \text{pro } [x, y] \in \langle 1, \infty \rangle \times (0, 2) \end{cases}$$

Příklad 16. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci g danou tabulkou

$x \backslash y$	0	1	2
1	0.01	0.04	0.05
2	0.19	0.26	0.45

Určete jeho distribuční funkci F .

$$[F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \cup y < 0 \\ 0.01 & \text{pro } [x, y] \in \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ 0.05 & \text{pro } [x, y] \in \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle \\ 0.10 & \text{pro } [x, y] \in \langle 1, 2 \rangle \times \langle 2, \infty \rangle \\ 0.20 & \text{pro } [x, y] \in \langle 2, \infty \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ 0.50 & \text{pro } [x, y] \in \langle 2, \infty \rangle \times \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pro } [x, y] \in \langle 2, \infty \rangle \times \langle 2, \infty \rangle \end{cases}]$$

Příklad 17. Náhodný vektor (X, Y) má distribuční funkci

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(y-1) & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times (1, 3) \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \cup y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } [x, y] \in \langle 1, \infty \rangle \times \langle 3, \infty \rangle \\ x & \text{pro } [x, y] \in (0, 1) \times (3, \infty) \\ \frac{1}{2}(y-1) & \text{pro } [x, y] \in (1, \infty) \times (1, 3) \end{cases}$$

Určete:

a) rozdělovací funkci f náhodného vektoru (X, Y) ;

b) $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq 1)$, $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}, 2 < Y < 3)$, $P(X > \frac{1}{4}, Y > 2)$, $P(X < \frac{1}{2}, P(Y < 2)$.

[a) $f(x, y) = \frac{1}{2}$ pro $[x, y] \in (0, 1) \times (1, 3)$; b) $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]

1.4 MARGINÁLNÍ A SIMULTÁNNÍ NÁHODNÝ VEKTOR

Příklad 1. Určete marginální rozdělovací funkce, jestliže má simultánní náhodný vektor (X, Y) rozdělovací funkci g :

a) danou tabulkou:

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	0.10	0.01	0.09	0.20
2	0.15	0.14	0.01	0.30

$$b) g(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+y} & \text{pro } [x, y] \in \{0, 1, \dots\} \times \{1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases};$$

$$c) g(x, y) = \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \text{ pro } 0 < x < 2, 0 < y < 3;$$

$$d) g(x, y) = 8xy \text{ pro } [x, y] \in H, \text{ kde } H \text{ je vnitřek trojúhelníka } ABC, \text{ kde } A = [0, 0], B = [1, 1], C = [1, 0];$$

$$e) g(x, y) = 4x(y - 1) \text{ pro } [x, y] \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle.$$

$$[a] X \sim g_1(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{pro } x = 1 \\ 0.6 & \text{pro } x = 2 \end{cases}; Y \sim g_2(y) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } y = 1 \\ 0.15 & \text{pro } y = 2 \\ 0.10 & \text{pro } y = 3 \\ 0.50 & \text{pro } y = 4 \end{cases};$$

$$b) X \sim g_1(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \text{ pro } x = 0, 1, \dots, Y \sim g_2(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y \text{ pro } y = 1, 2, \dots;$$

$$c) X \sim g_1(x) = \frac{1}{4}(x + 1) \text{ pro } x \in (0, 2), Y \sim g_2(y) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{3}y\right) \text{ pro } y \in (0, 3);$$

$$d) X \sim g_1(x) = 4x^3 \text{ pro } x \in (0, 1), Y \sim g_2(y) = 4y(1 - y^2) \text{ pro } y \in (0, 1);$$

$$e) X \sim g_1(x) = 2x \text{ pro } x \in (0, 1), Y \sim g_2(y) = 2(y - 1) \text{ pro } y \in (1, 2)]$$

Příklad 2. Náhodný vektor (X, Y, Z) má rozdělovací funkci

$$g(x, y, z) = \frac{1}{33}(xy + 2z) \text{ pro } [x, y, z] \in (0, 1) \times (0, 2) \times (1, 4).$$

Určete všechny marginální rozdělovací funkce.

$$[X \sim g_1(x) = \frac{1}{33}(6x + 30) \text{ pro } x \in (0, 1), Y \sim g_2(y) = \frac{1}{33} \left(\frac{3}{2}y + 15\right) \text{ pro } y \in (0, 2),$$

$$Z \sim g_3(z) = \frac{1}{33}(1 + 4z) \text{ pro } z \in (1, 4), (X, Y) \sim g_{1,2}(x, y) = \frac{1}{33}(3xy + 15) \text{ pro } [x, y] \in (0, 1) \times (0, 2),$$

$$(X, Z) \sim g_{1,3}(x, z) = \frac{1}{33}(2x + 4z) \text{ pro } [x, z] \in (0, 1) \times (1, 4),$$

$$(Y, Z) \sim g_{2,3}(y, z) = \frac{1}{33} \left(\frac{y}{2} + 2z\right) \text{ pro } [y, z] \in (0, 2) \times (1, 4)]$$

Příklad 3. Podnik vyrábí ocelové objímky, přičemž kontrolní zařízení je třídí podle dvou kritérií:

- podle odchylky od předepsaného vnitřního průměru do čtyř skupin s hodnotami 1,2,3,4

- podle odchylky od předepsané délky rovněž do čtyř skupin s hodnotami 2,4,6,8.

Označme X číslo objímky podle prvního kritéria, Y číslo objímky podle druhého kritéria. Pravděpodobnostní funkce p náhodného vektoru (X, Y) je dána tabulkou

$x \backslash y$	2	4	6	8
1	0.01	0.03	0.04	0.02
2	0.02	0.24	0.10	0.04
3	0.04	0.15	0.08	0.03
4	0.04	0.06	0.08	0.02

Stanovte

a) marginální pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X a náhodné veličiny Y .

$$[X \sim g_1(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } x = 1 \\ 0.4 & \text{pro } x = 2 \\ 0.3 & \text{pro } x = 3 \\ 0.2 & \text{pro } x = 4 \end{cases}; Y \sim g_2(y) = \begin{cases} 0.11 & \text{pro } y = 2 \\ 0.48 & \text{pro } y = 4 \\ 0.30 & \text{pro } y = 6 \\ 0.11 & \text{pro } y = 8 \end{cases}]$$

Příklad 4. Náhodný vektor (X_1, X_2, X_3) má rozdělovací funkci

$$f(x_1, x_2, x_3) = Ax_1x_2x_3^2 \quad \text{pro } 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1, \quad 0 < x_3 < 3.$$

Stanovte

a) konstantu A ;

b) marginální hustoty $f_{1,3}(x_1, x_3), f_1(x_1)$;

c) $P(0 < X_1 < \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} < X_2 < \frac{2}{3} \cap 1 < X_3 < 2)$.

[a) $A = \frac{4}{9}$; b) $f_{1,3}(x_1, x_3) = \frac{2x_1x_3^2}{9}$ pro $0 < x_1 < 1, 0 < x_3 < 3, f_1(x_1) = 2x_1$ pro $0 < x_1 < 1$; c) $\frac{7}{324}$]

1.5 NEZÁVISLÉ NÁHODNÉ VELIČINY

Příklad 1. Jsou veličiny v příkladech předchozí kapitoly nezávislé?

[př.1 a)ne; b) ano; c)ne; d) ne; e) ano, př.2 ne, př. 3 ne, př.4 ano]

Příklad 2. Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé, jestliže má náhodný vektor (X, Y) rozdělovací funkci g :

a) danou tabulkou:

$x \backslash y$	1	2	3
1	0.02	0.03	0.05
2	0.18	0.27	0.45

b) $g(x, y) = 189 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3y+1}$ pro $x = 0, 1, 2, \dots, y = 1, 2, 3, \dots$;

c) $g(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$;

d) $g(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x > 0, y > 0$;

e) $g(x, y) = x + y$ pro $0 < x < 1, 0 < y < 1$;

f) $g(x, y) = \frac{1}{4}$ pro $0 < x < 2, 0 < y < 2$.

$$[a] X \sim g_1(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } x = 1 \\ 0.9 & \text{pro } x = 2 \end{cases}, Y \sim g_2(y) = \begin{cases} 0.2 & \text{pro } y = 1 \\ 0.3 & \text{pro } y = 2 \\ 0.5 & \text{pro } y = 3 \end{cases}, X \text{ a } Y \text{ jsou}$$

nezávislé; b) $X \sim g_1(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$ pro $x = 0, 1, \dots$, $Y \sim g_2(y) = 63\left(\frac{1}{4}\right)^{3y}$ pro $y =$

$1, 2, \dots$, X a Y jsou nezávislé; c) $X \sim g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pro $x \in R$, $Y \sim g_2(y) =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$ pro $y \in R$, X a Y jsou nezávislé; d) $X \sim g_1(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$, $Y \sim$

$g_2(y) = e^{-y}$ pro $y > 0$, X a Y jsou nezávislé; e) $X \sim g_1(x) = x + \frac{1}{2}$ pro $0 < x <$

1 , $Y \sim g_2(y) = y + \frac{1}{2}$ pro $0 < y < 1$, X a Y nejsou nezávislé; f) $X \sim g_1(x) =$

$\frac{1}{2}$ pro $0 < x < 2$, $Y \sim g_2(y) = \frac{1}{2}$ pro $0 < y < 2$, X a Y jsou nezávislé]

Příklad 3. Náhodný vektor (X, Y, Z) má rozdělovací funkci:

$$a) g(x, y, z) = 2xyz \text{ pro } [x, y, z] \in (0, 1) \times (0, 2) \times (0, 1);$$

$$b) g(x, y, z) = \frac{3}{4\pi} \text{ pro } [x, y, z] \in A, \text{ kde } A = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Určete, zda jsou veličiny X, Y a Z nezávislé.

$$[a] X \sim g_1(x) = 2x \text{ pro } 0 < x < 1, Y \sim g_2(y) = \frac{1}{2}y \text{ pro } 0 < y < 2, Z \sim g_3(z) =$$

$$2z \text{ pro } 0 < z < 1, X, Y \text{ a } Z \text{ jsou nezávislé; b) } X \sim g_1(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) \text{ pro } -1 < x <$$

$$1, Y \sim g_2(y) = \frac{3}{4}(1 - y^2) \text{ pro } -1 < y < 1, Z \sim g_3(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2) \text{ pro } -1 < z < 1,$$

X, Y a Z nejsou nezávislé]

Příklad 4. Ověřte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé, má-li náhodný vektor (X, Y) distribuční funkci

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{4} \text{ pro } 0 < x < 1, 0 < y < 2.$$

[nezávislé]

Příklad 5. Náhodné veličiny X, Y a Z jsou nezávislé, přitom:

$$X \sim g_1(x) = \frac{1}{2}x \text{ pro } 0 < x < 2;$$

$$Y \sim g_2(y) = \frac{1}{3} \text{ pro } 0 < y < 3;$$

$$Z \sim g_3(z) = \frac{1}{3} \text{ pro } 1 < z < 4.$$

Určete hustotu $g(x, y, z)$ náhodného vektoru (X, Y, Z) .

$$[g(x, y, z) = \frac{1}{18}x \text{ pro } [x, y, z] \in (0, 2) \times (0, 3) \times (1, 4)]$$

Příklad 6. Vzájemně nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 mají stejnou hustotu

$$f_i(x_i) = 3x_i^2 \quad \text{pro } 0 < x_i < 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3.$$

Jaká je pravděpodobnost, že právě dvě z těchto veličin nabudou hodnoty větší než 0.5?

[0.287]

Příklad 7. Předpokládejme, že životnost určitého výrobku je náhodná veličina s hustotou $f(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$. Označme X_1, X_2 a X_3 životnost tří různých výrobků. Vypočítejte $P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2)$.

[0.0372]

Příklad 8. Dva hráči A, B hrají šachy. Pravděpodobnost výhry hráče A je $\frac{2}{3}$, hráče B je $\frac{1}{3}$. Hráči opakují hru tolikrát až vyhraje hráč A. Určete:

- rozdělovací funkci náhodné veličiny X , která značí počet uskutečněných her;
- pravděpodobnost toho, že budou hrát nejvýše 2-krát;
- pravděpodobnost toho, že budou hrát alespoň 2-krát.

$$[a) p(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \quad \text{pro } x = 1, \dots; b) \frac{8}{9}; c) \frac{1}{3}]$$

1.6 TRANSFORMACE NÁHODNÝCH VELIČIN A NÁHODNÝCH VEKTORŮ

Příklad 1. Vypočtete rozdělovací funkci $p(y)$ náhodné veličiny Y , jestliže:

a) $X \sim p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ pro $x = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda > 0$ [tzv. Poissonovo rozdělení s parametrem λ , značíme - $Po(\lambda)$], $Y = 4X$;

b) $X \approx p(x) = \frac{1}{3}$ pro $x = 1, 2, 3$ [tzv. klasické rozdělení s parametrem 3, značíme $X \sim K(3)$], $Y = 2X + 1$.

$$[a) p(y) = \frac{\lambda^{\frac{y}{4}} e^{-\lambda}}{\left(\frac{y}{4}\right)!} \quad \text{pro } y = 0, 4, 8, \dots; b) p(y) = \frac{1}{3} \quad \text{pro } y = 3, 5, 7.]$$

Příklad 2. Náhodná veličina X má hustotu $f(x)$, $Y = aX + b$, kde a, b jsou konstanty, $a \neq 0$. Určete hustotu $g(y)$ náhodné veličiny Y .

$$\left[g(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \left|\frac{1}{a}\right| \right]$$

Příklad 3. Počítač měří intenzitu radioaktivního zdroje podle počtu impulsů. Označme Y čas mezi dvěma impulsy a předpokládejme, že $Y = aX + b$, kde $X \sim f(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$ [exponenciální rozdělení $E(0,1)$], kde a, b jsou kladné konstanty, přičemž b představuje minimální dobu mezi 2 impulsy. Určete hustotu $g(y)$ náhodné veličiny Y .

$$[g(y) = \frac{1}{a} e^{-\frac{y-b}{a}} \quad \text{pro } y > b]$$

Příklad 4. $X \sim N(0, 1), Y = aX + b, a > 0$. Určete hustotu $g(y)$ náhodné veličiny Y .

$$[Y \sim N(b, a^2)]$$

Příklad 5. Náhodná veličina Y je funkcí náhodné veličiny X ; čemu se rovná hustota $g(y)$ náhodné veličiny Y , jestliže má náhodná veličina X hustotu $f(x)$:

a) $f(x) = 2x$ pro $0 < x < 1, Y = 8X^3$;

b) $f(x) = 1$ pro $0 < x < 1, Y = -2 \ln X$;

c) $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x > 0, Y = X^2$;

d) $f(x) = 1$ pro $0 < x < 1, Y = e^X$;

e) $f(x) \sim N(0, 1), Y = X^2$;

f) $f(x) = \frac{x^2}{9}$ pro $0 < x < 3, Y = X^3$;

g) X má libovolné rozdělení s hustotou $f(x)$ pro $-\infty < x < \infty, Y = |X|$;

h) $f(x) = \frac{1}{2\pi}$ pro $-\pi < x < \pi, Y = \sin X$;

i) $f(x) \sim N(0, 1), Y = e^X$;

j) $f(x) = \frac{1}{2}$ pro $0 < x < 2, Y = |1 - X|$.

[a] $g(y) = \frac{1}{6} y^{-1/3}$ pro $0 < y < 8$; b) $g(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2}$ pro $y > 0$; c) $g(y) = e^{-y}$ pro $y > 0$; d) $g(y) = \frac{1}{y}$ pro $1 < y < e$; e) $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$ pro $y > 0$ - tzv. chí-kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti, značíme $X \sim \chi^2(1)$; f) $g(y) = \frac{1}{27}$ pro $0 < y < 27$; g) $g(y) = f(y) + f(-y)$ pro $y \geq 0$; h) $g(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}$ pro $-1 < y < 1$; i) $g(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$ pro $y > 0$; j) $g(y) = 1$ pro $0 < y < 1$]

Příklad 6. Náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu $f(x_1, x_2)$ pro $[x_1, x_2] \in R^2$. Určete hustotu $g(y_1, y_2)$ náhodného vektoru (Y_1, Y_2) a hustotu $h(y_1)$ náhodné veličiny Y_1 , je-li $Y_1 = X_1 - X_2, Y_2 = X_2$.

$$[g(y_1, y_2) = f(y_1 + y_2, y_2) \text{ pro } [y_1, y_2] \in R^2, h(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 + y_2, y_2) dy_2 \text{ pro } y_1 \in R]$$

Příklad 7. Náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu $f(x_1, x_2)$ pro $[x_1, x_2] \in R \times R^+$. Určete hustotu $g(y_1, y_2)$ náhodného vektoru (Y_1, Y_2) a hustotu $h(y_1)$ náhodné veličiny Y_1 , je-li $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}, Y_2 = X_2$.

$$[g(y_1, y_2) = f(y_1 y_2, y_2) y_2, h(y_1) = \int_0^{\infty} y_2 f(y_1 y_2, y_2) dy_2 \text{ pro } [y_1, y_2] \in R \times R^+]$$

Příklad 8. Náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1 - x_2}$ pro $x_1 > 0, x_2 > 0, Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, Y_2 = X_1 + X_2$. Určete hustotu náhodného vektoru (Y_1, Y_2) a zjistěte, zda jsou náhodné veličiny Y_1 a Y_2 nezávislé.

$[(Y_1, Y_2) \sim g(y_1, y_2) = y_1 y_2^2 e^{-y_2}$ pro $[y_1, y_2] \in (0, 1) \times (0, \infty)$, veličiny Y_1 a Y_2 jsou nezávislé]

Příklad 9. X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim R(0, 1)$ pro $i = 1, 2$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

$$[Y \sim g(y) = \begin{cases} y & \text{pro } 0 < y \leq 1 \\ 2 - y & \text{pro } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}]$$

Příklad 10. Náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \text{ pro } [x_1, x_2] \in R^2,$$

$Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = 2X_1 - X_2$. Určete hustotu $g(y_1, y_2)$ náhodného vektoru (Y_1, Y_2) .

$$[g(y_1, y_2) = \frac{1}{6\pi} e^{\frac{-5y_1^2 - 2y_1 y_2 + 2y_2^2}{81}} \text{ pro } [y_1, y_2] \in R^2]$$

Příklad 11. Určete hustotu délky průvodiče bodu B , když jeho souřadnice mají

$$\text{hustotu } f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi a^2} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2a^2}} \text{ pro } [x_1, x_2] \in R^2.$$

$[g(r) = \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$ pro $r > 0$, tzv. Rayleighovo rozdělení s parametrem a , značíme $X \sim Ra(a)$]

Příklad 12. Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé, $X_i \sim R(a, b)$ pro $i = 1, 2, \dots, n, Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Určete hustotu $g(y)$ náhodné veličiny Y .

$$[g(y) = \begin{cases} n \frac{(y-a)^{n-1}}{(b-a)^n} & \text{pro } y \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}]$$

1.7 ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKY

Příklad 1. Určete střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X , jestliže X má rozdělovací funkci:

a) $g(x) = \frac{1}{6}$ pro $x = 1, 2, \dots, 6$;

b) $g(x) = \frac{x}{16}$ pro $x = 1, 3, 5, 7$;

c) $g(x) = 3x^2$ pro $x \in (0, 1)$;

d) $g(x) = 2x - 2$ pro $x \in (1, 2)$;

e) $g(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ pro $x \geq 0$.

[a] $E(X) = 3.5, D(X) = \frac{35}{12}$; b) $E(X) = \frac{21}{4}, D(X) = \frac{55}{16}$; c) $E(X) = \frac{3}{4}, D(X) = \frac{3}{80}$; d) $E(X) = \frac{5}{3}, D(X) = \frac{1}{18}$; e) $E(X) = 2, D(X) = 4$]

Příklad 2. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X a Y , jestliže má náhodný vektor (X, Y) rozdělovací funkci g :

a) $g(x, y) = xy$ pro $[x, y] \in (0, 1) \times (0, 2)$;

b) $g(x, y) = 2$ pro $0 < x < y < 1$;

c) $g(x, y)$ je dána tabulkou:

$x \backslash y$	-1	0	1
0	0.02	0.03	0.05
1	0.18	0.27	0.45

[a] $E(X) = \frac{2}{3}, D(X) = \frac{1}{18}, E(Y) = \frac{4}{3}, D(Y) = \frac{2}{9}$; b) $E(X) = \frac{1}{3}, D(X) = \frac{1}{18}, E(Y) = \frac{2}{3}, D(Y) = \frac{1}{18}$; c) $E(X) = 0.9, D(X) = 0.09, E(Y) = 0.3, D(Y) = 0.61$]

Příklad 3. Bud' X, Y náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou a rozptylem, a, b reálná čísla. Dokažte, že platí:

1) $E(aX) = aE(X)$

4) $D(aX) = a^2D(X)$

2) $E(a) = a$

5) $D(a) = 0$

3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

6) X, Y nezáv. $\Rightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Příklad 4. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, $E(X) = 2, E(Y) = -2, D(X) = 1, D(Y) = 4$. Určete

a) $E(2X - Y), D(2X - Y)$;

b) $E(X - 2Y), D(X - 2Y)$.

[a] 6, 8; b) 6, 17]

Příklad 5. Určete $E(2X+3), E(3X^2-2X+1), D(2X+3), D(X^2+1), D(-X+1)$, jestliže má náhodná veličina X rozdělovací funkci:

a) $g(x) = \begin{cases} p & \text{pro } x = 1 \\ 1 - p & \text{pro } x = 0 \end{cases}, p > 0$;

b) $g(x) = \frac{1}{a}$ pro $x \in (0, a), a > 0$.

[a] $2p + 3, p + 1, 4p(1 - p), p(1 - p), p(1 - p)$; b) $a + 3, a^2 - a + 1, \frac{a^2}{3}, \frac{4a^4}{45}, \frac{a^2}{12}$]

Příklad 6. X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé náhodné veličiny $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2$ pro $i = 1, \dots, n$. Určete střední hodnotu a disperzi aritmetického průměru náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n .

$$\left[E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mu, D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2 \right]$$

Příklad 7. Náhodná veličina X má konečnou střední hodnotu $E(X)$ a konečný nenulový rozptyl $D(X)$. Dokažte, že pro náhodnou veličinu

$$U = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

platí $E(U) = 0$, $D(U) = 1$.

Příklad 8. Určete 25%–ní a 75%–ní kvantil náhodné veličiny X , jestliže:

a) X má distribuční funkci $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ x^3 & \text{pro } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$;

b) X má hustotu $f(x) = 2x$ pro $x \in (0, 1)$.

[a) $x(0.25) \doteq 0.63$, $x(0.75) \doteq 0.91$; b) $x(0.25) = 0.50$, $x(0.75) \doteq 0.87$]

Příklad 9. Určete 50%–ní kvantil náhodné veličiny X , jestliže má X hustotu:

a) $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in R$;

b) $f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}$ pro $x \geq 0$.

[a) $x(0.5) = 0$, b) $x(0.5) \doteq 2.77$]

Příklad 10. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci g :

a) danou tabulkou

$x \backslash y$	0	1	2
0	3/28	3/14	1/28
1	9/28	3/14	0
2	3/28	0	0

b) $g(x, y) = 8xy$ pro $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq x$.

Vypočítejte $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $C(X, Y)$, $D(X - Y)$.

[a) $E(X) = \frac{3}{4}$, $E(Y) = \frac{1}{2}$, $E(XY) = \frac{3}{14}$, $C(X, Y) = -\frac{9}{56}$, $D(X - Y) = \frac{117}{112}$;

b) $E(X) = \frac{4}{5}$, $E(Y) = \frac{8}{15}$, $E(XY) = \frac{4}{9}$, $C(X, Y) = \frac{4}{225}$, $D(X - Y) = \frac{1}{25}$]

Příklad 11. Pro náhodné veličiny X a Y platí:

$$E(X) = 2, D(X) = 3, E(Y) = -1, D(Y) = 5, E(XY) = -4.$$

Určete korelační koeficient $\rho(X, Y)$ náhodných veličin X a Y .

[$\rho(X, Y) = \frac{-2}{\sqrt{15}}$]

Příklad 12. Náhodná veličina X má konečný nenulový rozptyl a konečnou střední hodnotu. Pro náhodnou veličinu Y platí $Y = aX + b$, kde a, b jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Dokažte, že platí $|\rho(X, Y)| = 1$.

Příklad 13. Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny X a Y lineárně závislé a v případě, že nejsou lineárně závislé, zjistěte, zda jsou nezávislé. Víte, že náhodný vektor (X, Y) má rozdělovací funkci g :

a) danou tabulkou:

$x \backslash y$	1	2	3
0	0.05	0.05	0.10
1	0.15	0.45	0.20

b) danou tabulkou:

$x \backslash y$	1	2	3
1	0.02	0.04	0.14
2	0.03	0.06	0.21
3	0.05	0.10	0.35

c) $g(x, y) = x + y$ pro $[x, y] \in (0, 1) \times (0, 1)$;

d) $g(x, y) = 4x(y + 1)$ pro $[x, y] \in (0, 1) \times (-1, 0)$.

[a) $\rho(X, Y) = -0.107143 \Rightarrow$ veličiny X a Y nejsou lineárně závislé a nejsou nezávislé; b) $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow$ veličiny X a Y jsou nekorelované, nejsou lineárně závislé a podle definice nezávislosti jsou nezávislé; c) $\rho(X, Y) = \frac{-1}{11} \Rightarrow$ veličiny X a Y nejsou lineárně závislé a jsou závislé; d) $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow$ veličiny X a Y nejsou lineárně závislé a podle definice nezávislosti jsou nezávislé]

Příklad 14. V sérii výrobků, která je připravena k expedici, je 8% výrobků s vadou povrchové úpravy. Dlouhodobým statistickým pozorováním bylo zjištěno, že pravděpodobnost reklamace výrobku s uvedenou vadou je 0.8. Bylo uvažováno o dvou variantách prodeje těchto výrobků: buď zákazníkovi v případě reklamace bude poskytnuta 50% sleva, nebo původní cena výrobku bude snížena o 5% (bez možnosti reklamace). Předpokládaná cena výrobku je C . Která z obou variant prodeje je pro spotřebitele výhodnější?

[Při první variantě prodeje je očekávaná tržba za jeden výrobek $0.968C$, při druhé variantě prodeje je tržba za jeden výrobek $0.95C$, pro spotřebitele je tedy výhodnější druhá varianta]

Příklad 15. Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodu, je náhodná veličina X . Statisticky bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot 0,1,2,3,4 s pravděpodobnostmi 0.25, 0.55, 0.11, 0.07, 0.02. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .

[$E(X)=1.06$, $D(X)=0.8164$]

Příklad 16. Pro ocenění kvality práce tří pracovníků A, B, C byl proveden následující experiment. Za výrobek 1. jakosti dostanou ohodnocení 3 body, za výrobek 2 jakosti 2 body, za výrobek 3. jakosti 1 bod, za výrobek 4. jakosti jsou potrestáni

ztrátou jednoho bodu. Pravděpodobnosti vyrobení výrobků jednotlivých jakostí jsou uvedeny v tabulce:

	x	3	2	1	-1
A	$p_1(x)$	0.5	0.1	0.3	0.1
B	$p_2(x)$	0.3	0.5	0.1	0.1
C	$p_3(x)$	0.4	0.3	0.3	0.0

Zjistěte u kterého z pracovníků lze očekávat nejkvalitnější výrobky a který z pracovníků pracuje nejstabilněji.

[Nejkvalitnější výrobky lze očekávat u pracovníka C a tento pracovník zároveň pracuje nejstabilněji.]

1.8 NĚKTERÉ ZÁKONY ROZDĚLENÍ

Příklad 1. Odběratel si objednal 10 pytlů cementu. Pravděpodobnost poškození jednoho pytle je 0,23. Určete s jakou pravděpodobností budou právě 4 pytle poškozené.

[0, 1225]

Příklad 2. Přístroj obsahuje 20 stejně poruchových součástek, z nichž se každá porouchá nezávisle na ostatních v časovém intervalu s pravděpodobností 0.15. Jaká je pravděpodobnost poruchy přístroje v tomto časovém intervalu, jestliže k poruše přístroje stačí, selže-li alespoň 1 součástka?

[0.9612405]

Příklad 3. Bylo provedeno 15 nezávislých měření za stejných podmínek. Předpokládáme, že každé měření je ovlivněno pouze náhodnou chybou, která může s pravděpodobností 0.5 nabývat kladné nebo záporné hodnoty. Určete pravděpodobnost, že se objeví

- 7 záporných chyb;
- méně než 3 záporné chyby;
- alespoň 5 kladných chyb.

[a) 0.1963769;b) 0.0036925;c) 0.9407675]

Příklad 4. V produkci firmy bylo v sérii 30 000 výrobků zjištěno 27 000 bezvadných. Oddělení kontroly jakosti vybralo zkušební vzorek 20 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že ve výběru budou

- 2 vadné výrobky;
- alespoň 2 vadné výrobky;
- nejvýše 2 vadné výrobky;
- žádný vadný výrobek.

[a) 0.2851805;b) 0.608253;c) 0.6769275;d) 0.121577]

Příklad 5. Pravděpodobnost toho, že přístroj vydrží bez poruchy 3000 hodin provozu, je 0.4. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 1 z 5 stejných přístrojů vydrží bez poruchy 3000 hodin?

$$[B(5, 0.4), 0.92224]$$

Příklad 6. Stavební konstrukce má 7 nebezpečných průřezů, kde je plně využito předepsané únosnosti materiálu. Pravděpodobnost, že v libovolném průřezu (nebo v jeho blízkém okolí) je pevnost materiálu o více jak 10% nižší než pevnost, stanovená normou, je $2 \cdot 10^{-3}$. Určete pravděpodobnost, že

- v jednom nebezpečném průřezu se vyskytne materiál se sníženou pevností;
- takový materiál se vyskytne v alespoň jednom nebezpečném průřezu;
- takový materiál se vyskytne alespoň ve 4 nebezpečných průřezích.

[[$X =$ počet nebezpečných průřezů, v nichž se vyskytne materiál se sníženou pevností, $X \sim B(7, 2 \cdot 10^{-3})$] a) $1.383 \cdot 10^{-2}$; b) $1.392 \cdot 10^{-2}$; c) $5.573 \cdot 10^{-10}$]

Příklad 7. Na křižovatce zastaví během hodiny průměrně 15 aut. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut zastaví na křižovatce

- právě 1 auto;
- alespoň 2 auta;
- alespoň 2 a nejvýše 5 aut.

$$[Po(1), a) 0.367879; b) 0.264242; c) 0.263647]$$

Příklad 8. V 1 l vody bylo zjištěno průměrně 14 zrněk nečistot. Určete pravděpodobnost, že v $\frac{1}{2}$ l vody budou nejvýše 3 zrna nečistot.

$$[Po(7), 0.081]$$

Příklad 9. Daná radioaktivní látka vyzařuje průměrně 15 α -částic za minutu. Vypočítejte pravděpodobnost, že v průběhu tří sekund vyzáří látka

- 0, 1, 2 částice α ;
- více jak dvě částice α ;
- nejvýše dvě částice α .

$$[a) 0.47236, 0.35427, 0.13285; b) 0.04052; c) 0.95948]$$

Příklad 10. Firma přepravuje 500 výrobků, přičemž pravděpodobnost poškození výrobku během přepravy je 0.002. Určete pravděpodobnost, že během přepravy se poškodí

- 3 výrobky;
- méně než 3 výrobky;
- více než 3 výrobky;
- alespoň 1 výrobek.

Pozn. Aproximujte Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = np = 1$

$$[a) 0.061311; b) 0.919675; c) 0.019014; d) 0.63213]$$

Příklad 11. Jaká je pravděpodobnost, že ze 7 výrobků vyrobených po sobě, dva nebo více budou mít rozměry vně kontrolních mezí, jestliže automat vyrábí dva

výrobky za minutu a za osmihodinovou směnu vyrobí průměrně 12 kusů s rozměry vně kontrolních mezí?

[0.0036121]

Příklad 12. Podle úmrtnostních tabulek je pravděpodobnost toho, že 25-letý muž přežije další rok, rovna přibližně 0.998. Pojišťovna nabízí mužům tohoto věku, že při ročním pojistném 50 Kč vyplatí pozůstalým v případě úmrtí pojištěnce 10 000 Kč. Je pojištěno 1000 25-letých mužů. Jaká je pravděpodobnost, že ke konci roku zisk pojišťovny bude alespoň 30 000 Kč? Jaký zisk pojišťovna může očekávat?

Poz. Aproximujte Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = np = 2$.

[Zisk pojišťovny ke konci roku bude 30 000 Kč s pravděpodobností 0.676677. Pojišťovna může očekávat zisk 30 000 Kč.]

Příklad 13. Náhodná veličina X má rozdělení $N(0, 1)$. Vypočítejte pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty, které budou

- a) větší než 2.68;
- b) menší než 1.73;
- c) z intervalu $\langle 1.05, 1.65 \rangle$.

[a) 0.00368;b) 0.95818;c) 0.09739]

Příklad 14. Náhodná veličina X má rozdělení $N(1, 9)$. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že

- a) nabude hodnot z intervalu $\langle -1, 3 \rangle$;
- b) nabude hodnot z intervalu $\langle 5, 6 \rangle$;
- c) překročí hodnotu 4.

[a) 0.4950;b) 0.0434;c) 0.1587]

Příklad 15. V závodě jsou vyráběny výrobky, jejichž rozměry mají náhodné odchylky od normou stanovených hodnot. Tyto odchylky jsou rozloženy normálně se směrodatnou odchylkou $\sigma = 5$ [mm] a střední hodnotou $\mu = 0$ [mm].

a) Vypočítejte kolik procent výrobků bude průměrně zařazeno do vyšší jakostní třídy, jestliže do této třídy se zařazují výrobky s odchylkou rozměrů menší než 3 mm.

b) Za jakou horní hranici odchylek se lze zaručit s pravděpodobností 0.90?

[a) 45.1%;b) 8.225 mm]

Příklad 16. Náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ takové, že $P(X < 85) = 0.90$ a $P(X < 95) = 0.95$. Jaké jsou hodnoty μ a σ^2 ?

[$\mu \doteq 49.7, \sigma^2 \doteq 758.9$]

Příklad 17. Náhodná chyba měření X má rozdělení $N(0.2, 0.64)$. Vypočítejte:

a) pravděpodobnost, že absolutní chyba měření bude menší než 1.0;

b) horní hranici chyby měření, které se můžeme dopustit s pravděpodobností 0.95.

[a) 0.77453;b) 1.516]

Příklad 18. Předpokládejme, že pevnost v tahu určitého druhu výrobku má přibližně rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Každý výrobek je před expedicí testován a ty výrobky, jejichž pevnost v tahu je větší než μ , jsou označeny jako velmi kvalitní. Určete pravděpodobnost zhotovení velmi kvalitního výrobku.

[0.5]

Příklad 19. Na základě zkoušek bylo zjištěno, že procento nečistot v dodávané zásilce materiálu je náhodná veličina mající normální rozdělení se střední hodnotou 16.99% nečistot a se směrodatnou odchylkou 2.66% nečistot. Za jakou horní hranici procenta nečistot v zásilce se lze zaručit s pravděpodobností 0.95?

[asi 21.4 %]

Příklad 20. Měřením pevnosti ocelových drátů byla vypočtena střední hodnota 372 MPa a směrodatná odchylka 14.5 MPa. Kolik drátů s pevností od 380 do 410 MPa můžeme průměrně očekávat ve výrobě 400 kusů, víme-li, že pevnost ocelových drátů je náhodná veličina s normálním rozdělením?

[asi 115]

Příklad 21. Stroj upevňuje uzávěry na láhve silou, jejíž střední hodnota je 8 jednotek a směrodatná odchylka je 1 jednotka. Kvalita láhve, vyjádřená maximální silou, kterou láhev vydrží bez poškození má střední hodnotu 10 jednotek a směrodatnou odchylku 2 jednotky. Odhadněte podíl poškozených lahví v procentech, jestliže obě síly mají přibližně normální rozdělení.

[18.637%]

Příklad 22. Měřicí přístroj je zatížen náhodnými chybami, které mají normální rozdělení s parametry $\mu = 0, \sigma^2 = 16$. Kolikrát musíme změřit výrobek, aby se aritmetický průměr jednotlivých měření neodchyloval s pravděpodobností 0.9545 od správné hodnoty o více než ± 1 ?

[64]

2. MATEMATICKÁ STATISTIKA

2.1 BODOVÝ ODHAD PARAMETRU

Příklad 1. Bylo odzkoušeno 10 náhodně vybraných ocelových tyčí k určení meze průtažnosti s těmito výsledky v MPa:

277, 280, 291, 263, 277, 286, 281, 305, 290, 291.

Vypočtete realizaci bodového odhadu střední hodnoty a rozptylu meze průtažnosti oceli.

$$[\hat{\mu} = \bar{x} = 284.100 \text{ MPa}, \hat{\sigma}^2 = s^2 \doteq 126.989 \text{ MPa}^2]$$

Příklad 2. Po dobu 1 měsíce byly každý den zjišťovány počty zmetků v produkci určitého zaměstnance. Byly získány následující výsledky:

10, 12, 10, 10, 12, 10, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 13.

Určete realizaci bodového odhadu střední hodnoty počtu zmetků za 1 den a realizaci odhadu směrodatné odchylky počtu zmetků za 1 den.

$$[\hat{\mu} = \bar{x} = 10.750, \hat{\sigma} = s \doteq 1.209]$$

Příklad 3. V určité továrně byl v průběhu 2 roků následující objem výroby ocelových konstrukcí v tunách v jednotlivých měsících:

216, 205, 225, 233, 220, 225, 216, 211, 219, 231, 224, 244,

234, 304, 242, 278, 262, 233, 292, 250, 302, 287, 219, 227.

Určete realizaci bodového odhadu střední hodnoty a směrodatné odchylky objemu výroby za 1 měsíc.

$$[\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 241.625, \hat{\sigma} = s \doteq 29.802]$$

Příklad 4. Realizace náhodného výběru z X je

-1.0, -1.0, -0.9, -1.1, -0.9, -1.2, -0.8, -1.0, -0.9, -0.7.

Vypočtete realizaci bodového odhadu rozptylu, směrodatné odchylky a střední hodnoty náhodné veličiny X .

$$[\hat{\sigma}^2 = s^2 \doteq 0.021, \hat{\sigma} = s \doteq 0.143, \hat{\mu} = \bar{x} = -0.950]$$

Příklad 5. Určete realizaci bodového odhadu střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky průtoku Labe v roce 1994 na určitém místě, jsou-li známé tyto průměrné měsíční průtoky (v m^3s^{-1}):

40.7, 57.9, 121.0, 74.8, 51.6, 45.5, 41.4, 87.7, 56.8, 129.0, 99.2, 125.0.

$$[\hat{\mu} = \bar{x} = 77.550 \text{ m}^3\text{s}^{-1}, \hat{\sigma}^2 = s^2 \doteq 1140.714 [\text{m}^3\text{s}^{-1}]^2, \hat{\sigma} = s \doteq 33.774 \text{ m}^3\text{s}^{-1}]$$

Příklad 6. Při zkouškách vlhkosti stavebního materiálu Hobrex byla změřena pro-

centa vlhkosti u 717 vzorků, jsou uvedena v tabulce:

třída	vlhkost v %	n_i	třída	vlhkost v %	n_i
1.	18.75 - 19.75	3	5.	22.75 - 23.75	201
2.	19.75 - 20.75	22	6.	23.75 - 24.75	61
3.	20.75 - 21.75	123	7.	24.75 - 25.75	6
4.	21.75 - 22.75	300	8.	25.75 - 26.75	1

Určete realizaci bodového odhadu střední hodnoty a směrodatné odchylky vlhkosti.
 $[\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 22.486\%, \hat{\sigma} = s \doteq 0.998\%]$

Příklad 7. Při měření veličiny konstantní délky, byly zjištěny následující chyby měření:

třída		n_i	třída		n_i
1.	-1.25 - -1.05	3	7.	-0.05 - 0.15	27
2.	-1.05 - -0.85	7	8.	0.15 - 0.35	35
3.	-0.85 - -0.65	18	9.	0.35 - 0.55	33
4.	-0.65 - -0.45	28	10.	0.55 - 0.75	18
5.	-0.45 - -0.25	35	11.	0.75 - 0.95	6
6.	-0.25 - -0.05	35	12.	0.95 - 1.15	5

Vypočtěte realizaci bodového odhadu rozptylu a střední hodnoty náhodné chyby měření.

$$[\hat{\sigma}^2 = s^2 \doteq 0.2409, \hat{\mu} = \bar{x} = -0.038]$$

Příklad 8. Při stavbě betonové konstrukce bylo odebráno 100 vzorků betonové směsi. Po 28 dnech vykázaly zkušební kostky tuto krychlovou pevnost v MPa:

27.0, 24.7, 21.4, 24.9, 28.2, 30.9, 27.2, 25.0, 21.9, 22.6, 27.0, 32.3, 25.4,
 27.7, 25.6, 26.0, 23.8, 23.1, 25.1, 31.0, 27.2, 22.1, 18.9, 29.5, 18.2, 26.7,
 27.0, 25.3, 22.2, 22.5, 20.6, 30.3, 25.3, 25.6, 28.1, 23.2, 23.0, 18.6, 20.0,
 25.2, 22.2, 27.9, 25.6, 22.9, 31.6, 27.5, 21.6, 24.5, 19.7, 26.6, 26.5, 24.1,
 29.6, 17.6, 27.3, 24.5, 31.0, 25.2, 27.6, 19.8, 23.2, 23.8, 25.6, 28.6, 29.1,
 25.7, 23.2, 23.6, 25.6, 27.7, 28.7, 22.5, 19.6, 29.1, 26.8, 26.6, 24.3, 26.3,
 24.7, 26.3, 24.6, 26.2, 23.7, 26.0, 28.1, 28.2, 25.9, 23.0, 21.0, 24.0, 24.2,
 23.5, 30.5, 29.7, 26.9, 24.4, 26.2, 23.8, 26.0, 27.0.

Odhadněte střední hodnotu a směrodatnou odchylku pevnosti betonu.

[realizaci roztrídíte do tříd a pak spočtete odhady:

třída	pevnost	n_i	třída	pevnost	n_i
1.	17.5 - 18.5	2	9.	25.5 - 26.5	14
2.	18.5 - 19.5	2	10.	26.5 - 27.5	13
3.	19.5 - 20.5	4	11.	27.5 - 28.5	9
4.	20.5 - 21.5	3	12.	28.5 - 29.5	4
5.	21.5 - 22.5	5	13.	29.5 - 30.5	4
6.	22.5 - 23.5	10	14.	30.5 - 31.5	4
7.	23.5 - 24.5	11	15.	31.5 - 32.5	2
8.	24.5 - 25.5	13			

$$\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 25.370 \text{ Mpa}, \hat{\sigma} = s \doteq 3.103 \text{ MPa}]$$

Příklad 9. Při měření určité vzdálenosti jsme získali následující výsledky (v km)

20.1 20.2 19.9 20.0 20.5 20.5 20.0 19.8 19.9 20.0

Odhadněte přesnost dálkoměru, jestliže víte, že je skutečná vzdálenost 20 km a chyba měření není zatížena systematickou chybou.

$$[\hat{\sigma}^2 = s_0^2 = 0.061[\text{km}]^2]$$

Příklad 10. Řešte příklad 7, když víte, že skutečná střední hodnota náhodné chyby měření je -0.04 km.

$$[\hat{\sigma}^2 = s_0^2 \doteq 0.2399[\text{km}]^2]$$

Příklad 11. Byly zjištěny odchylky od jmenovité váhy 50 kg. Odhadněte rozptyl odchylky, když víte, že střední hodnota odchylky je 0.5 kg.

třída	odchylky v kg	n_i
1.	0.0 - 0.2	20
2.	0.2 - 0.4	18
3.	0.4 - 0.6	22
4.	0.6 - 0.8	20
5.	0.8 - 1.0	20

$$[\hat{\sigma}^2 = s_0^2 = 0.0792\text{kg}^2]$$

Příklad 12. Realizace náhodného výběru byla roztríděna následovně

třída		n_i
1.	0.2 - 0.4	20
2.	0.4 - 0.6	18
3.	0.6 - 0.8	22
4.	0.8 - 1.0	20

Určete realizaci bodového odhadu směrodatné odchylky, víte-li, že skutečná střední hodnota je 0.6.

$$[\hat{\sigma} = s_0 = 0.05]$$

Příklad 13. Náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou 6.3 a směrodatnou odchylkou 1.5. V jakých mezích budou hodnoty průměru \bar{X} při náhodném výběru z X o rozsahu a) $n=25$, b) $n=4$, jestliže chceme zajistit, aby pouze 2.5%, popřípadě 0.5% realizací veličiny \bar{X} , bylo pod dolní mezí a stejné procento nad horní mezí?

$$[\text{a) } 5.712 < \bar{X} < 6.888, 5.527 < \bar{X} < 7.073; \text{ b) } 4.830 < \bar{X} < 7.770, 4.368 < \bar{X} < 8.232]$$

Příklad 14. Náhodná veličina X má normální rozdělení s rozptylem 2.25. V jakých mezích můžeme s pravděpodobností 0.9 resp. 0.95 očekávat hodnoty odhadu rozptylu S^2 , jestliže náhodné výběry budou mít rozsah a) $n=25$, b) $n=4$ a jestliže se mají

hodnoty veličiny S^2 vyskytnout se stejnou pravděpodobností pod dolní a nad horní mezí?

[a) $1.298 < S^2 < 3.414$ resp. $1.162 < S^2 < 3.690$; b) $0.264 < S^2 < 5.861$ resp. $0.162 < S^2 < 7.011$]

Příklad 15. Ocel s hladkým povrchem jakosti 10 216, která je dodávána po určitou dobu na určitou stavbu jedním dodavatelem má mez kluzu, která má normální rozdělení se střední hodnotou 250.5 MPa a směrodatnou odchylkou 20.51 MPa. Náhodně bylo vybráno 25 vzorků. V jakém intervalu lze očekávat \bar{X} , S^2 , S s pravděpodobností 0.99, mají-li se hodnoty veličin \bar{X} , S^2 a S vyskytnout se stejnou pravděpodobností pod dolní a nad horní mezí?

[$239.933 \text{ MPa} < \bar{X} < 261.067 \text{ MPa}$, $173.294 \text{ MPa}^2 < S^2 < 798.553 \text{ MPa}^2$, $17.146 \text{ MPa} < S < 28.259 \text{ MPa}$]

2.2 INTERVALOVÝ ODHAD PARAMETRU

Příklad 1. Realizace náhodného výběru z normálního rozdělení je

-0.9, 1.1, 0.1, 0.0, -0.9, 0.1, -0.8, -0.8, -0.9, -0.8, 0.2.

Vypočtěte realizace 99%-ního

a) intervalového odhadu skutečné střední hodnoty a rozptylu;

b) pravostranného intervalového odhadu skutečné střední hodnoty a rozptylu;

c) levostranného intervalového odhadu skutečné střední hodnoty a rozptylu.

[$\hat{\mu} = \bar{x} \doteq -0.327$, $\hat{\sigma} = s \doteq 0.666$. a) pro μ : $\langle -0.964, 0.310 \rangle$, pro σ^2 : $\langle 0.176, 2.057 \rangle$; b) pro μ : $\langle -\infty, 0.228 \rangle$, pro σ^2 : $\langle 0, 1.734 \rangle$, c) pro μ : $\langle -0.882, \infty \rangle$, pro σ^2 : $\langle 0.191, \infty \rangle$]

Příklad 2. Realizace náhodného výběru z normálního rozdělení se střední hodnotou 10 je

12.3, 10.9, 11.1, 11.9, 11.8, 10.8, 10.9, 11.2, 11.2, 11.1.

Vypočtěte realizaci 99%-ního

a) intervalového odhadu skutečné směrodatné odchylky;

b) pravostranného intervalového odhadu skutečné směrodatné odchylky.

[$\hat{\sigma}^2 = s_0^2 = 1.970$. a) $\langle 0.884; 3.023 \rangle$; b) $\langle 0; 2.775 \rangle$]

Příklad 3. Realizace náhodného výběru z normálního rozdělení je

1.0, 2.0, 1.7, 1.8, 1.9, 1.9, 1.5, 1.6, 1.5, 1.7, 1.1.

Vypočtěte realizaci 95%-ního

a) intervalového odhadu skutečné střední hodnoty, víte-li, že skutečný rozptyl je 0,09;

b) levostranného intervalového odhadu skutečné střední hodnoty, víte-li, že skutečný rozptyl je 0,09;

c) intervalového odhadu skutečné střední hodnoty.

[$\hat{\mu} = \bar{x} = 1.609$, $\hat{\sigma} = s = 0.321$. a) $\langle 1.432; 1.786 \rangle$; b) $\langle 1.460; \infty \rangle$; c) $\langle 1.393; 1.825 \rangle$]

Příklad 4. Za předpokladu, že pevnost betonu je normální náhodná veličina, určete v příkladu 8 kapitoly 2.1 realizace 95%-ních intervalových odhadů neznámých parametrů.

$$[24.762 \text{ MPa} \leq \mu \leq 25.978 \text{ MPa}, 2.730 \text{ MPa} \leq \sigma \leq 3.616 \text{ MPa}]$$

Příklad 5. Za předpokladu, že vzdálenost je normální náhodná veličina, určete v příkladu 9 kapitoly 2.1 realizace 95%-ních intervalových odhadů neznámých parametrů.

$$[0.173 \text{ m} \leq \sigma \leq 0.433 \text{ m}]$$

Příklad 6. Bylo odzkoušeno 100 náhodně vybraných ocelových tyčí k určení meze průtažnosti daného druhu oceli. Byly vypočteny realizace bodových odhadů střední hodnoty a směrodatné odchylky : $\bar{x} = 286.4 \text{ MPa}$, $s = 11 \text{ MPa}$. Za předpokladu, že je mez průtažnosti normální náhodná veličina, vypočtete realizace 99%-ních intervalových odhadů neznámých parametrů.

$$[283.566 \text{ Mpa} \leq \mu \leq 289.234 \text{ Mpa}, 9.318 \text{ MPa} \leq \sigma \leq 13.507 \text{ MPa}]$$

Příklad 7. Výrobky mají mít hmotnost 4 kg. Bylo zváženo 10 výrobků a zjištěny odchylky od jmenovité váhy 4 kg. Dostali jsme následující výsledky (v gramech):

-1.2, 0.5, -0.6, -0.3, 0.2, -1.0, 0.4, -0.8, 0.5, -0.4.

Vypočítejte realizaci 95%-ního pravostranného intervalového odhadu střední hodnoty a 95%-ního levostranného intervalového odhadu směrodatné odchylky od jmenovité váhy. Předpokládáme, že odchylky mají normální rozdělení.

$$[\hat{\mu} = \bar{x} = -0.270 \text{ g}, \hat{\sigma} = s \doteq 0.638 \text{ g}, \mu \leq 0.100 \text{ g}, \sigma \geq 0.465 \text{ g}]$$

Příklad 8. Výsledky měření v metrech, které neobsahují systematické chyby jsou uvedeny v tabulce:

třída	\bar{x}_i	n_i	třída	\bar{x}_i	n_i
1.	114	2	4.	117	4
2.	115	5	5.	118	3
3.	116	8			

- Určete odhad měřené veličiny a 95% -ní intervalový odhad měřené veličiny.
- Jak se změní intervalový odhad, když je známo, že skutečná směrodatná odchylka je 1 m?

$$[a) \hat{\mu} = \bar{x} \doteq 116.045 \text{ m}, 115.524 \text{ m} \leq \mu \leq 116.566 \text{ m}; b) 115.627 \text{ m} \leq \mu \leq 116.463 \text{ m}]$$

Příklad 9. Průměrná hodnota vzdálenosti k orientačnímu bodu, získaná ze 4 nezávislých měření je 2 250 m. Chyba měřícího přístroje je normální náhodná veličina s parametry 10 m a 50 m². Určete 99%-ní a 95%-ní intervalový odhad měřené veličiny.

$$[2230.892 \text{ m} \leq \mu \leq 2249.108 \text{ m}, 2233.070 \text{ m} \leq \mu \leq 2246.930 \text{ m}]$$

Příklad 10. Při zkouškách dřevotřískových desek byl sledován vliv teploty na kvalitu povrchu. U 127 desek byla zjištěna teplota, při které nastala změna; výsledky byly

sestaveny do následující tabulky:

třída	změřené hodnoty v °C	n_i	třída	změřené hodnoty v °C	n_i
1.	82.5 - 87.5	4	6.	107.5 - 112.5	18
2.	87.5 - 92.5	6	7.	112.5 - 117.5	17
3.	92.5 - 97.5	15	8.	117.5 - 122.5	4
4.	97.5 - 102.5	28	9.	122.5 - 127.5	2
5.	102.5 - 107.5	33			

Určete 95%-ní intervalový odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky teploty, při které nastává změna. Předpokládáme, že teplota má přibližně normální rozdělení.
 $[\hat{\mu} = \bar{x} = 104.213^{\circ}\text{C}, \hat{\sigma} = 8.414^{\circ}\text{C}, 102.750^{\circ}\text{C} \leq \mu \leq 105.676^{\circ}\text{C}, 7.503^{\circ}\text{C} \leq \sigma \leq 9.621^{\circ}\text{C}]$

Příklad 11. Předpokládáme, že vlhkost stavebního materiálu má normální rozdělení. Určete 99%-ní intervalový odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky vlhkosti. Naměřené údaje jsou v příkladu 6 kapitoly 2.1.
 $[22.390\% \leq \mu \leq 22.582\%, 0.935\% \leq \sigma \leq 1.071\%]$

Příklad 12. Při prověřování nerovnosti povrchu vyrobené vozovky byly měřeny maximální výšky hrbolů na předem stanovených třiceti úsecích. Výsledky byly sestaveny do tabulky:

třída	změřené hodnoty v mm	n_i	třída	změřené hodnoty v mm	n_i
1.	0.5 - 1.5	1	4.	3.5 - 4.5	6
2.	1.5 - 2.5	8	5.	4.5 - 5.5	5
3.	2.5 - 3.5	9	6.	5.5 - 6.5	1

Určete

- bodový odhad směrodatné odchylky;
- 95%-ní intervalový odhad střední hodnoty;
- maximální relativní chybu odhadu μ , které se dopustíme s pravděpodobností 0.95.

[a) $\hat{\sigma} = 1.236$ mm; b) $\hat{\mu} = \bar{x} = 3.300$ mm, 2.838 mm $\leq \mu \leq 3.761$ mm; c) $\pm 13.984\%$]

Příklad 13. Na základě 100 pokusů bylo stanoveno, že na výrobu jedné stavební součástky je třeba průměrný čas 5.5 minuty, přitom byla odhadnuta směrodatná odchylka 1.70 minuty. Určete

- 90%-ní intervalový odhad střední hodnoty;
- maximální relativní chybu odhadu μ , které se dopustíme s pravděpodobností 0.9.

[a) 5.220 min $\leq \mu \leq 5.780$ min; b) $\pm 5.085\%$]

Příklad 14. Má se určit střední hodnota doby, která je potřebná k vykonání určité činnosti. Byl měřen čas u 40-ti dělníků a vypočtena průměrná hodnota 42.5 minut

a odhad směrodatné odchylky 3.8 minut. Jaké maximální chyby se dopustíme s pravděpodobností 0.99, když za odhad střední hodnoty vezmeme 42.5 minut?
[Maximální chyba je 1.548 min.]

Příklad 15. Výsledky měření konstantní veličiny v metrech jsou následující:

9.9, 12.5, 10.3, 9.2, 6.0, 10.9, 10.3, 11.8, 11.6, 9.8, 14.0.

Náhodné chyby měření mají normální rozdělení a systematické chyby neexistují. Určete

- odhad měřené veličiny a směrodatné odchylky;
- jaké hodnoty může měřená veličina maximálně nabýt s pravděpodobností 0.99;
- jaké hodnoty může směrodatná odchylka maximálně nabýt s pravděpodobností 0.99;
- pravděpodobnost toho, že absolutní hodnota chyby při určování skutečné veličiny je menší než 2% z \bar{x} .

[a) $\hat{\mu} = \bar{x} = 10.573$ m, $\hat{\sigma} = s \doteq 2.052$ m, b) $\mu \leq 12.283$ m; c) 4.057 m $\geq \sigma$; d) pomocí tabulek kvantilů 0.2, pomocí hodnoty distribuční funkce $t(10)$ [$T \sim t(10) \sim F, F(0.341) = 0.630$] 0.26]

Příklad 16. Během 16-ti měsíců byl sledován měsíční zisk určité společnosti. Byl vypočten odhad střední hodnoty 3 000 000 Kč a směrodatné odchylky 20 000 Kč. Za předpokladu, že zisk je normální náhodná veličina, určete

- 90%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku;
- s jakou pravděpodobností lze tvrdit, že
 - absolutní hodnota chyby při určování střední hodnoty nepřekročí hodnotu 10 000 Kč;
 - chyba při určení směrodatné odchylky bude menší než 2 000 Kč.

[a) 2991235 Kč $\leq \mu \leq 3008765$ Kč, 15492 Kč $\leq \sigma \leq 28746$ Kč, b) 1) pomocí tabulek kvantilů $t(15)$ 0.925, pomocí hodnot distribuční funkce $t(15)$ [$T \sim t(15) \sim F, F(2) = 0.968$] 0.936, 2) pomocí tabulek kvantilů $\chi^2(15)$ 0.4, pomocí hodnot distribuční funkce $\chi^2(15)$ $R \sim \chi^2(15) \sim G, G(18.519) = 0.764, G(12.397) = 0.341$] 0.423]

Příklad 17. Za odhad vzdálenosti k navigační značce se bere průměr měření této vzdálenosti pomocí n dálkoměrů. Náhodné chyby mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 10$ m. Kolik dálkoměrů je zapotřebí, aby chyba při určování vzdálenosti k navigační značce nepřekročila s pravděpodobností 0.90 a) 15 m, b) 10 m, c) 5 m?

[a) 2, b) 3, c) 11]

Příklad 18. Směrodatná odchylka výškoměru je $\sigma = 15$ m. Kolik musí být v letadle takových přístrojů, aby s pravděpodobností 0.99 byla chyba odhadu \bar{x} střední hodnoty výšky větší než -30m? Víme, že chyby výškoměrů mají normální rozdělení a přístroje pracují bez systematických chyb.

[Výškoměry musí být v letadle alespoň 2.]

Příklad 19. Hloubka přehrady se měří přístrojem, jehož systematická chyba je 0 a jehož náhodné chyby mají normální rozdělení se střední odchylkou $E = 0.2$ m. Kolik

nezávislých měření je nutné provést, aby se hloubka stanovila s absolutní chybou nejvýše 0.15 m s pravděpodobností 0.9?

[Střední odchylka E je číslo definované vztahem $P(|X - \mu| < E) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma \doteq 0.299$ Alespoň 11 měření.]

Příklad 20. Pro pevnost betonu v tahu za ohybu, vyráběného pro betonové vozovky, je předepsán největší přípustný variační koeficient 0.13. Jaký bude potřebný počet zkoušek náhodně vybraných vzorků, jestliže výrobní dodrží tento předpis a jestliže chyba v odhadu střední pevnosti nemá být větší než 10 % s pravděpodobností 0.95? [[Variační koeficient je číslo definované vztahem $v = \frac{\sigma}{\mu}$.] Za daných podmínek stačí vyzkoušet 7 náhodně vybraných vzorků.]

Příklad 21. Stanovte počet prodejen nutných k tomu, abyste s přesností 0.02 a s pravděpodobností 0.95 odhadli střední hodnotu stavu zásob určitého druhu zboží; variační koeficient je podle zkušeností 0.1.

[Stačí náhodně vybrat 97 prodejen.]

Příklad 22. Měření vzdálenosti od objektu je spojeno pouze s náhodnými chybami, které mají normální rozdělení. Určete kolik musíme provést měření, aby

- chyba při určení vzdálenosti byla menší než 70 m s pravděpodobností 0.9, když je známo, že směrodatná odchylka chyby měření je 100 m;
- relativní chyba při určení vzdálenosti byla menší než 20% s pravděpodobností 0.90, když víte, že variační koeficient je 0.2.

[a) Alespoň 6 měření. b) Alespoň 3 měření.]

Příklad 23. Řešte příklad 22 v situaci, kdy neznáte uváděné číselné charakteristiky,

ale znáte pouze jejich bodové odhady, tj. $\hat{v} = \frac{\sqrt{\frac{n-1}{n}}s}{\bar{x}} = 0.2$ - tzv. výběrový variační koeficient, $\hat{\sigma} = s = 100$ m.

[a) Alespoň 8 měření. b) Alespoň 6 měření.]

Příklad 24. Řešte příklad 20 v případě, že neznáte variační koeficient, ale 0.13 je pouze jeho odhad.

[V tomto případě je třeba 10 zkoušek náhodně vybraných vzorků.]

Příklad 25. Určete potřebný rozsah n výběru, abychom s pravděpodobností 0.95 zaručili maximální relativní chybu odhadu střední hodnoty $\pm 5\%$, jestliže známe odhad variačního koeficientu \hat{v} a) $\hat{v} = 0.05$; b) $\hat{v} = 0.10$.

[Potřebný rozsah výběru je a) $n \geq 7$; b) $n \geq 19$.]

Příklad 26. Během 53 dnů byly registrovány počty nehod za den. Výsledky jsou v následující tabulce:

počet nehod	0	1	2	3	4	5	6
n_i	11	18	12	7	2	2	1

- Určete odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky počtu nehod za den.
- Určete 95%-ní interval spolehlivosti pro parametr λ , když víte, že počet nehod za den má Poissonovo rozdělení s parametrem λ .
- Můžeme v tomto případě použít 95%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení?

[a) $\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 1.642, \hat{\sigma} = s \doteq 1.415$; b) [100(1 - α)% - ní interval spolehlivosti pro parametr λ Poissonova rozdělení je $\left\langle \frac{\chi^2(2n\bar{X}; \alpha_1)}{2n}; \frac{\chi^2(2n\bar{X} + 2; 1 - \alpha_2)}{2n} \right\rangle$, kde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$] (1.310; 2.020); c) Ano, protože $n > 30$ a $\lambda = E[Po(\lambda)]$, dostaneme (1.261; 2.023) .]

Příklad 27. Prohlídkou $n = 25$ tabulí skla bylo zjištěno, že 17 tabulí je bez kazu (bubliny), 4 tabule mají jeden kaz, 1 tabule dva, 2 tabule tři a 1 tabule pět kazů. Předpokládáme, že počet kazů v tabuli má Poissonovo rozdělení s parametrem λ .

- Určete 95% - ní intervalový odhad střední hodnoty počtu kazů v tabuli skla.
- Lze v tomto případě použít 95% - ní intervalový odhad střední hodnoty normálního rozdělení?

[$\hat{\lambda} = \hat{\mu} = \bar{x} = 0.680$. a) $0.388 \leq \lambda \leq 1.079$; b) ne]

Příklad 28. Při sledování doby do poruchy (v hodinách) určitého zařízení se získalo následujících 8 údajů: 48, 16, 75, 29, 96, 67, 89, 22. Určete:

- odhad střední doby do poruchy;
- 95% - ní intervalový odhad střední doby do poruchy, když víte, že doba do

poruchy X má exponenciální rozdělení s parametrem δ , tj. $X \sim f(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}}$ pro $x \geq 0$;

- 95% - ní intervalový odhad pravděpodobnosti, že zařízení bude pracovat bez poruchy po dobu alespoň 50 hodin;
- minimální spolehlivost (pravděpodobnost), že zařízení bude pracovat bez poruchy po dobu alespoň 50 hodin.

[a) $\hat{\mu} = \bar{x} = 55.250$ hod; b) [$E(X) = \delta$, 100(1 - α)% - ní interval spolehlivosti pro parametr δ exponenciálního rozdělení je $\left\langle \frac{2n\bar{X}}{\chi^2(2n; 1 - \alpha_1)}; \frac{2n\bar{X}}{\chi^2(2n; \alpha_2)} \right\rangle$, kde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$] 30.641 hod $\leq \delta \leq$ 133.777 hod; c) $0.196 \leq p \leq 0.688$; d) $p \geq 0.405$]

Příklad 29. Na určitém místě dálnice bylo v danou dobu sledováno časové rozpětí v sekundách mezi po sobě jedoucími auty. Výsledky jsou v následující tabulce:

třída	změřené hodnoty v sec	n_i	třída	změřené hodnoty v sec	n_i
1.	0 - 2	43	9.	16 - 18	10
2.	2 - 4	34	10.	18 - 20	6
3.	4 - 6	26	11.	20 - 22	2
4.	6 - 8	28	12.	22 - 24	1
5.	8 - 10	22	13.	24 - 26	1
6.	10 - 12	20	14.	26 - 28	2
7.	12 - 14	9	15.	28 - 30	3
8.	14 - 16	6	16.	30 - 32	1

Víme, že časové rozpětí mezi po sobě jedoucími auty má přibližně exponenciální rozdělení s parametrem δ . Jaké minimální časové rozpětí mezi auty lze očekávat s pravděpodobností 0.95?

[$\hat{\mu} = \hat{\delta} = \bar{x} \doteq 7.673$, $\hat{\sigma} = s \doteq 6.456$. Pomocí intervalového odhadu pro parametr δ exponenciálního rozdělení $\delta \geq 6.885$ sec, pomocí aproximace normálním rozdělením $\delta = \mu \geq 6.947$ sec.]

2.3 TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

Příklad 1. Pro kontrolu správnosti nastavení měřicího přístroje, bylo provedeno 10 zkušebních měření se správnou hodnotou $\mu_0 = 15.20$. Byly získány tyto výsledky:

15.23, 15.21, 15.19, 15.16, 15.26, 15.22, 15.23, 15.26, 15.23, 15.29.

Předpokládáme, že chyba měření má normální rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je chyba měření zatížena systematickou chybou.

[$\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 15.228$, $\hat{\sigma} = s \doteq 0.037$, $r = 2.393$. Měřicí přístroj vykazuje systematické chyby. Riziko omylu je 5 %.]

Příklad 2. Pro daný materiál je předepsaná horní mez variability pevnosti. Žádá se, aby směrodatná odchylka pevnosti materiálu nepřekročila hodnotu $\sigma = 6$ MPa. Pevnost má přibližně normální rozdělení. Při zkoušce $n = 16$ vzorků byly zjištěny tyto výsledky:

22.2, 35.4, 23.7, 16.6, 47.4, 48.2, 32.1, 54.4,

32.3, 47.9, 48.5, 40.5, 34.8, 38.9, 49.0, 53.7.

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda materiál vyhovuje normě.

[$\hat{\sigma}^2 = s^2 \doteq 134.747$ MPa, $r = 56, 145$. Výsledky potvrzují vyšší nestejnomyšlnost, než je požadováno.]

Příklad 3. Předpokládejme, že pevnost betonu je normální náhodná veličina. Norma předepisuje v daných podmínkách

a) minimální průměrnou pevnost 25 MPa;

b) minimální průměrnou pevnost 24 MPa.

Určete, zda beton vyhovuje normě. Přípustné riziko omylu je maximálně 1 %. Naměřené hodnoty jsou v příkladu 8. kapitoly 2.1.

[a) $r \doteq 1.192$. Naměřené výsledky neumožňují rozhodnout, zda materiál vyhovuje normě. b) $r \doteq 4.415$. Materiál vyhovuje normě. Riziko omylu je maximálně 1%.]

Příklad 4. Pro určení přesnosti dálkoměru byla desetkrát změřena vzdálenost, jejíž skutečná hodnota je 20 km. Získali jsme následující výsledky v km :

21.1, 21.2, 20.9, 21.0, 21.5, 21.5, 21.0, 20.8, 20.9, 21.0.

Zjistěte na hladině významnosti 0.05, zda je přesnost dálkoměru vyjádřená směrodatnou odchylkou menší než 0.5 km. Předpokládáme, že chyba měření je normální náhodná veličina se střední hodnotou 1 km.

[$\widehat{\sigma}^2 = s_0^2 = 0.061 \text{ km}^2$, $r = 2.440$. Přesnost dálkoměru je menší než 0.5 km. Riziko omylu je maximálně 5 %.]

Příklad 5. Mnohonásobným měřením bylo zjišťováno zatížení F určitého silničního mostu (při měřící jednotce 10 Pa). Bylo zjištěno:

$F[10Pa]$	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
n_i	0	3	18	30	25	15	7	2	1	0	0

Předpokládáme, že zatížení má přibližně normální rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda

a) střední zatížení mostu je menší než 4 500 Pa respektive 5 000 Pa;

b) směrodatná odchylka zatížení je menší než 700 Pa.

[$\widehat{\mu} = \bar{x} \doteq 4821.78 \text{ Pa}$, $\widehat{\sigma} = s \doteq 694.93 \text{ Pa}$. a) $r \doteq 4.653$ respektive $r \doteq -2.577$ Zatížení je větší než 4 500 Pa respektive menší než 5 000 Pa. Rizika omylů jsou 5 %. b) $r \doteq 98.557$. Hypotézu nezamítáme.]

Příklad 6. Kabel má mít nominální pevnost v tahu 310 MPa. Víme, že pevnost kabelu má známou směrodatnou odchylku 20 MPa. Z padesáti vzorků byla spočtena průměrná hodnota pevnosti 302 MPa. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda materiál vyhovuje normě.

[$r \doteq -2.828$. Materiál normě nevyhovuje.]

Příklad 7. Měřicí přístroj nevykazuje systematické chyby. Při měření konstantní veličiny jsme zjistily následující chyby měření:

třída		n_i	třída		n_i
1.	-0.3 - -0.2	1	4.	0.1 - 0.2	9
2.	-0.2 - -0.1	8	5.	0.2 - 0.3	0
3.	-0.1 - 0.1	12			

Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda je přesnost přístroje vyjádřená směrodatnou odchylkou 0.5 resp. 0.75.

[$\widehat{\sigma}^2 = s_0^2 \doteq 0.683$, $r \doteq 81.960$ resp $r \doteq 36.427$. Přesnost dálkoměru není 0.5. Riziko omylu je maximálně 1 %. Hypotézu, že přesnost dálkoměru je 0.75 nezamítáme.]

Příklad 8. V loňském roce byl průměrný měsíční zisk určité společnosti 3 miliony Kč. V prvních šesti měsících letošního roku byly zjištěny následující měsíční zisky v milionech Kč: 2, 1.5, 6, 5, 3, 3. Za předpokladu, že měsíční zisk je normální náhodná veličina, zjistěte, zda lze očekávat v letošním roce zvýšení měsíčního zisku. Hladinu významnosti testu volte 0.01.

$[\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 3.417 \cdot 10^6 \text{ Kč}, \hat{\sigma} = s \doteq 1.744 \cdot 10^6 \text{ Kč}, r \doteq 0.586.$ Zjištěná data neumožňují rozhodnout o zvýšení (ani snížení) měsíčního zisku.]

Příklad 9. U čtrnácti vzorků zeminy, odebraných ze základů budoucí stavby byl zjištěn obsah agresivních látek (v %):

42, 12, 12, 51, 12, 12, 25, 21, 53, 54, 11, 21, 11, 55.

Předpokládáme, že obsah agresivních látek má přibližně normální rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda je obsah agresivních látek maximálně 20 %.

$[\hat{\mu} = \bar{x} = 28\%, \hat{\sigma} = s \doteq 18.531\%, r \doteq 1.615.$ Hypotézu nezamítáme.]

Příklad 10. Při dopravním průzkumu byl na určité křižovatce sledován počet vozidel, čekajících na zelené světlo. Výsledky jsou v následující tabulce:

počet čekajících vozidel	0	1	2	3	4	5	6	7
počet případů	0	5	6	18	25	30	13	3

Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda je střední počet čekajících aut 3.

$[\hat{\mu} = \bar{x} = 4.2, \hat{\sigma} = s \doteq 1.393, r \doteq 8.615.$ Hypotézu zamítáme. Riziko omylu je přibližně 1 %.]

Příklad 11. Při odběru třiceti vzorků posypového materiálu na dálnici byl získán následující soubor poměrných hodnot obsahu určité chemikálie vzhledem k normovanému předpisu:

0.91, 1.08, 0.72, 1.07, 1.14, 0.62, 1.06, 1.20, 0.76, 1.19,

0.96, 0.73, 0.83, 0.55, 0.79, 1.34, 0.60, 1.19, 1.35, 1.13,

0.67, 0.77, 0.48, 0.83, 1.78, 2.25, 1.21, 0.89, 0.83, 1.07.

Předpokládáme, že realizace pochází z normálního rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda

a) střední hodnota obsahu je menší než 0.9;

b) směrodatná odchylka obsahu je menší než 0.4.

$[\hat{\mu} = \bar{x} = 1.000, \hat{\sigma} \doteq 0.368.$ a) $r \doteq 1.488.$ Hypotézu nezamítáme. b) $r \doteq 24.546.$ Hypotézu nezamítáme.]

Příklad 12. Obsah nečistot v odpadních vodách má normální rozdělení. Při vypouštění odpadních vod se požaduje, aby střední hodnota obsahu nečistot nepřekročila 0.24. Z 11 zkoušek byl vypočten odhad střední hodnoty 0.20 a směrodatné odchylky $3 \cdot 10^{-2}$. Určete, zda je požadavek splněn. Přípustné riziko omylu je 1 %.

$[r \doteq -4.422.$ Hypotézu přijímáme.]

Příklad 13. Při hodnocení jakosti bytové výstavby se sledoval počet vad v jednotlivých bytech (podle daných pravidel se mohlo v každém bytě zjistit od nuly do devíti

vad). V 297 kontrolovaných bytech se obdržely výsledky podle následující tabulky:

počet vad	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet bytů	22	45	57	70	32	20	17	16	12	6

Ověřte na hladině významnosti 0.05 resp. 0.01, zda je střední počet vad menší než 3.

[$\hat{\mu} = \bar{x} = 3.236$, $\hat{\sigma} = s = 2.217$, $r = 1.835$. Na hladině významnosti 0.01 hypotézu nezamítáme, na hladině významnosti 0.05 hypotézu zamítáme.]

Příklad 14. Dlouhodobým statistickým šetřením bylo zjištěno, že průměrná rychlost autobusové linky je 40 kmh^{-1} . Po změně trasy byly zjištěny následující průměrné rychlosti (v kmh^{-1}): 41, 35, 42, 39, 43, 45, 45, 42. Předpokládáme, že průměrná rychlost je normální náhodná veličina. Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda změna trasy vede ke zvýšení průměrné rychlosti.

[$\hat{\mu} = \bar{x} = 41.5 \text{ kmh}^{-1}$, $\hat{\sigma} = s \doteq 3.295 \text{ kmh}^{-1}$, $r \doteq 1.288$. Nelze rozhodnout.]

Příklad 15. Pevnost materiálu vyráběného starou technologií má střední hodnotu 30 MPa a směrodatnou odchylku 1.2 MPa. Po změně technologie byl ze sta vzorků vypočítán odhad střední hodnoty 31 MPa a směrodatné odchylky 0.9 MPa. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda se

- a) pevnost materiálu nezmění
- b) směrodatná odchylka pevnosti zmenší.

Přípustné riziko omylu je 1 %.

[a) $r \doteq 11.111$. Hypotézu zamítáme. b) $r \doteq 55.69$. Hypotézu nezamítáme.]

Příklad 16. Z náhodného výběru o rozsahu $n=16$ výsledků zkoušek krychelné pevnosti betonu třídy B 20 z určité výroby byl zjištěn průměr 28.8 MPa. Z předchozí zkušenosti je známo, že pevnost je normální náhodná veličina se známou směrodatnou odchylkou 4.20 MPa. Na hladině významnosti 0.05 máme testovat hypotézu, že daná výroba dodržuje střední krychelnou pevnost 31 MPa.

[$r = -2.095$. Testovaná hypotéza se nezamítá.]

Příklad 17. Řešte předchozí příklad v situaci, kdy neznáte směrodatnou odchylku, ale víte, že 4.20 MPa je pouze odhad směrodatné odchylky.

[$r = 2.096$. Testovaná hypotéza se zamítá.]

Příklad 18. Při výrobě stěnových panelů se předpokládá, že směrodatná odchylka jejich výšky je 3 mm. Z dvaceti náhodně vybraných panelů byla odhadnuta směrodatná odchylka a) $\hat{\sigma} = s = 1.71 \text{ mm}$; b) $\hat{\sigma} = s = 3.64 \text{ mm}$. Předpokládáme, že výška panelů má přibližně normální rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda je směrodatná odchylka skutečně 3 mm.

[a) $r \doteq 6.173$. Testovaná hypotéza se zamítá. b) $r \doteq 27.971$. Testovaná hypotéza se nezamítá.]

Příklad 19. Krychelná pevnost betonu třídy B 40 se zkoušela na $n = 16$ sadách

krychlí jednak určitou nedestruktivní metodou, jednak destruktivně. Výsledné hodnoty jsou zapsány v následující tabulce:

nedestruktivní metoda x_{1i}	destruktivní metoda x_{2i}	nedestruktivní metoda x_{1i}	destruktivní metoda x_{2i}
56.6	51.8	47.7	49.8
53.9	51.0	50.7	51.1
60.5	57.1	53.0	49.7
59.0	61.6	56.0	59.3
61.0	59.8	60.0	58.2
59.3	53.5	63.6	59.7
43.8	45.5	53.3	54.6
57.1	60.7	52.0	47.8

Předpokládáme, že krychelná pevnost má normální rozdělení. Máme se přesvědčit o tom, že výsledky podle nedestruktivní metody se v průměru jen náhodně liší od destruktivních zkoušek, a to na hladině významnosti 0.05.

[$x_i = x_{1i} - x_{2i}$, $\hat{\mu} = \bar{x} = 1.019$ MPa, $\hat{\sigma} = s = 3.144$ MPa, $r \doteq 1.296$. Hypotézu nezamítáme.]

Příklad 20. Kromě dosud užívané metody A byla navržena rychlejší a ekonomičtější metoda B. Na základě provedených měření oběma metodami na osmi vzorcích (viz. tabulka) se má ověřit na hladině významnosti 0.01, zda jsou obě metody vzájemně zastupitelné.

metoda A (x_{1i})	51.5	54.9	52.2	53.3	51.6	54.1	54.2	53.3
metoda B (x_{2i})	49.2	53.3	50.6	52.0	46.8	50.5	52.1	53.0

[$x_i = x_{1i} - x_{2i}$, $\hat{\mu} = \bar{x} = 2.200$, $\hat{\sigma} = s = 1.408$, $r \doteq 4.419$. Zjištěné rozdíly nejsou náhodné. Metody A a B nejsou zastupitelné.]

Příklad 21. Před seřizením linky byla pravděpodobnost výroby výrobku I. jakosti $\frac{1}{4}$. Po seřizení linky bylo z dvaceti výrobků více než 8 jakostních. Zvýšila se pravděpodobnost výroby výrobku I. jakosti?

[Ano, riziko omylu je maximálně 4.1%.]

Příklad 22. Reklama slibuje, že nový čisticí výrobek vyčistí alespoň 70% skvrn. K ověření tohoto tvrzení bude čištěno 12 skvrn. V případě, že se jich vyčistí méně než 11, akceptujeme tvrzení, že $p=0.7$, v opačném případě tvrzení, $p > 0.7$. Určete:

- pravděpodobnost α mylného přijetí hypotézy $p > 0.7$;
- pravděpodobnost β mylného přijetí hypotézy $p = 0.7$ v neprospěch alternativní hypotézy $p = 0.9$.

[a) $\alpha = 0.085$; b) $\beta \doteq 0.341$]

Příklad 23. Anketou se má zjistit, zda voliči souhlasí se zvýšením daní. Bude náhodně vybráno 400 voličů. Jestliže více než 220, ale méně než 260 lidí bude souhlasit se zvýšením daně, bude proveden závěr, že 60% voličů souhlasí. Určete:

- a) pravděpodobnost α mylného zamítnutí nulové hypotézy;
- b) pravděpodobnost β mylného přijetí nulové hypotézy, jestliže ve skutečnosti souhlasí 48% voličů.

[a) $\alpha \doteq 0.0414$; b) $\beta \doteq 0.0026$]

Příklad 24. Má se vyvinout nová technologie určitého materiálu tak, aby střední hodnota pevnosti byla 500 MPa a směrodatná odchylka 12 MPa. Předpokládáme, že pevnost materiálu je normální náhodná veličina. Bude vybráno 50 vzorků materiálu, jestliže $\bar{x} < 497$ MPa, zamítáme hypotézu, že je střední hodnota 500 MPa. Určete:

- a) pravděpodobnost α mylného zamítnutí nulové hypotézy;
- b) pravděpodobnost β mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch alternativní hypotézy $\mu = 497$ MPa resp. $\mu = 496$ MPa.

[a) $\alpha \doteq 0.038$; b) $\beta = 0.5$, $\beta \doteq 0.278$]

Příklad 25. Realizace náhodného výběru z normálního rozdělení se známým rozptylem 0.074 je

1.1, 0.9, 1.1, 0.9, 0.8, 0.8, 0.9, 1.2, 1.8, 1.7,
1.0, 1.0, 0.8, 1.0, 1.0, 1.0, 0.8, 0.9, 0.9, 1.2.

- a) Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je skutečná střední hodnota 1.0, když jistě víte, že je větší nebo rovna 1.0.

- b) V případě, že nezamítnete nulovou hypotézu, určete:

- 1) riziko jejího mylného přijetí za předpokladu, že by skutečná střední hodnota byla 1.1;
- 2) rozsah výběru tak, aby riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy $\mu = 1.1$ bylo maximálně 5%.

[a) $\hat{\mu} = \bar{x} = 1.04$, $r \doteq 0.658$. Nulovou hypotézu nezamítáme. b1) 16.9%; b2) Alespoň 80 měření.]

Příklad 26. Máme testovat hypotézu, že střední hodnota pytle cementu je 50 kg proti hypotéze, že je menší než 50 kg na hladině významnosti 0.05. Ví se, že váha je normální náhodná veličina se známou směrodatnou odchylkou 0.9 kg. Určete rozsah náhodného výběru tak, aby riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy, že skutečná váha je 49 kg, bylo maximálně 0.05 respektive 0.01.

[Alespoň 9 měření, resp. alespoň 13 měření.]

Příklad 27. Řešte příklad 25 v případě, že neznáte rozptyl.

[a) $r \doteq 1.040$. Nulovou hypotézu nezamítáme. b) 25.6%; c) Alespoň 81 měření.]

Příklad 28. Řešte příklad 26 v případě, že neznáte směrodatnou odchylku, ale 0.9 je pouze odhad směrodatné odchylky.

[Alespoň 11 měření, resp. alespoň 16 měření.]

Příklad 29. Byla provedena realizace náhodného výběru o rozsahu $n=9$ z normálního rozdělení se známým rozptylem 25 a vypočten $\bar{x} = 1.3$.

- a) Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je skutečná střední hodnota menší než 2.

- b) V případě, že nezamítnete nulovou hypotézu, určete
- 1) riziko jejího mylného přijetí v neprospěch hypotézy $\mu = 4$;
 - 2) rozsah výběru tak, aby riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy $\mu = 4$, bylo maximálně 5%.

[a) $r = -0.420$. Hypotézu nezamítáme. b1) 0.672; b2) Alespoň 68 měření.]

Příklad 30. V příkladě 9 určete

- a) riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy $\mu = 21\%$;
- b) počet zkoušek tak, aby riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy $\mu = 21\%$, bylo maximálně 1%.

[a) $\beta = 92.6\%$; b) Alespoň 7 432 měření.]

Příklad 31. Ze základního souboru s normálním rozdělením jsme provedli náhodný výběr o rozsahu $n=10$ a vypočítali odhad rozptylu 1.5.

- a) Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je skutečný rozptyl maximálně 1.
- b) V případě, že nezamítnete nulovou hypotézu, určete
 - 1) riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy $\sigma^2 = 2$;
 - 2) rozsah výběru tak, aby riziko mylného přijetí nulové hypotézy v neprospěch hypotézy $\sigma^2 = 2$, bylo maximálně 1%.

[a) $r \doteq 13.5$. Nulovou hypotézu nezamítáme. b) 57.3 %; c) Alespoň 36 měření.]

Příklad 32. Dlouhodobým sledováním je zjištěno, že při ustálených výrobních podmínkách má počet kazů na jeden běžný metr izolačního materiálu určité šíře Poissonovo rozdělení. Při prohlídce 15 m bylo nalezeno 7 kazů. Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je průměrný počet kazů maximálně 0.2 (tj. v průměru nepřipadá více než 1 kaz na každých 5 metrů).

[[$X \sim Po(\lambda)$, $E(X) = \lambda$, , pro testy hypotéz o střední hodnotě λ Poissonova rozdělení lze použít testovací kritérium $R = \bar{X}$ a pro test $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ proti $H : \lambda > \lambda_0$, na hladině významnosti α je kritický obor $W = \{\bar{x} : \chi^2(2n\bar{x}; \alpha) > 2n\lambda_0\}$], pro test $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ proti $H : \lambda < \lambda_0$, na hladině významnosti α je kritický obor $W = \{\bar{x} : \chi^2(2n\bar{x} + 2; 1 - \alpha) < 2n\lambda_0\}$] $\lambda_0 = 0.2$, $r = \bar{x} = 7/15$. Hypotézu zamítáme. Střední hodnota počtu kazů na 1 m je větší než 0.2.]

Příklad 33. Během pokusu, který trval 15 hodin, bylo v šesti přístrojích téhož typu zaznamenáno 12 poruch. Předpokládáme, že počet poruch takového přístroje během 15 hodin má Poissonovo rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda je střední počet poruch přístroje během 15 hodin menší než a) 3, b) 4.

[$r = \bar{x} = 2$. a) Hypotézu nezamítáme, ale také nepřijímáme. b) Hypotézu přijímáme. Riziko omylu je 1%.]

Příklad 34. Předpokládáme, že počet vozidel, které čekají na zelené světlo má Poissonovo rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda lze očekávat, že na zelené světlo bude čekat maximálně 5 vozidel. Naměřené hodnoty jsou v Příkladu 10. Lze použít testy o střední hodnotě normálního rozdělení? [Ano, $r = -5.743$. Hypotézu přijímáme, riziko omylu je přibližně 1%. Pomocí střední hodnoty Poissonova rozdělení, $r = \bar{x} = 4.2$, hypotézu přijímáme, riziko omylu je maximálně 1%.]

Příklad 35. Při sledování doby bezporuchového chodu určitého zařízení byly zjištěny následující výsledky (v hodinách):

155, 214, 1, 150, 180, 250, 255, 315, 290, 210.

Předpokládáme, že bezporuchový chod má exponenciální rozdělení s parametrem δ . Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je střední doba bezporuchového chodu větší než a) 120 h; b) 150 h.

[[$X \sim E(0, \delta)$, $E(X) = \delta$, za testovací kritérium pro testy o střední hodnotě δ exponenciálního rozdělení lze použít statistiku $R = \bar{X}$, pro test $H_0 : \delta \leq \delta_0$ proti $H : \delta > \delta_0$ na hladině významnosti α je kritický obor $W = \{\bar{x} : \bar{x} > \frac{\delta_0}{2n} \chi^2(2n; 1 - \alpha)\}$ a pro test $H_0 : \delta \geq \delta_0$ proti $H : \delta < \delta_0$ je kritický obor $W = \{\bar{x} : \bar{x} < \frac{\delta_0}{2n} \chi^2(2n; \alpha)\}$] $r = \bar{x} = 202$. a) Hypotézu přijímáme. b) Nelze rozhodnout.]

Příklad 36. Předpokládáme, že o určitém výrobku je známo, že jeho doba života má exponenciální rozdělení s parametrem δ , kde δ závisí na konkrétních podmínkách výroby a provozu. Dvaceti zkouškami se má ověřit, zda alespoň 90 % výrobků má dobu života větší než 200 hodin. Kdy zamítneme tuto hypotézu na hladině významnosti 0.05?

[[$X \sim E(0, \delta)$, $H_0 : P(X \geq 200) \geq 0.9 \Leftrightarrow H'_0 : \delta \geq \delta_0 = \frac{-200}{\ln 0.9}$] Hypotézu zamítneme, když $\bar{x} < 1244.869$ hod.]

2.4 TESTY DOBRÉ SHODY

Příklad 1. Házeli jsme dvěma hracími kostkami

a) první 120-krát a získali následující výsledky

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	20	22	17	18	19	24

b) druhou jsme házeli 180-krát a dostali jsme

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	28	36	42	30	27	17

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda jsou hrací kostky falešné.

[a) $r = 1.7$. Není dostatečný důvod zamítnout hypotézu, že hrací kostka není falešná.; b) $r = 12.07$. Hrací kostka je falešná. Riziko omylu je maximálně 5%.]

Příklad 2. Mezi 100 výrobky je 63 I. jakosti a 37 II. jakosti. Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je pravděpodobnost výroby výrobku I. jakosti 0.75.

[$r = 7.68$. Není.]

Příklad 3. Výrobce tvrdí, že 50% výrobků je I. jakosti, 20% II. jakosti, 20% III. jakosti a 10% IV. jakosti. Náhodně bylo vybráno 500 výrobků, z toho bylo 269 I.

jakosti, 112 II. jakosti, 74 III. jakosti a 45 IV. jakosti. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda má výrobce pravdu.

[$r = 10.144$. Hypotézu nezamítáme.]

Příklad 4. Při testu bylo bodováno 5 příkladů podle tabulky

příklad	1	2	3	4	5
body	14	18	32	20	16

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda je bodování rovnoměrné.

[$r = 10$. Bodování není rovnoměrné - tím není řečeno, že je nesprávné.]

Příklad 5. Z balíčku 32 karet postupně vytahujeme 4 karty a každou vrátíme zpět. Nechť X je počet vytažených es mezi čtyřmi vytaženými kartami. Pokus jsme opakovali 80-krát a dostali jsme:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	46	28	6	0	0

Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda jsou v balíčku skutečně čtyři esa.

[$r = 0.086$. Nezamítáme hypotézu.]

Příklad 6. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda má náhodná veličina X hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 + x & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases}$$

Realizace náhodného výběru z X byla roztríděna následovně:

třída		n_i	třída		n_i
1.	-1.0 - -0.6	5	4.	0.2 - 0.6	27
2.	-0.6 - -0.2	20	5.	0.6 - 1.0	8
3.	-0.2 - 0.2	40			

[$r \doteq 2.611$. Nezamítáme nulovou hypotézu.]

Příklad 7. Realizace náhodného výběru byla roztríděna následovně:

třída		n_i	třída		n_i
1.	1.0 - 1.5	1	4.	2.5 - 3.0	6
2.	1.5 - 2.0	4	5.	3.0 - 3.5	6
3.	2.0 - 2.5	5	6.	3.5 - 4.0	18

Ověřte, zda realizace pochází z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{2}{9}(x - 1) \quad \text{pro } x \in \langle 1, 4 \rangle.$$

Riziko přípustného omylu je maximálně 5%.
 [$r \doteq 4.863$. Hypotéza o shodě dat se nezamítá.]

Příklad 8. Realizace náhodného výběru byla roztríděna následovně:

třída		n_i	třída		n_i
1.	0.0 - 0.1	0	6.	0.5 - 0.6	2
2.	0.1 - 0.2	0	7.	0.6 - 0.7	6
3.	0.2 - 0.3	0	8.	0.7 - 0.8	35
4.	0.3 - 0.4	1	9.	0.8 - 0.9	60
5.	0.4 - 0.5	1	10.	0.9 - 1.0	95

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda realizace pochází z rozdělení

$$f(x) = ax^2 \quad \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

[$a = 3$, $r \doteq 87.559$. Realizace nepochází z rozdělení s uvedenou hustotou. Riziko omylu je 5%.]

Příklad 9. Realizace náhodného výběru byla roztríděna následovně:

třída		n_i	třída		n_i
1.	0.0 - 0.2	0	4.	0.6 - 0.8	4
2.	0.2 - 0.4	1	5.	0.8 - 1.0	6
3.	0.4 - 0.6	2			

Testujte na hladině významnosti 0.05 hypotézu $H_0 : X \sim F(x) = x^2$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
 [Pearsonův χ^2 -test nelze použít. Museli bychom použít jiný test dobré shody - např. Kolmogorovův.]

Příklad 10. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda má náhodná veličina X distribuční funkci

$$F(x) = a + bx^2 \quad \text{pro } x \in \langle -2, 0 \rangle.$$

Realizace náhodného výběru z X byla roztríděna následovně:

třída		n_i
1.	-2.0 - -1.5	37
2.	-1.5 - -1.0	39
3.	-1.0 - -0.5	8
4.	-0.5 - 0.0	1

[$a = 1$, $b = -\frac{1}{4}$, $r \doteq 13.279$. Hypotézu zamítáme.]

Příklad 11. V příkladě 10. kap. 2.2 jsme předpokládali, že náhodný výběr pochází z normálního rozdělení. Ověřte tuto hypotézu na hladině významnosti 0.05.
 [$r \doteq 4.007$. Nezamítáme shodu s normálním rozdělením.]

Příklad 12. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda naměřené hodnoty z příkladu 11. kap 2.2 potvrzují shodu s normálním rozdělením s parametry 22.75 a 1. [$r \doteq 50.596$. Naměřená data nepotvrzují shodu s rozdělením $N(22.75,1)$. Riziko omylu je 1%.]

Příklad 13. Byly zjišťovány průměrné denní teploty vzduchu po 720 dní. Výsledky pozorování jsou uvedeny v tabulce:

třída	teplota v °C	n_i	třída	teplota v °C	n_i
1.	-30 - -20	10	5.	10 - 20	191
2.	-20 - -10	73	6.	20 - 30	95
3.	-10 - 0	135	7.	30 - 40	4
4.	0 - 10	212			

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda mají průměrné teploty

- normální rozdělení;
- trojúhelníkové rozdělení, jestliže minimální průměrná denní teplota byla -25 °C, maximální byla 35 °C.

[a) $\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 6.139$ °C, $\hat{\sigma} = s \doteq 12.451$ °C, $r \doteq 26.686$. Zamítáme shodu s normálním rozdělením. b) [náhodná veličina X má trojúhelníkové rozdělení s parametry a , c , b , jestliže má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{pro } a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{pro } c < x \leq b \end{cases}, \quad E(X) = \frac{a+b+c}{3} \quad \hat{a} = \min_i x_i = -25 \text{ °C}, \quad \hat{b} = \max_i x_i = 35 \text{ °C}, \quad \hat{c} = 3\hat{\mu} - \hat{a} - \hat{b} = 8.417 \text{ °C}, \quad r \doteq 6.218. \text{ Nezamítáme shodu s trojúhelníkovým rozdělením.}]$$

Příklad 14. Byly zjišťovány počty kazů v 1 m² materiálu. Výsledky jsou v následující tabulce:

třída	počet kazů	n_i	třída	počet kazů	n_i
1.	0	229	4.	3	35
2.	1	211	5.	4	7
3.	2	93	6.	≥ 5	1

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda data odpovídají Poissonovu rozdělení.

[[$E[Po(\lambda)] = \lambda$, $\hat{\lambda} = 0.929$.] $r \doteq 1.172$. Hypotézu o shodě s Poissonovým rozdělením nezamítáme.]

Příklad 15. V příkladu 29. kap.2. 2 jsme předpokládali, že časové rozpětí mezi projíždějícími auty má exponenciální rozdělení. Ověřte na hladině významnosti 0.01, zda naměřená data odpovídají této hypotéze.

[$r \doteq 12.882$. Hypotéza o shodě s exponenciálním rozdělením se nezamítá - odchylky nejsou statisticky významné.]

Příklad 16. K výpočtu zatížení stavební konstrukce je třeba znát maximální rychlost větru. V meteorologické stanici bylo v letech 1981-1991 změřeno 120 hodnot měsíční maximální rychlosti větru. Výsledky v ms^{-1} jsou v následující tabulce:

třída	rychlost v ms^{-1}	n_i	třída	rychlost v ms^{-1}	n_i
1.	10.5 - 12.5	5	7.	22.5 - 24.5	11
2.	12.5 - 14.5	14	8.	24.5 - 26.5	7
3.	14.5 - 16.5	23	9.	26.5 - 28.5	6
4.	16.5 - 18.5	20	10.	28.5 - 30.5	3
5.	18.5 - 20.5	16	11.	30.5 - 32.5	2
6.	20.5 - 22.5	13			

Ověřte na hladině významnosti 0.05, zda má měsíční maximální rychlost rozdělení maximálních hodnot typu I - tzv. Gumbelovo rozdělení.

$$[[X \sim Gu(\mu, \sigma) \sim F(x) = \exp\{-\exp[-\frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma}(x - \mu + \frac{E\sqrt{6}}{\pi}\sigma)]\}] \text{ pro } x \in R, \text{ kde}$$

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \ln n) \doteq 0.577 \text{ je tzv. Eulerova konstanta.}]$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \doteq 19.150 \text{ ms}^{-1}, \hat{\sigma} = s \doteq 4.772 \text{ ms}^{-1}, r \doteq 4.450. \text{ Nezamítáme shodu s Gumbelovým rozdělením.}]$$

LITERATURA

- [1] Anděl J., *Statistické metody*, MATFYZPRESS, Praha, 1993.
- [2] Benjamin J.R., Cornell C.A., *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*, McGraww-Hill Book Company, New York, 1970.
- [3] Cyhelský L., *Statistika v příkladech*, SNTL/SVTL, Praha, 1967.
- [4] Cyhelský L., Hustopecký J., Závodský P., *Příklady k teorii statistiky*, SNTA ALFA, Praha, 1978.
- [5] Dowdy S., Wearden S., *Statistics for Research*, JOHN WILEY & SONS, New York, 1983.
- [6] Dupač V., Hájek J., *Pravděpodobnost ve vědě a technice*, ČSAV, 1962.
- [7] Hebák P., Kahounová J., *Počet pravděpodobnosti v příkladech*, SNTL, Praha, 1988.
- [8] Chatfield Ch., *Statistics for technology*, CHAMPAN AND HALL, London, 1978.
- [9] Koutková H., Moll I., *Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky*, VUT, Brno, 2001.
- [10] Likeš J., Laga J., *Základní statistické tabulky*, SNTL, Praha, 1978.
- [11] Likeš J., Machek J., *Počet pravděpodobnosti. Matematika pro vysoké školy technické. Sešit X.*, SNTL, Praha, 1981.
- [12] Likeš J., Machek J., *Matematická statistika. Matematika pro vysoké školy technické. Sešit XI.*, SNTL, Praha, 1981.
- [13] Lukacs E., *Probability and mathematical statistics. An intruduction*, ACADEMIC PRESS, New York, 1972.
- [14] Miller I., Freund J.E., *Probability and Statistics for Engineers*, Prentice-Hall Mathematics Series, New Jersey, 1965.
- [15] Svěšnikov A.A., *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí*, SNTL, Praha, 1971.
- [16] Škrášek J., Tichý Z., *Základy aplikované matematiky III*, SNTL, Praha, 1990.
- [17] Vorlíček M., Holický M., Špačková M., *Pravděpodobnost a matematická statistika pro inženýry*, ČVUT, Praha, 1979.
- [18] Walpole R.E., Myers R.H., *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, MACMILLAN PUBLISHING COMPANY, New York, 1990.

Tab. 1a Hodnoty distribuční funkce $\Phi(x)$
normované normální náhodné veličiny

0.00	0.5000	0.40	0.6554	0.80	0.7881	1.20	0.8849	1.60	0.9452
0.01	0.5040	0.41	0.6591	0.81	0.7910	1.21	0.8869	1.61	0.9463
0.02	0.5080	0.42	0.6628	0.82	0.7939	1.22	0.8888	1.62	0.9474
0.03	0.5120	0.43	0.6664	0.83	0.7967	1.23	0.8907	1.63	0.9484
0.04	0.5160	0.44	0.6700	0.84	0.7995	1.24	0.8925	1.64	0.9495
0.05	0.5199	0.45	0.6736	0.85	0.8023	1.25	0.8944	1.65	0.9505
0.06	0.5239	0.46	0.6772	0.86	0.8051	1.26	0.8962	1.66	0.9515
0.07	0.5279	0.47	0.6808	0.87	0.8079	1.27	0.8980	1.67	0.9525
0.08	0.5319	0.48	0.6844	0.88	0.8106	1.28	0.8997	1.68	0.9535
0.09	0.5359	0.49	0.6879	0.89	0.8133	1.29	0.9015	1.69	0.9545
0.10	0.5398	0.50	0.6915	0.90	0.8159	1.30	0.9032	1.70	0.9554
0.11	0.5438	0.51	0.6950	0.91	0.8186	1.31	0.9049	1.71	0.9564
0.12	0.5478	0.52	0.6985	0.92	0.8212	1.32	0.9066	1.72	0.9573
0.13	0.5517	0.53	0.7019	0.93	0.8238	1.33	0.9082	1.73	0.9582
0.14	0.5557	0.54	0.7054	0.94	0.8264	1.34	0.9099	1.74	0.9591
0.15	0.5596	0.55	0.7088	0.95	0.8289	1.35	0.9115	1.75	0.9599
0.16	0.5636	0.56	0.7123	0.96	0.8315	1.36	0.9131	1.76	0.9608
0.17	0.5675	0.57	0.7157	0.97	0.8340	1.37	0.9147	1.77	0.9616
0.18	0.5714	0.58	0.7190	0.98	0.8365	1.38	0.9162	1.78	0.9625
0.19	0.5753	0.59	0.7224	0.99	0.8389	1.39	0.9177	1.79	0.9633
0.20	0.5793	0.60	0.7257	1.00	0.8413	1.40	0.9192	1.80	0.9641
0.21	0.5832	0.61	0.7291	1.01	0.8438	1.41	0.9207	1.81	0.9649
0.22	0.5871	0.62	0.7324	1.02	0.8461	1.42	0.9222	1.82	0.9656
0.23	0.5910	0.63	0.7357	1.03	0.8485	1.43	0.9236	1.83	0.9664
0.24	0.5948	0.64	0.7389	1.04	0.8508	1.44	0.9251	1.84	0.9671
0.25	0.5987	0.65	0.7422	1.05	0.8531	1.45	0.9265	1.85	0.9678
0.26	0.6026	0.66	0.7454	1.06	0.8554	1.46	0.9279	1.86	0.9686
0.27	0.6064	0.67	0.7486	1.07	0.8577	1.47	0.9292	1.87	0.9693
0.28	0.6103	0.68	0.7517	1.08	0.8599	1.48	0.9306	1.88	0.9699
0.29	0.6141	0.69	0.7549	1.09	0.8621	1.49	0.9319	1.89	0.9706
0.30	0.6179	0.70	0.7580	1.10	0.8643	1.50	0.9332	1.90	0.9712
0.31	0.6217	0.71	0.7611	1.11	0.8665	1.51	0.9345	1.91	0.9719
0.32	0.6255	0.72	0.7642	1.12	0.8686	1.52	0.9357	1.92	0.9726
0.33	0.6293	0.73	0.7673	1.13	0.8708	1.53	0.9370	1.93	0.9732
0.34	0.6331	0.74	0.7704	1.14	0.8729	1.54	0.9382	1.94	0.9738
0.35	0.6368	0.75	0.7734	1.15	0.8749	1.55	0.9394	1.95	0.9744
0.36	0.6406	0.76	0.7764	1.16	0.8770	1.56	0.9406	1.96	0.9750
0.37	0.6443	0.77	0.7794	1.17	0.8790	1.57	0.9418	1.97	0.9756
0.38	0.6480	0.78	0.7823	1.18	0.8810	1.58	0.9429	1.98	0.9761
0.39	0.6517	0.79	0.7852	1.19	0.8830	1.59	0.9441	1.99	0.9767

Tab. 1b Hodnoty distribuční funkce $\Phi(x)$
normované normální náhodné veličiny

2.00	0.9773	2.40	0.9918	2.80	0.9974	3.20	0.9993	3.60	0.9998
2.01	0.9778	2.41	0.9920	2.81	0.9975	3.21	0.9993	3.61	0.9998
2.02	0.9783	2.42	0.9922	2.82	0.9976	3.22	0.9994	3.62	0.9999
2.03	0.9788	2.43	0.9925	2.83	0.9977	3.23	0.9994	3.63	0.9999
2.04	0.9793	2.44	0.9927	2.84	0.9977	3.24	0.9994	3.64	0.9999
2.05	0.9798	2.45	0.9929	2.85	0.9978	3.25	0.9994	3.65	0.9999
2.06	0.9803	2.46	0.9931	2.86	0.9979	3.26	0.9994	3.66	0.9999
2.07	0.9808	2.47	0.9932	2.87	0.9979	3.27	0.9995	3.67	0.9999
2.08	0.9812	2.48	0.9934	2.88	0.9980	3.28	0.9995	3.68	0.9999
2.09	0.9817	2.49	0.9936	2.89	0.9981	3.29	0.9995	3.69	0.9999
2.10	0.9821	2.50	0.9938	2.90	0.9981	3.30	0.9995	3.70	0.9999
2.11	0.9826	2.51	0.9940	2.91	0.9982	3.31	0.9995	3.71	0.9999
2.12	0.9830	2.52	0.9941	2.92	0.9983	3.32	0.9996	3.72	0.9999
2.13	0.9834	2.53	0.9943	2.93	0.9983	3.33	0.9996	3.73	0.9999
2.14	0.9838	2.54	0.9945	2.94	0.9984	3.34	0.9996	3.74	0.9999
2.15	0.9842	2.55	0.9946	2.95	0.9984	3.35	0.9996	3.75	0.9999
2.16	0.9846	2.56	0.9948	2.96	0.9985	3.36	0.9996	3.76	0.9999
2.17	0.9850	2.57	0.9949	2.97	0.9985	3.37	0.9996	3.77	0.9999
2.18	0.9854	2.58	0.9951	2.98	0.9986	3.38	0.9996	3.78	0.9999
2.19	0.9857	2.59	0.9952	2.99	0.9986	3.39	0.9997	3.79	0.9999
2.20	0.9861	2.60	0.9953	3.00	0.9987	3.40	0.9997	3.80	0.9999
2.21	0.9864	2.61	0.9955	3.01	0.9987	3.41	0.9997	3.81	0.9999
2.22	0.9868	2.62	0.9956	3.02	0.9987	3.42	0.9997	3.82	0.9999
2.23	0.9871	2.63	0.9957	3.03	0.9988	3.43	0.9997	3.83	0.9999
2.24	0.9875	2.64	0.9959	3.04	0.9988	3.44	0.9997	3.84	0.9999
2.25	0.9878	2.65	0.9960	3.05	0.9989	3.45	0.9997	3.85	0.9999
2.26	0.9881	2.66	0.9961	3.06	0.9989	3.46	0.9997	3.86	0.9999
2.27	0.9884	2.67	0.9962	3.07	0.9989	3.47	0.9997	3.87	0.9999
2.28	0.9887	2.68	0.9963	3.08	0.9990	3.48	0.9997	3.88	0.9999
2.29	0.9890	2.69	0.9964	3.09	0.9990	3.49	0.9998	3.89	0.9999
2.30	0.9893	2.70	0.9965	3.10	0.9990	3.50	0.9998	3.90	1.0000
2.31	0.9896	2.71	0.9966	3.11	0.9991	3.51	0.9998	3.91	1.0000
2.32	0.9898	2.72	0.9967	3.12	0.9991	3.52	0.9998	3.92	1.0000
2.33	0.9901	2.73	0.9968	3.13	0.9991	3.53	0.9998	3.93	1.0000
2.34	0.9904	2.74	0.9969	3.14	0.9992	3.54	0.9998	3.94	1.0000
2.35	0.9906	2.75	0.9970	3.15	0.9992	3.55	0.9998	3.95	1.0000
2.36	0.9909	2.76	0.9971	3.16	0.9992	3.56	0.9998	3.96	1.0000
2.37	0.9911	2.77	0.9972	3.17	0.9992	3.57	0.9998	3.97	1.0000
2.38	0.9913	2.78	0.9973	3.18	0.9993	3.58	0.9998	3.98	1.0000
2.39	0.9916	2.79	0.9974	3.19	0.9993	3.59	0.9998	3.99	1.0000

Tab. 2 Kvantily $u(\alpha)$ normované normální náhodné veličiny

α	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
$u(\alpha)$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Tab. 3a Kvantily $\chi^2(n; \alpha)$ chí-kvadrát rozdělení

$n \backslash \alpha$	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584
4	0.207	0.292	0.484	0.711	1.064
5	0.412	0.554	0.831	1.146	1.610
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168
10	2.156	2.558	3.249	3.940	4.865
11	2.603	3.054	3.816	4.575	5.578
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547
16	5.142	5.812	6.608	7.962	9.312
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09
18	6.265	7.015	8.231	9.391	10.87
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.34
22	8.643	9.543	10.98	12.34	14.04
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85
24	9.887	10.86	12.40	13.85	15.66
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60

Tab. 3b Kvantily $\chi^2(n; \alpha)$ chí-kvadrát rozdělení

$n \backslash \alpha$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	2.706	3.842	5.024	6.635	7.879
2	4.605	5.992	7.378	9.210	10.60
3	6.251	7.815	9.348	11.35	12.84
4	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	21.06	23.69	26.12	29.14	31.32
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	36.74	40.11	43.20	46.96	49.65
28	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67

Tab. 4 Kvantily $t(n; \alpha)$ t-rozdlení

$n \backslash \alpha$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.964	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.500
8	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.813	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.625	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.584	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.540	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.520	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.320	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.705	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

DODATEK

Uvede se jako kritéria a kritická hodnota pro testy χ^2 a F s n stupni svobody $\chi^2_{\alpha, n}$ a F_{α, n_1, n_2} (tabulka 1).

Tabulka 1	Kritická hodnota $\chi^2_{\alpha, n}$	Kritická hodnota F_{α, n_1, n_2}	Poznámky
$\alpha = 0.05$	$\chi^2_{0.05, n}$	$F_{0.05, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.01$	$\chi^2_{0.01, n}$	$F_{0.01, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.10$	$\chi^2_{0.10, n}$	$F_{0.10, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.90$	$\chi^2_{0.90, n}$	$F_{0.90, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.95$	$\chi^2_{0.95, n}$	$F_{0.95, n_1, n_2}$	

Tabulka 2	Kritická hodnota $\chi^2_{\alpha, n}$	Kritická hodnota F_{α, n_1, n_2}	Poznámky
$\alpha = 0.05$	$\chi^2_{0.05, n}$	$F_{0.05, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.01$	$\chi^2_{0.01, n}$	$F_{0.01, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.10$	$\chi^2_{0.10, n}$	$F_{0.10, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.90$	$\chi^2_{0.90, n}$	$F_{0.90, n_1, n_2}$	
$\alpha = 0.95$	$\chi^2_{0.95, n}$	$F_{0.95, n_1, n_2}$	

Uvede se jako kritéria a kritická hodnota pro testy χ^2 a F s n stupni svobody $\chi^2_{\alpha, n}$ a F_{α, n_1, n_2} (tabulka 1).

Bud' (X_1, X_2, \dots, X_n) náhodný výběr z rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\alpha \in (0, 1)$ dané číslo; α_1, α_2 nezáporná čísla: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.
 Potom $100 \cdot (1 - \alpha) \%$ - ní intervalové odhady parametrů μ a σ^2 shrnuje následující tabulka :

μ	σ^2
$\left\langle \bar{X} - u(1 - \alpha_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u(1 - \alpha_2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$	známe
známe	$\left\langle \frac{n \cdot S_0^2}{\chi^2(n; 1 - \alpha_1)}, \frac{n \cdot S_0^2}{\chi^2(n; \alpha_2)} \right\rangle$
$\left\langle \bar{X} - t(n - 1; 1 - \alpha_1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t(n - 1; 1 - \alpha_2) \frac{S}{\sqrt{n}} \right\rangle$	$\left\langle \frac{(n - 1)S^2}{\chi^2(n - 1; 1 - \alpha_1)}, \frac{(n - 1)S^2}{\chi^2(n - 1; \alpha_2)} \right\rangle$

Kde $u(\gamma)$, $\chi^2(n; \gamma)$ a $t(n - 1, \gamma)$ jsou postupně $100 \cdot \gamma \%$ -ní kvantily rozdělení $N(0, 1)$, χ^2 - rozdělení s n stupni volnosti a t - rozdělení s $(n - 1)$ stupni volnosti. \bar{X} je odhad μ a $S_0^2 [S^2]$ je odhad σ^2 v případě, že μ známe [neznáme].

Volba α_1, α_2 :

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ oboustranný intervalový odhad
2. $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0$ levostranný intervalový odhad
3. $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha$ pravostranný intervalový odhad

Volba testovacího kritéria a kritického oboru pro testy hypotéz o parametrech rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ na hladině významnosti α :

Test H_0 proti H	σ^2 známé	σ^2 neznámé	μ známé	μ neznámé	testovací kritérium	kritický obor
$T_1 : \mu = \mu_0 \uparrow \mu \neq \mu_0$					$R = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$	$W_1 = \{r : r < -u(1 - \frac{\alpha}{2}) \cup r > u(1 - \frac{\alpha}{2})\}$ $W_2 = \{r : r > u(1 - \alpha)\}$ $W_3 = \{r : r < -u(1 - \alpha)\}$
$T_2 : \mu \leq \mu_0 \uparrow \mu > \mu_0$					$R = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n}$	$W_1 = \{r : r < -t(n-1; 1 - \frac{\alpha}{2}) \cup r > t(n-1; 1 - \frac{\alpha}{2})\}$ $W_2 = \{r : r > t(n-1; 1 - \alpha)\}$ $W_3 = \{r : r < -t(n-1; 1 - \alpha)\}$
$T_3 : \mu \geq \mu_0 \uparrow \mu < \mu_0$					$R = \frac{n \cdot S_0^2}{\sigma_0^2}$	$W_4 = \{r : r < \chi^2(n; \frac{\alpha}{2}) \cup r > \chi^2(n; 1 - \frac{\alpha}{2})\}$ $W_5 = \{r : r > \chi^2(n; 1 - \alpha)\}$ $W_6 = \{r : r < \chi^2(n; \alpha)\}$
$T_4 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \uparrow \sigma^2 \neq \sigma_0^2$					$R = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2}$	$W_4 = \{r : r < \chi^2(n-1; \frac{\alpha}{2}) \cup r > \chi^2(n-1; 1 - \frac{\alpha}{2})\}$ $W_5 = \{r : r > \chi^2(n-1; 1 - \alpha)\}$ $W_6 = \{r : r < \chi^2(n-1; \alpha)\}$
$T_5 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \uparrow \sigma^2 > \sigma_0^2$						
$T_6 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \uparrow \sigma^2 < \sigma_0^2$						

Pearsonův test dobré shody na hladině významnosti α :

$$R = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}; W = \{r : r > \chi^2(k - m - 1; 1 - \alpha)\}$$

podmínky použitelnosti:

- 1) $np_i \geq 5$ pro alespoň 80% i
- 2) $np_i \geq 1$ pro každé i

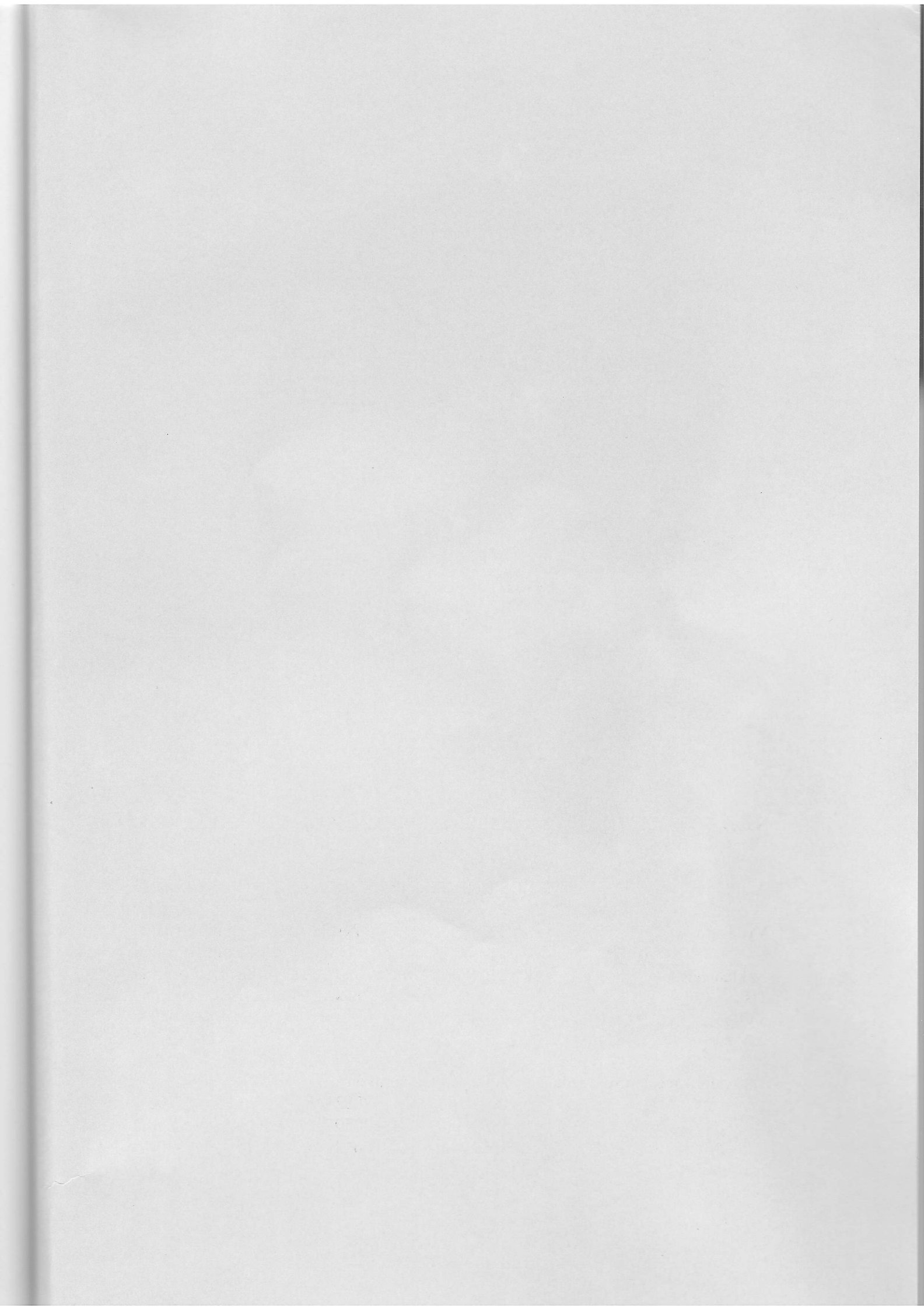
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist eine Funktion von X_1, \dots, X_n und ist somit ein Zufallsvektor. Die Verteilungsfunktion $F_{\bar{X}}$ ist durch

$$F_{\bar{X}}(x) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq nx\right)$$

gegeben. Die Verteilungsfunktion $F_{\bar{X}}$ ist die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\sum_{i=1}^n X_i$.

Bedingung	Verteilung	Erwartungswert	Varianz	Standardabweichung
$\mu_1 \leq \mu_2$	$N(\mu_1, \sigma^2/n)$	μ_1	σ^2/n	σ/\sqrt{n}
$\mu_1 < \mu_2$	$N(\mu_1, \sigma^2/n)$	μ_1	σ^2/n	σ/\sqrt{n}
$\mu_1 > \mu_2$	$N(\mu_2, \sigma^2/n)$	μ_2	σ^2/n	σ/\sqrt{n}
$\mu_1 = \mu_2$	$N(\mu_1, \sigma^2/n)$	μ_1	σ^2/n	σ/\sqrt{n}

Die Verteilungsfunktion $F_{\bar{X}}$ ist die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\sum_{i=1}^n X_i$.



Název SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z PRAVDĚPODOBNOTI
A MATEMATICKÉ STATISTIKY

Autoři RNDr. Helena Koutková, CSc., RNDr. Oldřich Dlouhý

Vydavatel Vysoké učení technické v Brně
Fakulta stavební

Nakladatelství AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o. Brno

Tisk FINAL TISK, s.r.o. Olomučany

Vyšlo únor 2005

AA – VA 5,20 – 5,38

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou

ISBN 80 – 214 - 2882 – 1 (3.přeprac.vyd. 2005)

ISBN 80 – 214 – 2050 – 2 (2.přeprac.vyd. 2002)

ISBN 80 – 214 – 0642 – 9 (1. vydání 1997)

00256-1

50.00