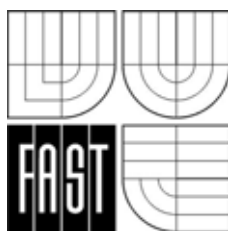


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Prof. Ing. DRAHOMÍR NOVÁK, DrSc.
Ing. LUDĚK BRDEČKO, Ph.D.

PRUŽNOST A PEVNOST

MODUL BD02 - MO1
ZÁKLADNÍ POJMY A PŘEDPOKLADY



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

OBSAH

1 Úvod	5
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu.....	5
1.4 Klíčová slova.....	5
2 Obecné poznámky a předpoklady	7
2.1 Historická východiska.....	7
2.2 Předmět a návaznosti.....	7
2.3 Výchozí předpoklady lineární pružnosti.....	8
3 Deformace	11
3.1 Posuny.....	11
3.2 Poměrné deformace.....	12
4 Napětí	15
4.1 Prvek tělesa a vnitřní síly.....	15
4.2 Normálové a smykové napětí.....	16
4.3 Věty o napětí a napjatosti.....	19
4.3.1 Vzájemnost smykových napětí.....	19
4.3.2 Saint-Venantův princip lokálnosti.....	20
5 Fyzikální vztahy	23
5.1 Hookův zákon – lineárně pružný materiál.....	23
5.1.1.1 Příklad 1.....	25
5.1.1.2 Příklad 2.....	25
5.1.1.3 Příklad 3.....	26
5.2 Reálné typy materiálů.....	27
5.3 Pracovní diagram a jeho model.....	28
5.4 Změna teploty.....	29
5.4.1.1 Příklad 4.....	30
6 Obecná napjatost v bodě tělesa	33
6.1 Tenzor napětí a deformace.....	33
6.2 Geometrické rovnice.....	34
6.3 Diferenciální rovnice rovnováhy.....	35
6.4 Fyzikální rovnice.....	35
6.5 Rovinná úloha.....	37
6.5.1 Rovinná napjatost a rovinná deformace.....	37
6.5.2 Hlavní napětí.....	38
6.5.3 Mohrova kružnice.....	39
6.5.3.1 Příklad 5.....	40
6.5.3.2 Příklad 6.....	40
7 Koncepce spolehlivosti při navrhování	41
8 Závěr	45
8.1 Shrnutí.....	45

8.2	Otázky k procvičování.....	45
9	Studijní prameny	47
9.1	Seznam použité literatury	47
9.2	Seznam doplňkové studijní literatury	47
9.3	Odkazy na další studijní zdroje a prameny.....	47

1 Úvod

1.1 Cíle

Cílem tohoto modulu je seznámit čtenáře se základními předpoklady lineární teorie pružnosti a pojmy teorie pružnosti jako jsou posuny, poměrné deformace, napětí, apod. Pojmy jsou uvedeny a podrobně vysvětleny v elementární rovině technické pružnosti, nicméně rozšíření do roviny matematické teorie pružnosti v kap. 6 doplňuje základní potřebnou znalost problematiky a vytváří předpoklady k širšímu pochopení souvislostí. Prostudování tohoto modulu je základním předpokladem ke studiu modulů navazujících – tedy modulu 2 (jednotlivé případy namáhání prutu) a modulu 3 (složené případy namáhání prutu).



1.2 Požadované znalosti

Před studiem tohoto modulu Pružnosti a pevnosti je třeba zvládnout problematiku základů stavební mechaniky, především pak výpočet průřezových charakteristik, složek reakcí a vnitřních sil na prutu.



1.3 Doba potřebná ke studiu

Tento modul předpokládá přibližně 10 hodin intenzivního studia.



1.4 Klíčová slova

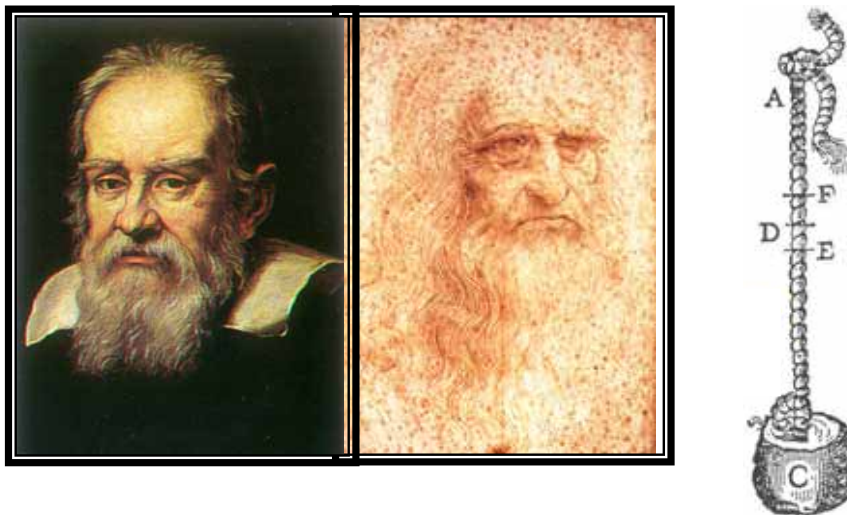
Pružnost, pevnost, plasticita, posuny, deformace, napětí, vnitřní síly, pracovní diagram, fyzikální rovnice, geometrické rovnice, rovnice rovnováhy, rovinná napjatost, rovinná deformace, spolehlivost, mezní stavy.



2 Obecné poznámky a předpoklady

2.1 Historická východiska

Předmět Pružnosti a pevnosti (PP) vychází obecně ze snah postihnout chování zatížených konstrukcí. První badatelé, Leonardo da Vinci v šestnáctém století, Galileo a Hooke v sedmnáctém, Euler a Coulomb ve století osmnáctém, zaměřili své úsilí na ryze praktické problémy chování nosníků a sloupů. Teprve později bylo započato s obecným matematickým zkoumáním chování pružných těles, např. Navier (1821) a Cauchy (1822). Paralelně se vyvíjela stavební mechanika a teorie konstrukcí, která nyní zahrnuje řadu různých oblastí a směrů. Nicméně Pružnost a pevnost tradičně pokrývá teoretické a praktické aspekty prvních badatelů: teorie namáhání prutu a obecná teorie pružnosti.



Obr. 2.1: Galileo Galilei, Leonardo da Vinci

2.2 Předmět a návaznosti

Teorie PP využívá poznatků vědních oborů, které studují pevnost materiálu, tj. obecně schopnost odolávat vnějším účinkům bez porušení. Vytváří teoretický základ pro navrhování a posuzování konstrukcí ocelových, betonových, dřevěných, kompozitních aj. (teorie konstrukcí).

Předmětem PP je souvislost mezi deformací a porušováním vzhledem k silovému působení, napěťová a deformační analýza těles.



Pojem PP vznikl v dobách, kdy vyjadřoval především určování pružných deformací a posuzování pevnosti – odolnosti proti porušování. K velké většině porušení však dochází především v oboru nepružných deformací, únavou mate-

riálu, změnami v mikrostruktuře materiálu, které se projeví vznikem trhlin (betonové konstrukce), propagací trhliny až do konečného lomu. K postižení takového chování je třeba použití dnes již samostatné disciplíny – lomové mechaniky. Z tohoto pohledu je již dnes pojem PP poněkud zavádějící, musíme si uvědomit, že vyjadřuje především elementární znalost problematiky, která slouží jako základ k dalšímu poznání reálného chování materiálů. Nutno poznamenat, že v anglosaské literatuře se obsah PP v našem pojetí kryje s obsahem disciplíny nazývané „Strength of materials“.

Tradiční rozdělení PP:

- technická nauka o PP – využívá řadu zjednodušujících předpokladů, je zaměřena na elementární praktické problémy (Strength of materials),
- matematická teorie PP – založena na vyšší matematické analýze a zaměřena na náročnější problémy mechaniky kontinua jako jsou plošné konstrukce a obecná tělesa (Elasticity and plasticity).

Zařazení oboru PP v rámci fyziky a mechaniky:

Fyzika:

- termodynamika
- optika
- akustika
- elektřina
- **mechanika**
 - tekutin
 - sypkých látek
 - **těles**
 - statika
 - **pružnost a pevnost**
 - kinematika
 - dynamika

2.3 Výchozí předpoklady lineární pružnosti

Klasická lineární pružnost představuje nejjednodušší pojetí teorie pružnosti a je založena na následujících výchozích předpokladech:

- **Spojitosť látky** – těleso pokládáme za kontinuum, hmota zaplňuje celý objem bez mezer. Vzhledem k tomuto předpokladu lze pojímat deformace a napětí jako spojité funkce.
- **Homogenita a izotropie** – látka je homogenní, pokud jsou její fyzikální vlastnosti ve všech místech shodné. Izotropní materiál má vlastnosti ve všech směrech shodné, toto platí pro většinu látek (ne však např. u dřeva, kde jsou jiné vlastnosti ve směru vláken a kolmo na ně).

- **Lineární pružnost** – představuje schopnost látky vracet se po odstranění zatížení do původního stavu. Materiál je fyzikálně lineární, pokud platí přímá úměrnost mezi napětím a deformací (Hookův zákon).
- **Malé deformace** – změny tvaru stavebních konstrukcí a posuny jednotlivých bodů (např. průhyby nosníků) jsou velmi malé ve srovnání s rozměry konstrukce. Tento předpoklad umožňuje zpravidla řadu zjednodušení při matematickém řešení – vede na geometrickou linearitu.
- **Statické zatěžování** – narůstání zatížení, resp. jiných účinků je povlné, dynamické účinky je možno zanedbat.
- **Počáteční nenapjatost** – napětí ve výchozím stavu jsou rovna nule.

Přímým praktickým důsledkem těchto výchozích předpokladů je možnost použití principu superpozice, tedy skládání účinků vycházející z linearitě všech uplatněných matematických závislostí.

3 Deformace

Vlivem zatížení nebo jiných účinků (vliv teploty, reologické vlivy apod.) se tělesa deformují (přetvářejí). Deformace vyjadřuje chování tělesa, které je charakterizováno vzdáleností dvou bodů tělesa při zachování jeho spojitosti.



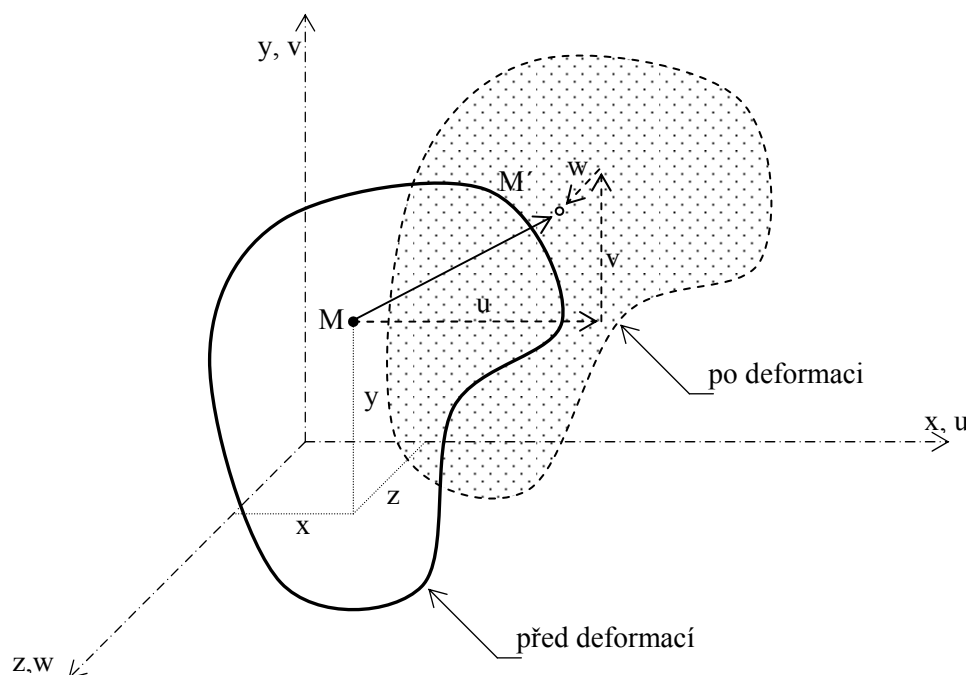
Termín „deformace“ však může znamenat dvě různé fyzikální veličiny:

- **Posuny (přemístění)** [m, mm, ...] – absolutní deformace popisující deformace tělesa.
- **Poměrné deformace** [bezrozměrné] – relativní veličina popisující deformace v bodě tělesa.

Mezi těmito významy je třeba přesně rozlišovat. V následujících podkapitolách budou tyto pojmy vysvětleny nejprve na elementární úrovni, obecný matematický popis následuje v kap. 6.

3.1 Posuny

Bod tělesa M před deformací přejde po deformaci do pozice bodu M' , obr. 3.1. Spojnice těchto bodů MM' v souřadném systému x, y, z představuje vektor posunů \mathbf{u} , jeho složky do směrů os souřadnic x, y, z označujeme u, v a w . Tyto složky posunů jsou kladné v případě shodného smyslu s osami souřadného systému. Obecně se vektor deformace spojitě mění od bodu k bodu a jeho složky jsou spojitými funkcemi souřadnic $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y,z)$.



Obr. 3.1: Složky posuvů u, v a w

Známe-li deformační posuny každého bodu tělesa, pak je geometrie tělesa po deformaci plně popsána. Na základě těchto absolutních deformací jsme schopni odvodit všechny poměrné deformace, jak bude zřejmé z další podkapitoly.

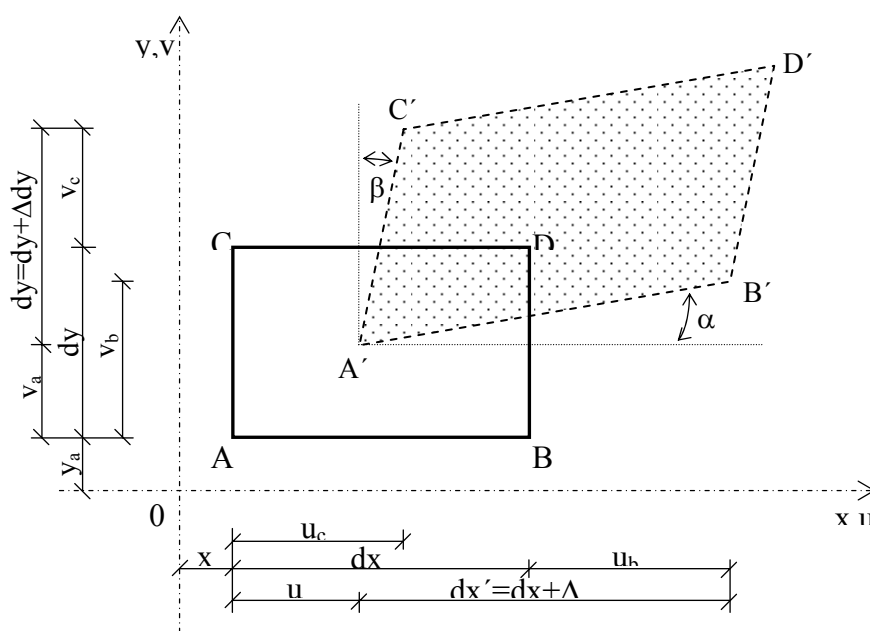


Deformace tělesa je množina posunů všech jeho bodů.

3.2 Poměrné deformace

Geometrické změny tělesa lze popsat relativně pomocí poměrných deformací. Tyto rozlišujeme délkové (poměrné prodloužení, resp. zkrácení) a úhlové (zkošení), jsou veličinami bezrozměrnými a jsou vztaženy k bodu tělesa.

Vysvětlení pojmu poměrné deformace lze provést nejlépe v dvourozměrném případě na deformaci elementárního prvku v rovině xy , před deformací s vrcholy $MACB$, po deformaci $M'A'C'B'$. Původní délky stran jsou dx a dy , po deformaci pak dx' a dy' .



Obr. 3.2: Délkové a úhlové poměrné deformace v rovině xy

Poměrné délkové deformace jsou

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\Delta dy}{dy}. \quad (3.1)$$

Úhlová deformace je

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta. \quad (3.2)$$

Zobecněním na tři dimenze můžeme analogicky postupovat i v dalších rovnicích, dospějeme tak ke třem poměrným délkovým deformacím a třem úhlovým deformacím.

Deformace v bodě tělesa je poměrná deformace elementárního prvku tělesa, který tento bod tělesa obsahuje.

Délková poměrná deformace (např. prodloužení) je poměr změny (např. přírůstku) délky k její původní hodnotě.

Úhlová deformace je změna úhlu mezi dvěma úsečkami, které byly před deformací kolmé.



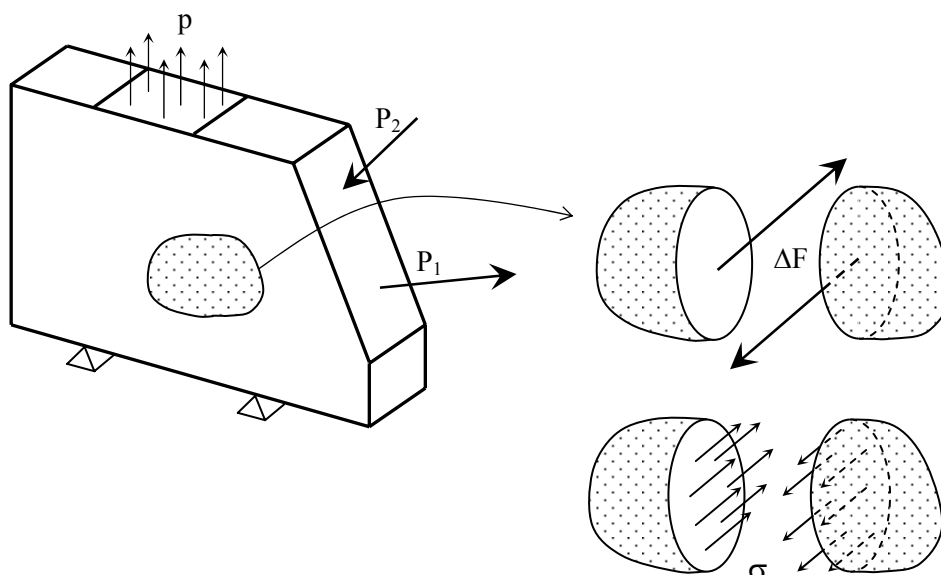
4 Napětí

4.1 Prvek tělesa a vnitřní síly

Na těleso působí **vnější síly**. Pokud je těleso v klidu, tvoří všechny vnější síly rovnovážnou soustavu (primární vnější síly – zatížení, sekundární vnější síly – podporové reakce). Asi před 200 lety přišel Bernoulli na geniální myšlenku, že v tělese vznikají **vnitřní síly**, které se snaží při silovém působení na těleso vrátit toto těleso do původního stavu. Pokud je těleso v rovnováze musí být v rovnováze i každá jeho část (statická rovnováha známá ze základů stavební mechaniky). V PP pracujeme s prvkem tělesa, který představuje každou jeho oddělitelnou část. Prakticky každá úloha PP začíná uvolněním prvku. Uvolníme-li z tělesa prvek, pak musíme na řezu zavést účinky vzájemného působení podle zákona akce a reakce – vnitřní síly.



Situace je schematicky znázorněna na obr. 4.1. Na těleso působí vnější síly P_1 , P_2 , p . Z tělesa uvolníme prvek, který rozdělíme řezem na dvě části. Účinky vzájemného působení – vnitřní síly jsou znázorněny na obr. 4.1. Tyto síly však samy o sobě mnoho o míře namáhání tělesa nevyovídají, neboť nejsou vztaženy k velikosti, resp. tvaru „odporující“ plochy. Z tohoto pohledu je třeba vnitřní síly „normalizovat“ ve vztahu k ploše a vztáhnout k určitému bodu. Takto dospíváme ke klíčovému pojmu PP – napětí. Vektor napětí v bodě představuje intenzitu vnitřních sil v tomto bodě.



Obr. 4.1: Vnější síly, vnitřní síly, napětí

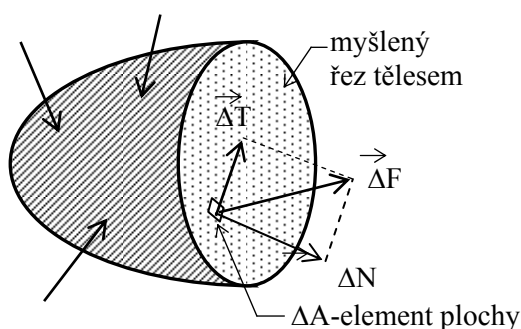


Obr. 4.2: Stress (napětí) – klíčový pojem PP (vizuální pomůcka ke zdůraznění extrémní důležitosti tohoto pojmu, kterého se v PP rozhodně nevyvarujeme)

4.2 Normálové a smykové napětí

Po obecném úvodu definujícím napětí jako intenzitu vnitřních sil přistupme ke skutečné definici napětí. K tomu nám poslouží opět prvek tělesa, při němž na řezu v okolí bodu vymežíme plošku ΔA , obr. 4.3. Výslednici vnitřních sil na tuto plošku působící označme jako vektor $\vec{\Delta F}$. Tuto výslednici můžeme rozložit do dvou složek, do směru normály $\vec{\Delta N}$, a do směru roviny řezu (tečny) $\vec{\Delta T}$. Normálové napětí v bodě daného řezu tělesem je pak definováno jako limita poměru složky $\vec{\Delta N}$ k ploše zmenšující se oblasti ΔA :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta N}}{\Delta A}. \quad (4.1)$$



Obr. 4.3: Výslednice vnitřních sil k definici napětí

Podobně smykové napětí (někdy nazývané jako tečné nebo tangenciální) je definováno jako limitní poměr

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta T}}{\Delta A}. \quad (4.2)$$

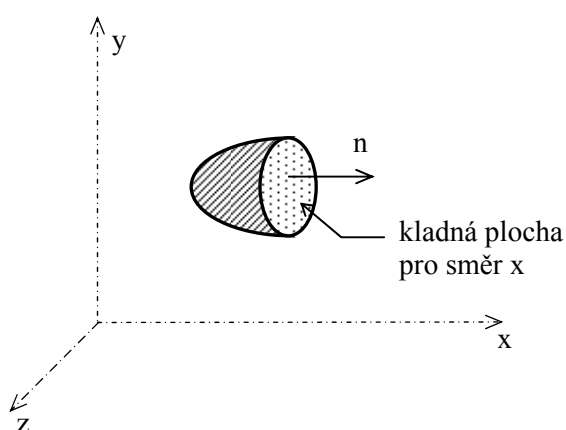
Jednotkou napětí, jak je zřejmé z definice (síla dělená plochou), je newton dělený čtverečním metrem: pascal (Pa), $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ (jednotka SI). V praktických výpočtech se používají zpravidla jednotky větší, megapascal (MPa), kilopascal (kPa) a gigapascal (GPa). V anglosaských zemích se stále běžně používá jednotka psi (pound per square inch). Platí:

$$\begin{aligned} \text{kPa} &= 10^3 \text{ Pa}, \\ \text{MPa} &= 10^6 \text{ Pa} = \text{MN}/\text{m}^2 = \text{N}/\text{mm}^2, \\ \text{GPa} &= 10^9 \text{ Pa}, \\ \text{psi} &= 6.89 \text{ kPa}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

V případě, že normálové napětí působí z myšleného řezu ven, pak hovoříme o tahovém napětí, toto napětí má kladné znaménko. V případě orientace do řezu se jedná o napětí tlakové, toto napětí označujeme znaménkem záporným. U smykového napětí se však orientace volí smluvně, což bude ukázáno v dalším výkladu.

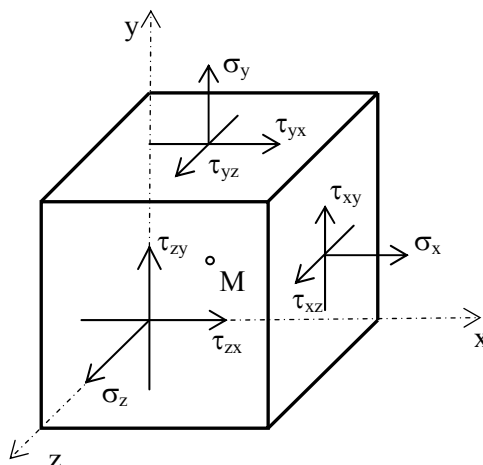
Je zřejmé, že hodnoty normálového a smykového napětí jsou různé pro různé řezy v bodě tělesa. Obecně tyto hodnoty označujeme jako stav napjatosti v bodě tělesa. Existuje tedy nekonečně mnoho hodnot těchto napětí – z toho je zřejmé, že orientaci řezu nelze pro praktické účely volit naprosto libovolně. Je nutné zavést určitý systém, podobně jako tomu bylo u deformací, vázaný na souřadný systém os x , y , z .

K tomuto účelu zavedme pojem kladných ploch řezu souřadnicových os. Např. kladná plocha řezu souřadnice x , je plocha rovnoběžná s rovinou yz souřadnicového systému x , y , z , s materiálem orientovaným směrem vně ve směru normály k plošce a ve směru kladné osy x , obr. 4.4.

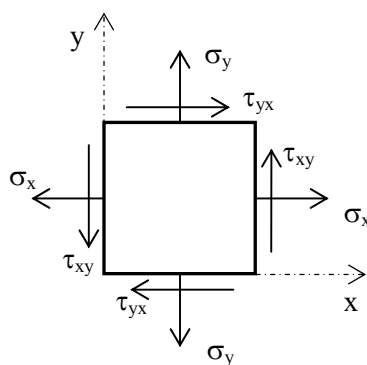


Obr. 4.4: K definici kladné plochy řezu

Je zřejmé, že existují 3 normálová napětí, jež označujeme indexem osy shodného směru. Na obr. 4.5 jsou složky popisující stav napjatosti v bodě vykresleny na rovinách rovnoběžných se souřadnicovými rovinami, pro názornost jsou odsunuty od bodu M , k němuž je vztahujeme – tvoří tak diferenciální element dx , dy , dz . Smyková napětí, která jsou na každé plošce dána dvěma složkami, mají první index shodný s orientací normály k této rovině, druhý pak souhlasí s osou souřadnic, s níž je složka smykového napětí rovnoběžná. Redukce počtu složek v 2D případě je zřejmá z obr. 4.6.



Obr. 4.5 Složky napětí (3D)



Obr. 4.6 Složky napětí (2D)

Ještě k jednotce napětí: Archimedes, Pascal a Newton hrají v nebi na schovávanou. Archimedes piká. Pascal se rozhlédne a hbitě se schová do křoví. Newton vezme klacek, do hlíny vyškrábne čtverec metr na metr a postaví se do něj. Nijak se neschovává. Archimedes dopiká, rozhlíží se kolem sebe. Samozřejmě, že ihned vidí Newtona a volá "Deset dvacet Newton!" Newton v klidu řekne: "Tak to teda omyl! **1 Newton na metr čtvereční je přece Pascal!** (podle studentů matematicko-fyzikální fakulty).

4.3 Věty o napětí a napjatosti

4.3.1 Vzájemnost smykových napětí

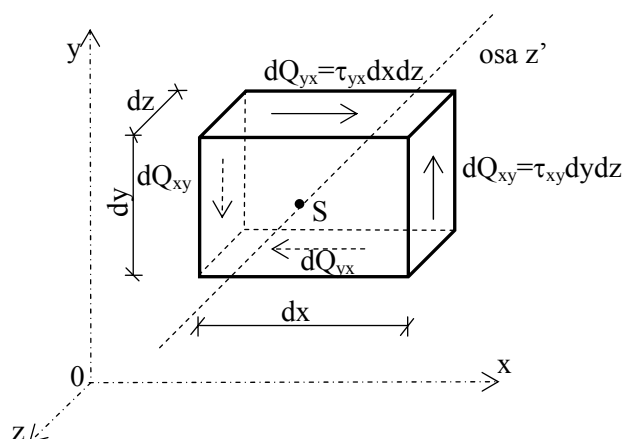
Předpokládejme diferenciální element na obr. 4.7 o hranách dx , dy , dz , vyňatý z tělesa. Tento element musí být samozřejmě v rovnováze. Na hranách elementu jsou smyková napětí a příslušné elementární síly dQ , které vzniknou vynásobením smykových napětí plochou, na kterou působí. Uvažujme osu vedenou těžištěm elementu S rovnoběžně s osou z a napíšme momentovou podmínku rovnováhy k této ose:

$$\Sigma M_{\bar{z}} = 0: \quad dQ_{xy} dx - dQ_{yx} dy = \tau_{xz} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0. \quad (4.4)$$

Rovnici lze vydělit součinem $dx dy dz$, pak dostáváme podmínku vzájemnosti smykových napětí (analogickým postupem pro další dvě dvojice smykových napětí):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (4.5)$$

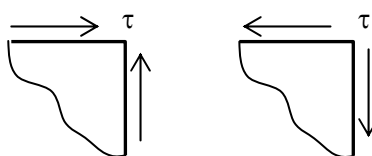
Poznámka: Na obr. 4.7 jsou vyznačeny pro přehlednost pouze ty síly, které vyvolávají momenty ke zmíněné ose kvádru.



Obr. 4.7: Vzájemnost smykových napětí

Věta o vzájemnosti smykových napětí: Smyková napětí působící ve vzájemně kolmých elementárních řezech kolmo k jejich průsečnici jsou stejně velká a orientovaná buď k průsečnici nebo od ní, obr. 4.8.

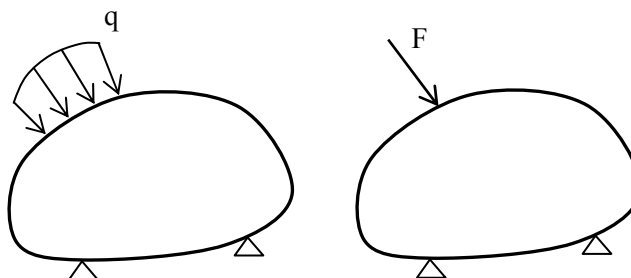




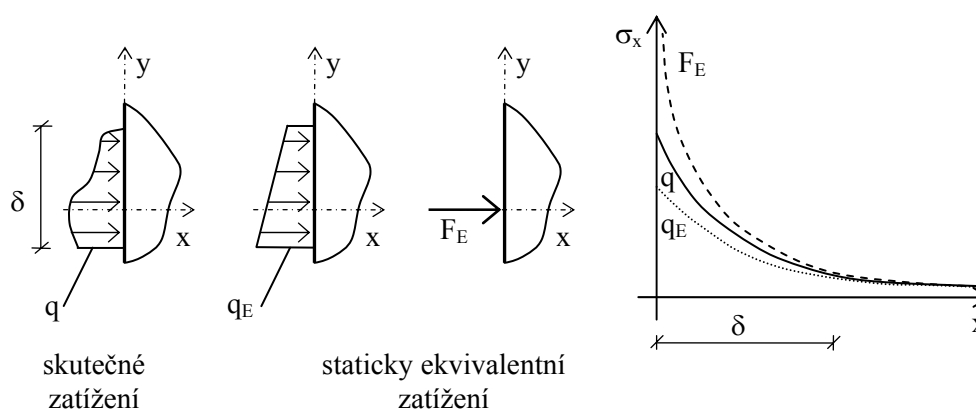
Obr. 4.8: Dvě možnosti orientace vzájemných smykových napětí

4.3.2 Saint-Venantův princip lokálnosti

Soustavu vnějších sil lze nahradit soustavou jinou, staticky ekvivalentní, obr. 4.9. Dojde však ke změně složek napětí. Rovnovážná soustava sil přiložená k malé oblasti pružného tělesa ovlivní významně stav napjatosti pouze v blízkém okolí (v oblasti „poruchy“ δ), ve vzdálenějších bodech má změna účinky prakticky zanedbatelné. Znázorníme-li průběh např. normálového napětí podél přímky vedené tělesem, a to pro původní rozložení (realita R) a pro náhradní, staticky ekvivalentní (SE) rozložení (1 a 2), vidíme, že v dostatečné vzdálenosti (větší než δ) od bodu A jsou napětí prakticky stejná, obr. 4.10.



Obr. 4.9: Statická ekvivalence



Obr. 4.10: Průběh napětí k ilustraci Saint-Venantova principu lokálnosti

Saint-Venantův princip nám často usnadňuje řešení napjatosti, neboť umožňuje:

- zavádět modely silového působení (idealizace),
- zavádět výpočtové modely styku těles,
- rozdělit řešení napjatosti a deformace vázaného tělesa na řešení rovnováhy tělesa jako celku (statika) a napjatosti a deformace uvolněného tělesa (PP).

Silovou soustavu můžeme tedy v PP nahrazovat soustavou jinou, staticky ekvivalentní. Jaká je míra přípustnosti nahrazení však může rozhodnout posuzování tělesa (konstrukce či prvku) podle mezních stavů definující rovněž provozuschopnost. Saint-Venantův princip nelze dokázat, intuitivně je však obecně přijatelný a experimentálně podepřený.

Saint Venantův princip: Nahradíme-li v určité oblasti tělesa jednu silovou soustavu jinou, staticky ekvivalentní soustavou, pak napjatost tělesa je pro obě zatížení prakticky stejná s výjimkou blízkého okolí nahrazované oblasti, jehož rozměry jsou srovnatelné s rozměry této oblasti.



5 Fyzikální vztahy

5.1 Hookův zákon – lineárně pružný materiál

Na obr. 5.1 je znázorněna jednoosá napjatost pro elementární kvádr, který je namáhán pouze normálovým napětím ve směru osy x . Vlivem působení napětí σ_x se kvádr poměrně prodlouží o ε_x . Konstantou úměrnosti mezi těmito veličinami je v lineární pružnosti (kde platí jednoznačná závislost mezi napětími a deformacemi ve všech fázích působení, zatěžování i odlehčování) **modul pružnosti** v tahu a tlaku E (Youngův modul pružnosti). Vztah mezi napětím σ_x a poměrným prodloužením ε_x je pak vyjádřen tzv. **Hookovým zákonem** v tahu a tlaku

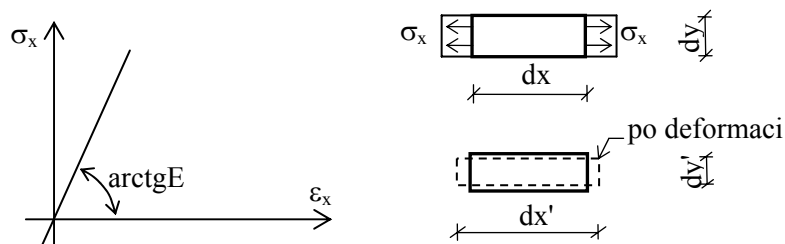


$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (5.1)$$

Modul pružnosti je fyzikální konstanta, má rozměr napětí a definuje úhel sklonu lineární závislosti na diagramu napětí-deformace.

Jak je zřejmé z obr. 5.1, prvek se deformuje rovněž ve směru kolmém na směr působícího napětí, tj. ve směru y (resp. z) – při kladném napětí dochází ke zkrácení. Toto zkrácení vyjadřuje bezrozměrná fyzikální konstanta ν , kterou nazýváme **Poissonův součinitel** příčné deformace. Mezi poměrnými deformacemi pak platí vztah

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (5.2)$$



Obr. 5.1: Hookův zákon

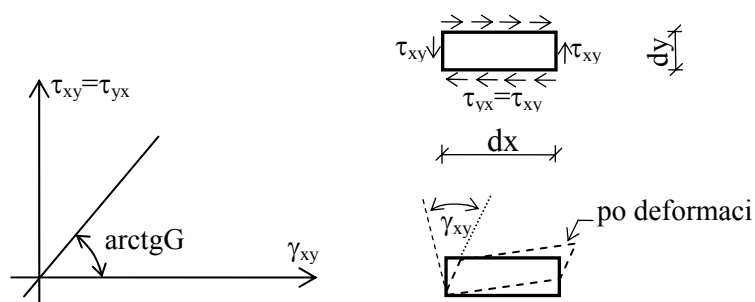
Poissonův součinitel je kladné číslo a dá se dokázat, že nemůže být větší než 0,5 (jinak by např. všestranně tlačené těleso zvětšovalo svůj objem).

Hookův zákon pro případ jednoosé napjatosti ve směru osy y nebo z lze získat záměnou indexů. Pokud však působí všechna tři normálová napětí, získáme superpozicí obecný Hookův zákon.

Ve směru osy x např. platí

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (5.3)$$

Podobně platí i lineární závislost mezi zkosením a smykovým napětím. Závislost nazýváme Hookův zákon ve smyku a konstantou úměrnosti je modul pružnosti ve smyku G , obr. 5.2.



Obr. 5.2: Hookův zákon ve smyku

Pro rovinu xy je

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{yx}}{G}. \quad (5.4)$$

Analogické vztahy pak platí pro roviny yz a zx .

Lze dokázat, že tři základní fyzikální konstanty, E , G a ν , nejsou v případě izotropní látky vzájemně nezávislé, platí mezi nimi vztah

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu). \quad (5.5)$$

Je tedy zřejmé, že izotropní látka je plně charakterizována dvěma elastickými konstantami.

Fyzikální konstanty se zjišťují experimentálně zkouškami a jsou uváděny v literatuře. Typické hodnoty pro základní materiály jsou uvedeny v tab. 5.1.

Tab. 5.1 Základní fyzikální konstanty některých materiálů

	směr	E[GPa]	G[GPa]	ν	$\alpha[^\circ\text{C}^{-1}]\cdot 10^{-6}$
ocel		210	81	0,3	12
beton		20-40	0,42*E	0,2	12
dřevo	rovnoběžně s vlákny	10	0,6	-	3
	kolmo k vláknům	0,3	-	-	32 (tan.) 24(rad.)
sklo		70	28	0,26	6

5.1.1.1 Příklad 1

Těleso (kvádr) je namáháno normálovým napětím ve směru x $\sigma_x = 180 \text{ MPa}$. Určete poměrné deformace v tělese, je-li modul pružnosti materiálu $E = 210 \text{ GPa}$ a Poissonův součinitel $\nu = 0,3$.



Řešení:

Deformace se určí využitím fyzikálních vztahů (obecného Hookova zákona). Vzhledem k tomu, že $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$, potom:



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{180 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = 8,5714 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{0,3 \cdot 180 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = -2,5714 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

5.1.1.2 Příklad 2

Krychle o velikosti hrany $l = 0,2 \text{ m}$ (viz obr. 5.3) byla zatížena svislým napětím $\sigma_y = -8 \text{ MPa}$. Přitom došlo ke změně délek hran na $l'_x = 0,20001185 \text{ m}$ a $l'_y = 0,19994074 \text{ m}$. Určete modul pružnosti E a Poissonův součinitel ν materiálu krychle.



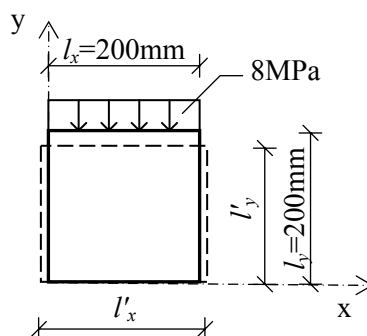
Řešení:

Z původních délek l a nových délek l' se určí poměrné deformace



$$\varepsilon_x = \frac{l'_x - l_x}{l_x} = \frac{0,20001185 - 0,2}{0,2} = 5,925 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_y = \frac{l'_y - l_y}{l_y} = \frac{0,19994074 - 0,2}{0,2} = -2,963 \cdot 10^{-4}.$$



Obr. 5.3

Vzhledem k tomu, že $\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$, vyjádří se materiálové charakteristiky z fyzikálních vztahů

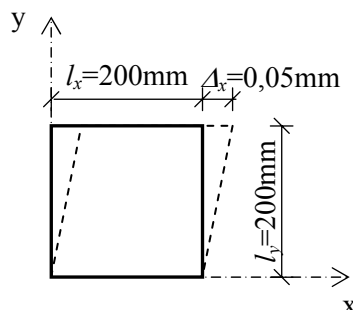
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow E = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{-8 \cdot 10^6}{-2,963 \cdot 10^{-4}} = 27 \cdot 10^9 = 27 \text{ GPa},$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu \sigma_y}{E} \Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_x E}{\sigma_y} = -\frac{5,925 \cdot 10^{-5} \cdot 27 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^6} = 0,2.$$

5.1.1.3 Příklad 3



Na krychli z předchozího příkladu bylo aplikováno zatížení vyvolující smykové napětí τ_{xy} . Při tomto zatěžování došlo k vodorovnému posunu horní plošky krychle o $\Delta x = 0,05 \text{ mm}$ (viz obr 5.4). Určete velikost smykového napětí τ_{xy} v krychli.



Obr. 5.4

Řešení:

Zkosení γ_{xy} se určí vzhledem k malému úhlu (teorie malých deformací) jako



$$\gamma_{xy} \approx \operatorname{tg} \gamma_{xz} = \frac{\Delta_x}{l_y} = \frac{0,00005}{0,2} = 0,00025.$$

Pro určení modulu pružnosti ve smyku se využijí charakteristiky získané v předchozím příkladě

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{27 \cdot 10^9}{2(1+0,2)} = 11,25 \cdot 10^9 = 11,25 \text{ GPa}.$$

Smykové napětí se získá z fyzikální rovnice (Hookova zákona pro smyk)

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 11,25 \cdot 10^9 \cdot 0,00025 = 2,8125 \cdot 10^6 = 2,8125 \text{ MPa}.$$

5.2 Reálné typy materiálů

Reálné materiály se však Hookovým zákonem zpravidla neřídí, Hookův zákon u nich platí většinou pouze při malých napětích. Vztah mezi napětím a přetvořením je nelineární, závislost napětí-deformace má svůj vrchol, vznikají plastické deformace. Diagram napětí-deformace plně charakterizuje chování materiálu. Rozlišujeme v zásadě tři základní typy, obr. 5.5:



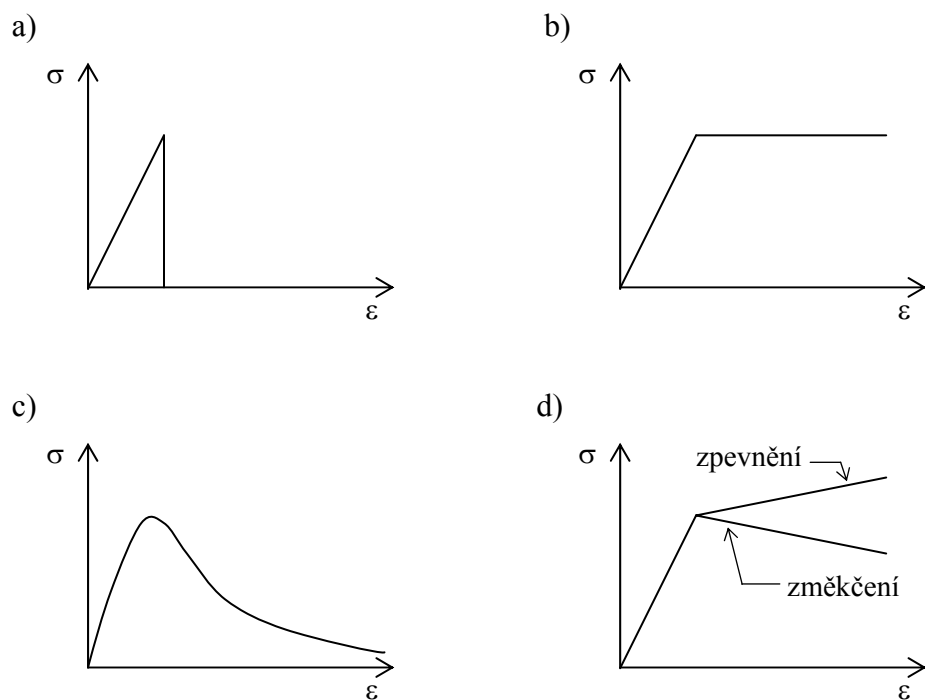
1. Lineárně pružný (křehký) materiál.

Jakmile napětí překročí určitou maximální mez, pružné chování končí a napětí náhle poklesne k nule, obr. 5.5 a). Takové chování je typické např. pro sklo.

2. **Pružně-plastický materiál.** Od určité úrovně zůstává napětí konstantní při narůstajícím přetvoření (materiál „teče“), typické chování pro ocel, obr. 5.5 b).

3. **Kvazikřehký materiál.** Po dosažení maxima napětí postupně klesá. Říkáme, že dochází ke změkčení – pokles napětí při narůstajícím přetvoření, obr. 5.5 c). Diagram napětí-deformace se změkčením je typický pro kvazikřehké materiály jako je beton a různé kompozitní materiály.

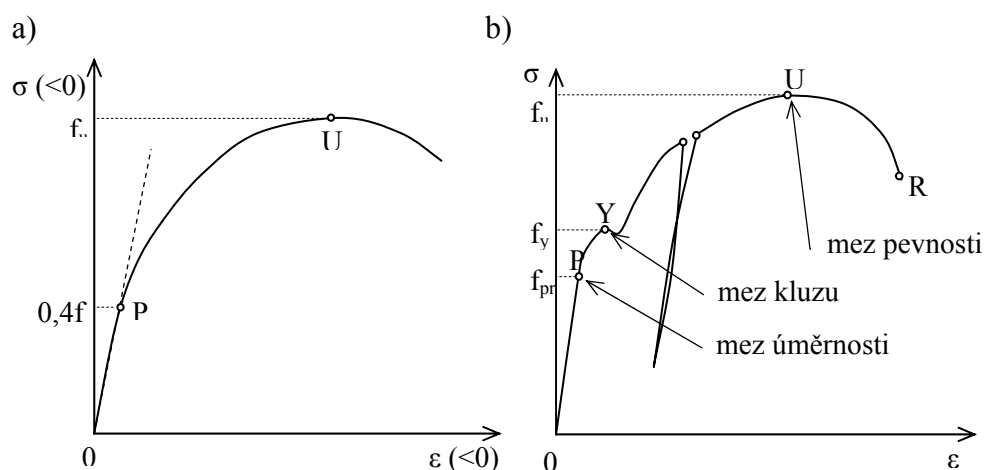
Na obr. 5.5 d) je znázorněno již zmíněné **změkčení**. Pokud dochází k nárůstu napětí hovoříme o **zpevnění**.



Obr 5.5.: Diagram napětí-deformace pro různé materiály: a) křehký, b) pružno-plastický, c) kvazikřehký, d) změkčení a zpevnění.

5.3 Pracovní diagram a jeho model

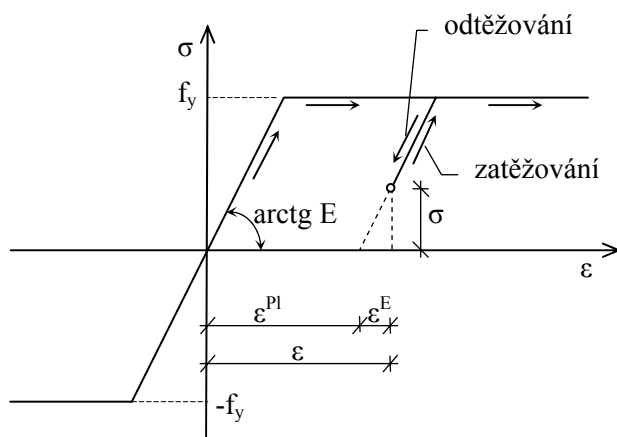
Závislost napětí-deformace získanou experimentálně nazýváme pracovní diagram. Např. pro **beton v tlaku** je nelineární závislost zobrazena na obr. 5.6 a), pouze přibližně do úrovně 40 % **meze pevnosti** f_u je možná lineární aproximace.



Obr 5.6: Pracovní diagram (a) betonu v tlaku (b) oceli v tahu

Na obr. 5.6 b) je znázorněn pracovní diagram konstrukční **oceli v tahu**. Do **meze úměrnosti** f_{pr} platí Hookův zákon. Pak je již úměrnost porušena, k výraznému nárůstu deformací dochází po dosažení **meze kluzu** f_y . Následně dochází ke zpevnění, napětí narůstají až k dosažení meze pevnosti f_u . Při vyšších napětích vznikají **plastické deformace** nevratného charakteru. Pokud např. po dosažení bodu A na diagramu snížíme napětí (odtěžujeme), neprobíhá odlehčení podle původní křivky, ale do bodu B , přibližně rovnoběžně s počáteční větví podle Hookova zákona. Při opětovném zatížení probíhá deformace do bodu C a pak naváže na původní křivku.

Je zřejmé, že při numerických výpočtech respektujících nelineární chování materiálu se neobejdeme bez modelů, které skutečný diagram napětí-deformace zjednodušují a určitým způsobem aproximují. Nejjednodušším modelem je tzv. ideální pružnoplastický materiál, obr. 5.7. V počáteční fázi je materiál v pružném stavu, po dosažení meze kluzu je pak ve stavu plastickém. Odlehčení z bodu A do bodu B a úplně do bodu D jasně vymezuje skutečnost, že deformace se skládají z pružné ε^E a plastické části ε^P .



Obr.5.7: Ideální pružnoplastický materiál

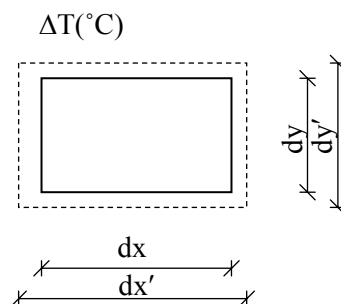
5.4 Změna teploty

Vlivem teploty prvek (elementární kvádr o rozměrech dx , dy , dz) změní své rozměry (na dx' , dy' , dz'), obr. 5.8. Teplotní změna nevyvodí žádná napětí, není-li prvek v deformaci bráněno a může-li volně dilatovat. Pokud se teplota prvku tělesa změní o ΔT , poměrné deformace vyvozené touto změnou jsou

$$\varepsilon_{xT} = \varepsilon_{yT} = \varepsilon_{zTD} = \alpha_T \Delta T, \quad (5.6)$$

$$\gamma_{xyTD} = \gamma_{yzT} = \gamma_{zxT} = 0. \quad (5.7)$$

Fyzikální konstantu úměrnosti nazýváme součinitel teplotní roztažnosti $\alpha_t (\text{°C})^{-1}$. Hodnoty tohoto parametru jsou uvedeny pro základní materiály v tab 5.1.

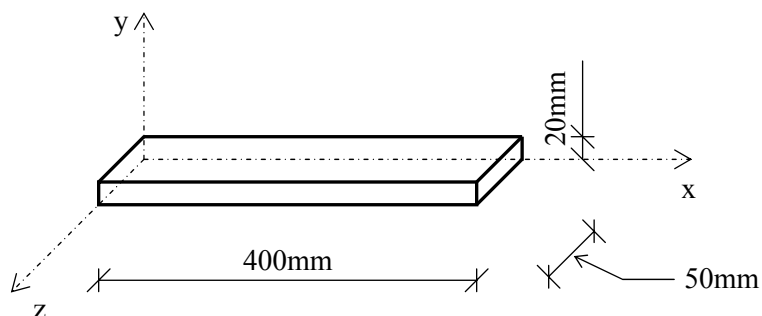


Obr. 5.8: Deformace od změn teploty

5.4.1.1 Příklad 4



Těleso o rozměrech podle obr. 5.9 bylo ochlazeno z 20 °C na -5 °C . Určete jeho nové rozměry, jeli součinitel teplotní roztažnosti $\alpha_t = 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$.



Obr. 5.9

Řešení:



Změna teploty se vypočte jako rozdíl současné a původní teploty

$$\Delta T = T_1 - T_0 = -5 - 20 = -25 \text{ °C} .$$

Dále se určí deformace od změny teploty, která je stejná pro všechny směry

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_t = \alpha_t \Delta T = 10^{-5} (-25) = -0,00025 .$$

Současné rozměry se získají z geometrického vyjádření deformací

$$\varepsilon_x = \frac{l'_x - l_x}{l_x} \Rightarrow$$

$$l'_x = (1 + \varepsilon_x)l_x = (1 - 0,00025)0,4 = 0,3999m ,$$

obdobně pro další směry

$$l'_y = (1 + \varepsilon_y)l_y = (1 - 0,00025)0,02 = 0,019995m ,$$

$$l'_z = (1 + \varepsilon_z)l_z = (1 - 0,00025)0,05 = 0,0499875m .$$

6 Obecná napjatost v bodě tělesa

6.1 Tenzor napětí a deformace

V kap. 4.2 jsme definovali normálová a smyková napětí vztahovaná k určitému bodu tělesa. Souhrnně tyto hodnoty definují **stav napjatosti** tělesa v uvažovaném bodu. Stav napjatosti má povahu tenzoru, definovaného jednoznačně v pravouhlé soustavě souřadnic maticí



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Složky tenzoru napětí a jejich význam byly již plně popsány v kap. 4.2. Vzhledem ke vzájemnosti smykových napětí (kap. 4.3.1) se jedná o matici symetrickou. Proto pro popis stavu napjatosti používáme často vektor napětí obsahující 6 složek napětí ve tvaru

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}^T. \quad (6.2)$$

Analogicky lze psát tenzor deformace popisující **stav deformace** tělesa v bodě

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

a vektor deformace se 6 složkami poměrných deformací

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T. \quad (6.4)$$

Základní neznámé v teorii pružnosti jsou tedy reprezentované (celkem 15 neznámých):

- Vektorem posuvů, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$
- Tenzorem poměrných deformací, $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T$
- Tenzorem napětí, $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}^T$

6.2 Geometrické rovnice

V kap. 3.2 byly definovány poměrné deformace. Matematicky formálněji lze vztah (3.1) přepsat pomocí parciálních derivací u a v

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6.6)$$

Poměrné zkosení (vztah (3.2)) pak je

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.7)$$

Zbývající složky vektoru deformace se odvodí ze závislostí ve zbývajících dvou rovinách (plyne též cyklickou záměnou indexů)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (6.9)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (6.10)$$

Těchto 6 rovnic vyjadřujících vztah mezi vektorem posuvů a vektorem poměrných deformací se nazývá geometrické rovnice a v maticovém vyjádření se dají zapsat jako

$$\varepsilon - \partial^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (6.11)$$

kde ∂^T je matice diferenciálních operátorů

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

6.3 Diferenciální rovnice rovnováhy

Všechny složky napětí jsou obecně funkcemi polohy bodu, např. $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$. Stav napjatosti je vázán k bodu tělesa. Přejdeme-li z jednoho bodu tělesa do druhého (velmi blízkého – na diferenciálním elementu o hranách dx, dy, dz), složky napětí se změní o určité přírůstky. Diferenciální element však musí být v rovnováze, tento nutný požadavek vede na tři diferenciální rovnice rovnováhy (Cauchyho rovnice)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \quad (6.15)$$

ve kterých jsou zahrnuty objemové síly X, Y, Z [N/m^3] (např. vlastní tíha).

V maticovém tvaru se rovnice zapíší

$$\partial \sigma + X = 0, \quad (6.16)$$

kde $\mathbf{X} = \{X, Y, Z\}^T$ je vektor objemových sil.

6.4 Fyzikální rovnice

V kap. 5.1 jsme již dospěli k obecnému Hookovu zákonu ve směru osy x

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (6.17)$$

Pro směry y a z analogicky platí

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad (6.19)$$

Pro zkosení platí dále tři vztahy

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (6.20)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (6.21)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (6.22)$$

Hookův zákon pro izotropní materiál můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\varepsilon = C\sigma, \quad (6.23)$$

kde C je matice poddajnosti materiálu vyjádřená pomocí konstant E , ν a G

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Inverzí matice poddajnosti získáme matici tuhosti materiálu D , $D=C^{-1}$ pro vyjádření vektoru napětí pomocí vektoru poměrných deformací

$$\sigma = D\varepsilon. \quad (6.25)$$



Rekapitulace neznámých a základních rovnic teorie pružnosti:

Základní neznámé v teorii pružnosti jsou reprezentované:

- Vektorem přemístění, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$
- Tenzorem přetvoření, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T$
- Tenzorem napětí, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T$.

Těchto 15 neznámých funkcí lze získat z 15 základních rovnic:

- tři Cauchyho rovnice rovnováhy: $\partial\sigma + X = 0$
- šest rovnic přetvoření – přemístění: $\varepsilon - \partial^T u = 0$
- šest fyzikálních rovnic $\varepsilon = C\sigma$ ($\sigma = D\varepsilon$)

6.5 Rovinná úloha

6.5.1 Rovinná napjatost a rovinná deformace

Pro konstrukce, jejichž rozměr ve směru jedné osy (z) je mnohem menší než zbývající rozměry (ve směru x a y), přistupujeme často k idealizaci redukce na dvoudimenzionální úlohu. Složky napětí v takovém případě byly již ukázány na obr. 4.6, vektor napětí obsahuje 3 složky

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T. \quad (6.26)$$

Podobně vektor poměrných deformací má složky

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T. \quad (6.27)$$

Rozlišujeme dva případy: V případě $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\varepsilon_z \neq 0$ se jedná o rovinnou napjatost (stěny, nebráněno deformaci ve směru osy z), v případě $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, $\sigma_z \neq 0$ se jedná o rovinnou deformaci (deformaci ve směru osy z je bráněno, např. idealizace konstrukce přehrad, tunelů apod.).

Tab 6.1: Matice poddajnosti a tuhosti materiálu pro rovinnou napjatost a rovinnou deformaci

	Rovinná napjatost	Rovinná deformace
C	$\frac{1}{G} \begin{bmatrix} \frac{1}{2(1+\nu)} & \frac{-\nu}{2(1+\nu)} & 0 \\ \frac{-\nu}{2(1+\nu)} & \frac{1}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{G} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & \frac{-\nu}{2} & 0 \\ \frac{-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
D	$G \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{-2\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{-2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$G \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

V případě izotropního materiálu jsou všechny materiálové konstanty nezávislé na orientaci souřadnicových os. Matice poddajnosti a tuhosti pro rovinnou napjatost a deformaci mají řád 3x3 a jsou uvedeny v tab. 6.1. Tabulka

ukazuje, že matice pro rovinnou napjatost (levý sloupec) lze přímo získat z matic pro rovinnou deformaci (pravý sloupec) nahrazením Poissonova čísla ν konstantou

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu}. \quad (6.28)$$

6.5.2 Hlavní napětí

Tenzor napětí vyjadřující stav napjatosti v bodě je vázán určitou polohou kartézského souřadnicového systému. Změní-li se poloha tohoto systému, tj. otáčíme-li souřadnicovým systémem, pak se mění hodnoty složek tenzoru napětí. Existuje poloha, při které jsou hodnoty normálových napětí maximální a smyková napětí jsou nulová.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Tato normálová napětí nazýváme hlavní napětí.

V případě rovinné napjatosti otáčíme souřadnicový systém xy a normálové napětí bude maximální při určité hodnotě úhlu α . Tento úhel a rovněž velikosti hlavních napětí se dají odvodit analýzou napětí v šikmém řezu – hledáme extrém tohoto napětí – matematicky první derivace tohoto napětí podle úhlu α je rovna 0 (podrobné odvození viz odkazovaná literatura). Pak platí:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (6.30)$$

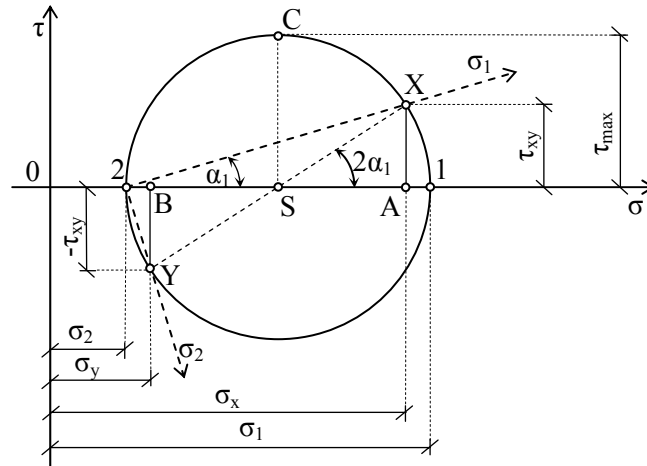
Tato rovnice určuje dva vzájemně kolmé směry ($\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$). Velikosti hlavních napětí jsou vyjádřeny vztahem

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (6.31)$$

Analogie s výpočtem hlavních momentů setrvačnosti v základech stavební mechaniky je zřejmá – tato shoda je důsledkem tenzorové povahy těchto veličin.

6.5.3 Mohrova kružnice

Velikost a směr hlavních napětí lze též určit pomocí tzv. Mohrovy kružnice napětí (Otto Mohr, 1882), obr. 6.1.



Obr. 6.1: Mohrova kružnice napětí

Při jejím sestrojení postupujeme následovně:

- Na vodorovnou osu x vynášíme normálová napětí, σ_x vytne na ose x bod A , σ_y bod B .
- V těchto bodech, A a B , vyneseme kolmo smykové napětí τ_{xy} , z bodu A nahoru je-li smykové napětí kladné, z bodu B pak opačně. Tím získáme body X a Y .
- Spojnice bodů XY představuje průměr Mohrovy kružnice a vytne nám střed kružnice S .
- Opíšeme-li pak kružnici, její průsečíky s vodorovnou osou určují hodnoty hlavních napětí, smyková napětí jsou nulová. Poloměr Mohrovy kružnice je roven maximálnímu smykovému napětí τ_{max} .

Je zřejmé, že

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (6.32)$$

Mohrova kružnice představuje množinu všech možných hodnot vektoru napětí při rovinné napjatosti, při otáčení souřadnicového systému xy . Zahrnuje tak i případy maximálních normálových napětí (hlavních napětí) a stav maximálního smykového napětí.



6.5.3.1 Příklad 5

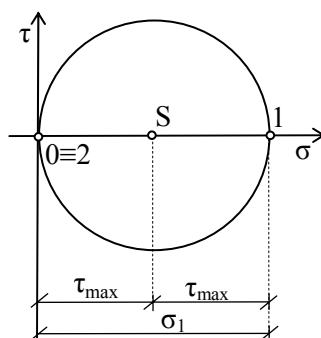


S pomocí Mohrovy kružnice určete druhé hlavní napětí σ_2 , je-li maximální smykové napětí $\tau_{max} = \sigma_1/2$.

Řešení:



Velikost τ_{max} určuje poloměr Mohrovy kružnice. Napětí $\sigma_1 = 2\tau_{max}$ určuje druhý průsečík Mohrovy kružnice s osou σ . První průsečík určující σ_2 je o dva poloměry menší a tedy $\sigma_2 = 0$. Jedná se tedy o případ osového tahu, kdy $\sigma_x = \sigma_1$.



Obr. 6.2: Mohrova kružnice pro osový tah

6.5.3.2 Příklad 6

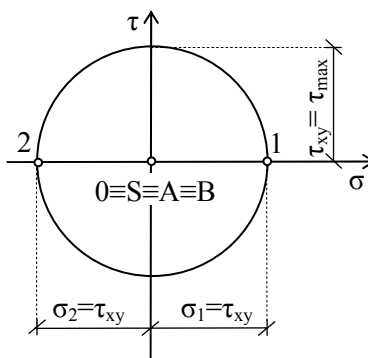


S pomocí Mohrovy kružnice určete velikost hlavních napětí σ_1 a σ_2 , jsou-li velikosti napětí $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ a $\tau_{xy} > 0$.

Řešení:



Vzhledem k $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ leží body A a B v počátku. Smykové napětí τ_{xy} se vynese přímo na osu τ a je rovno τ_{max} , které určuje poloměr Mohrovy kružnice. Vynese-li se τ_{xy} od počátku oběma směry dostane se $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ a $\sigma_1 = \tau_{xy}$. Jedná se tedy o případ čistého smyku.



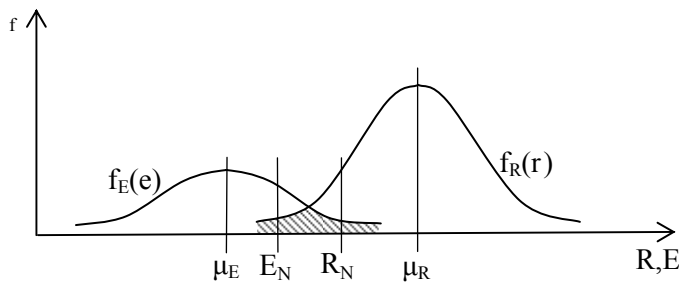
Obr. 6.3: Mohrova kružnice pro čistý smyk

7 Koncepce spolehlivosti při navrhování

Návrh konstrukce se obecně skládá z celé řady jednotlivých kroků vedoucích k návrhu dílčích prvků, které musí splňovat různá kritéria spolehlivosti. Tato kritéria musí samozřejmě splňovat konstrukce i jako celek. Jinými slovy, konstrukce musí být navržena tak, aby měla vyšší pevnost (odolnost, odpor) než je účinek zatížení. Avšak existuje mnoho příčin a zdrojů náhodnosti v zatížení a odolnosti konstrukce. Výchozí veličiny nejsou téměř nikdy veličinami deterministickými, ve skutečnosti to jsou veličiny náhodné, vyznačující se větší či menší proměnlivostí, která je (i když často jen přibližně) známa.



Jednoduchý případ uvažující dvě náhodné veličiny – odolnost konstrukce R a účinek zatížení E , je na obr. 7.1. Jejich proměnlivost je charakterizována odpovídajícími funkcemi hustoty pravděpodobnosti $f_R(r)$ a $f_E(e)$. Na obrázku jsou znázorněny návrhové deterministické (nominální) hodnoty těchto veličin R_N a E_N , používané při klasických přístupech podle norem (metoda mezních stavů, metoda dovolených namáhání). Společným rysem těchto přístupů je požadavek, aby R_N byl větší než E_N s určitou specifikovanou rezervou spolehlivosti. Nepracuje se však přímo se středními hodnotami odporu konstrukce a účinku zatížení μ_R, μ_E .



Obr. 7.1: Klasický přístup: odolnost konstrukce R a účinek zatížení E - dvě náhodné veličiny.

Deterministicky formulovaná podmínka spolehlivosti má tvar

$$R_N \geq E_N. \quad (7.1)$$

Pravděpodobnostní přístup k problému vyžaduje tvar

$$R - E \geq 0, \quad (7.2)$$

kde R a E jsou náhodné veličiny s hustotami pravděpodobnosti $f_R(r)$ a $f_E(e)$. Některé příklady odporu R (bariéry) a odpovídajícího účinku E (akce) jsou uvedeny v tab 7.1.

Tab 7.1: Příklady účinku a odporu konstrukce

E	R
ohybový moment v určitém průřezu nosníku od daného zatížení	ohybová únosnost tohoto průřezu (mezní moment únosnosti průřezu)
extrémní zatížení (kombinace zatížení) sledované konstrukce	mezní únosnost této konstrukce
napětí v zemině od existujícího zatížení	smyková pevnost zeminy a její koheze
maximální průhyb nosníku od daného zatížení	dovolený průhyb

V současné praxi se používají podmínky spolehlivosti odvozené z požadavků posouzení tzv. mezních stavů. Mezní stavy jsou takové stavy, při jejichž překročení konstrukce přestává plnit návrhové požadavky na užitné vlastnosti. Mezní stavy mohou být vztaženy k trvalým, přechodným nebo mimořádným návrhovým situacím. Obecně se rozlišují mezní stavy únosnosti a mezní stavy použitelnosti:

Mezní stavy únosnosti jsou takové mezní stavy, které souvisejí se zřícením a podobnými poruchami konstrukce. Za mezní stavy únosnosti se pokládají také stavy předcházející zřícení konstrukce považované pro jednoduchost za vlastní zřícení (např. vznik velkých trhlin nebo oblastí, kde se drtí materiál). Tato kategorie mezních stavů má přirozeně nejvyšší míru závažnosti. Mezní stavy únosnosti se týkají:

- bezpečnosti osob;
- bezpečnosti konstrukce a jejího obsahu.

Podmínky spolehlivosti, které vyplývají z mezních stavů únosnosti mají tedy obvykle tvar, který lze slovně vyjádřit jako:

$$\text{Účinek zatížení} \leq \text{odolnost konstrukce.} \quad (7.3)$$

Mezní stavy použitelnosti souvisejí s podmínkami, po jejichž překročení nejsou splněny provozní požadavky na konstrukci nebo její část. Požadavky použitelnosti se týkají:

- funkce stavebního objektu a jeho částí;
- pohodlí osob;
- vzhledu.

Jedná se např. o deformace a posuny, které ovlivňují vzhled nebo účinné využití konstrukce, nadměrné kmitání, které způsobuje nepohodlí osob, poškození konstrukce nebo nesených materiálů, nebo které omezuje jejich funkční účinnost; poškození (včetně trhlin), která mohou nepříznivě ovlivnit vzhled, trvanlivost nebo funkce konstrukce;

Odpovídající podmínky spolehlivosti tedy mají u těchto mezních stavů obvykle tvar:

$$\text{Deformační účinek vyvozený zatížením} \leq \text{přípustná deformace} \quad (7.4)$$

Zde pod pojmem „deformace“ může být míněn nejenom průhyb či posun, ale též šířka trhliny, frekvence kmitání apod.

Spolehlivost návrhu je tedy zajištěna skutečností, že jak odolnost konstrukce R tak účinek zatížení E vyčíslujeme s výpočtovými hodnotami, které stanovují normy pro navrhování. Pracujeme např. s výpočtovou pevností materiálu, která je mnohem nižší, než průměrná. Výpočtové charakteristiky jsou stanoveny v normách na základě podrobných statistických rozborů.

8 Závěr

8.1 Shrnutí



Tento text představuje první ze tří modulů zpracovaných pro kombinované studium předmětu Pružnost a pevnost. Znalost látky tohoto modulu je nezbytná před studiem druhého a třetího modulu, neboť seznamuje čtenáře se základní pojmy a předpoklady lineární teorie pružnosti.

V kapitolách 2 – 6 byly definovány základní pojmy v elementární rovině technické pružnosti. Kapitola 6 pak již opouští rovinu technické pružnosti a rozšiřuje částečně záběr do matematické teorie pružnosti. Je rovněž uvedena základní koncepce spolehlivosti při navrhování, jako doplňující důležitá informace k předmětu Pružnost a pevnost.

8.2 Otázky k procvičování



- Který předpoklad pružnosti umožňuje pracovat s deformacemi a napětími jako spojitými funkcemi?
- Když má materiál ve všech bodech stejné vlastnosti, nazývá se homogenní nebo izotropní?
- Co vyjadřuje princip superpozice účinků?
- Za jakých předpokladů je možno použít princip superpozice účinků?
- Která veličina popisuje relativní délkové, resp. úhlové změny v tělese?
- Vysvětlete rozdíl mezi posuny a poměrnými protaženími.
- Vysvětlete pojem vnitřní síly.
- Vyjmenujte vnitřní síly prostorově namáhaného prutu.
- Jaká veličina vystihuje namáhání konkrétního bodu tělesa?
- Jaké jsou dva základní druhy napětí?
- Které napětí působí kolmo na plochu a které v ploše?
- Jaká je jednotka napětí?
- Vysvětlete význam indexů označujících napětí v kartézském souřadném systému.
- Co vyjadřuje věta o vzájemnosti smykových napětí?
- Co vyjadřuje Saint-Venantův princip?
- Popište praktické důsledky Saint-Venantova principu.
- Která napětí jsou svázána s poměrným protažením a která se zkosením?
- Co vyjadřuje Poissonův součinitel?
- Jaká je hodnota Poissonova součinitele pro beton a ocel?

- Jaká je maximální hodnota Poissonova součinitele?
- Jaké materiálové charakteristiky vystupují ve fyzikálních vztazích pro lineárně izotropní materiál a kolik z těchto charakteristik je nezávislých?
- Jaké je omezení platnosti Hookova zákona?
- Co jsou to plastické deformace a kdy vznikají?
- Charakterizujte materiál křehký a kvazikřehký pomocí diagramu napětí-deformace.
- Co je změkčení a zpevnění?
- Jak nazýváme grafické vyjádření závislosti deformace a napětí?
- Kolik funkcí posunů, deformací a napětí popisuje stav namáhaného tělesa?
- Jakou závislost vyjadřují statické diferenciální podmínky rovnováhy a kolik jich je?
- Jakou závislost vyjadřují fyzikální rovnice a kolik jich je?
- Jakou závislost vyjadřují geometrické vztahy a kolik jich je?
- Jaká materiálová charakteristika popisuje deformaci od změny teploty?
- Zvýšení teploty způsobuje poměrné protažení nebo zkrácení?
- Jaké problémy posuzuje mezní stav únosnosti?
- Jaké problémy posuzuje mezní stav použitelnosti?
- Jaké jsou neznámé a základní rovnice teorie pružnosti?
- Jaký je rozdíl mezi rovinnou napjatostí a rovinnou deformací?
- Jak lze charakterizovat směry hlavních napětí ?
- Jaký úhel mezi sebou svírají směry prvního a druhého hlavního napětí?

9 Studijní prameny

9.1 Seznam použité literatury

- [1] Bittnar, Z. - Šejnoha J. *Numerické metody mechaniky I.* Praha, vydavatelství ČVUT, 1992.
- [2] Kaiser, J. a kol. *Pružnost a plasticita I.* Bratislava, Alfa, 1990.
- [3] Servít, R. - Doležalová, E. - Crha, M. *Teorie Pružnosti a plasticity I.* Praha, SNTL/Alfa, 1981
- [4] Servít, R. - Drahoňovský, Z. - Šejnoha, J. - Kufner, V. *Teorie Pružnosti a plasticity II.* Praha, SNTL/Alfa, 1984
- [5] Šmiřák, S. *Pružnost a plasticita I.* (skriptum), Brno, PC-DIR, 1995.
- [6] Teplý, B. - Šmiřák, S. *Pružnost a plasticita II.* (skriptum), Brno, vydavatelství VUT, 1993.



9.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [7] Horníková, J. - Burša, J. *Pružnost a pevnost* (Interaktivní studijní text), Brno, vydavatelství VUT, 2002.
- [8] Teplý, B. – Novák, D. *Spolehlivost stavebních konstrukcí* (skriptum), Brno, vydavatelství VUT, 2004.



9.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [9] Bažant, Z. P. - Cedolin, L. *Stability of Structures.* New York, Oxford University Press, 1991.



