

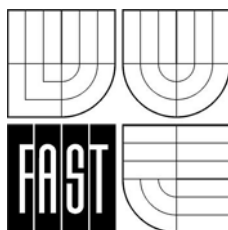
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

DOC. ING. ZDENĚK KALA, Ph.D.
ING. JIŘÍ KALA, Ph.D.

PRUŽNOST A PEVNOST

MODUL BD02-M03

SLOŽENÉ PŘÍPADY NAMÁHÁNÍ PRUTU
STABILITA A VZPĚRNÁ PEVNOST TLAČENÝCH PRUTŮ



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

© ... Doc. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

Ing. Jiří Kala, Ph.D.

OBSAH

1 Úvod.....	5
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu	5
1.4 Klíčová slova.....	5
2 Složené případy namáhání prutu.....	7
2.1 Prostorový ohyb	8
2.2 Tah (tlak) a ohyb v rovině.....	10
2.3 Mimosředný tah a tlak	12
2.3.1 Jádru průřezu.....	16
2.3.2 Dimenzování prutů na kombinované namáhání	21
3 Stabilita a vzpěrná pevnost tlačných prutů.....	31
3.1 Eulerovo řešení	33
3.1.1 Vzpěrná délka	34
3.2 Kritická síla a napětí	36
3.3 Pevnostní pojetí vzpěru. Posouzení prutů na vzpěr	39
3.4 Kombinace ohybu a vzpěru.....	46
4 Závěr.....	48
4.1 Shrnutí.....	48
4.2 Kontrolní otázky	48
5 Studijní prameny	48
5.1 Seznam použité literatury.....	48
5.2 Seznam doplňkové studijní literatury	48

1 Úvod

1.1 Cíle

Modul, který se chystáte studovat, obsahuje informace o případech složeného namáhání prutů a o stabilitě tlačných prutů. Kapitoly modulu navazují na moduly 1 a 2. Cílem je shrnout obecná témata, která jsou tradiční součástí nauky o pružnosti, a poskytnout učební text studentům distančního studia stavební fakulty. Všem uživatelům budeme vděční za upozornění na případné chyby a opomenutí v textu.



31. srpna 2004

Autoři

1.2 Požadované znalosti

Student by měl mít základní znalosti z teoretických předmětů (zejména matematiky a fyziky) ze střední školy, rozšířené o znalosti z teoretických předmětů prvního ročníku matematika I, matematika II a základy stavební mechaniky.



1.3 Doba potřebná ke studiu

Celková optimální doba pro prostudování kapitol 2 je, včetně zopakování základních pojmů, 4 hodiny. Taktéž studium kapitoly 3 činí cca 4 hodiny. Celková doba pro prostudování modulu tedy činí cca 10 hodin, pokud budete procházet i řešené příklady, pak se doba prodlouží asi o 3 až 4 hodiny.



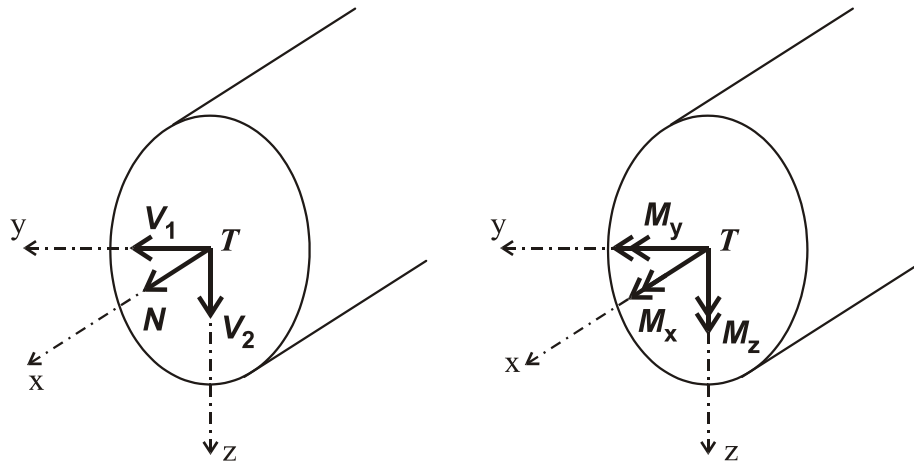
1.4 Klíčová slova

Prostorový ohyb, tah (tlak) a ohyb v rovině, mimostředný tah a tlak, dimenzování nosníků v případě složeného namáhání, jádro průřezu, stabilita, vzpěr, Eulerovo řešení, kritická síla, kritické napětí, vzpěrná délka, pevnostní pojetí vzpěru, ohyb se vzpěrným tlakem.



2 Složené případy namáhání prutu

Složeným (kombinovaným) namáháním se rozumějí různé kombinace dříve uvedených namáhání prutu (tah, tlak, ohyb, krut, smyk). Prut v prostoru může být namáhán třemi silovými a třemi momentovými složkami vnitřních sil.



Obr. 1: Dílčí složky namáhání prutu

TABULKA 1

SLOŽKY SIL	
N	Normálová síla (tah, tlak)
V_1, V_2	Posouvající síly

TABULKA 2

SLOŽKY MOMENTŮ	
M_x	Krouticí moment
M_y, M_z	Ohybové momenty (rovinné ohyby v rovinách xz, xy)

Od složek N, M_y, M_z vznikají normálová napětí σ a od složek M_x, V_1, V_2 vznikají napětí smyková τ .

Z jednotlivých složek vnitřních sil můžeme sestavit celou řadu složených namáhání, z nichž se nejčastěji vyskytují následující:

- 1) $M_y + M_z$ - prostorový (šikmý) ohyb
- 2) $N + M_y + M_z$ - tah (tlak) + ohyb (rovinný či prostorový)

Mimoto je někdy třeba též ověřovat současné účinky kroucení s tahem nebo tlakem a s ohybem.

- 3) $M_0 + V$ - ohyb a smyk
- 4) $M_0 + M_x$ - ohyb (rovinný, prostorový) + krut
- 5) $N + M_x$ - tah (tlak) + krut,

kde M_0 je vektor ohybového momentu. Je zřejmé, že kombinace 1) a 2) jsou kombinacemi, u kterých je výsledná napjatost jednoosá, zatímco u zbývajících případů jde o rovinnou napjatost. Platí, že u prvních dvou kombinací je možno složky napětí vzájemně sčítat, zatímco pro zbývající kombinace je třeba vycházet z příslušných teorií pružnosti a pevnosti.

Pro řešení případů složeného namáhání používáme princip superpozice, který lze však aplikovat jen tehdy:

- 1) platí-li Hookův zákon (fyzikální linearita)
- 2) nemají-li deformace podstatný vliv na velikost statických veličin (geometrická linearita).



Poznámka: Pokud neplatí první, druhá nebo obě podmínky nelze princip superpozice uplatnit (např. při excentrickém tlaku prutů malé ohybové tuhosti).

2.1 Prostorový ohyb



K prostorovému ohybu dochází tehdy, pokud vektor ohybového momentu M_0 leží v rovině průřezu, ale vzhledem k hlavním centrálním osám y, z má obecnou polohu, viz obr. 1. Průhybová čára není rovinná křivka. Řešení prostorového ohybu provedeme tak, že vektor ohybového momentu rozložíme do dvou složek M_y a M_z , které leží v hlavních centrálních osách průřezu y, z . Každý z těchto momentů vyvolává rovinný ohyb. Prostorový ohyb si můžeme představit jako superpozici dvou ohybů rovinných. V obecném bodě A o souřadnicích y, z vyvolává moment M_y napětí:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad (2.1)$$

a moment M_z vyvolává napětí:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y \quad (2.2)$$

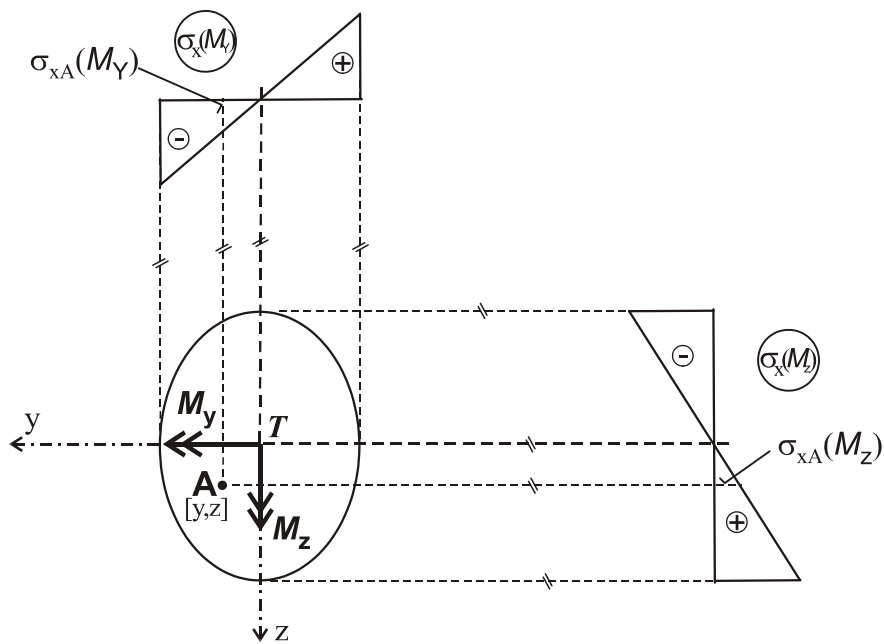


Poznámka: Momenty M_y a M_z se považují za kladné, vyvolávají-li v 1. kvadrantu tahové napětí.

Výsledné napětí v bodu A o souřadnicích y, z bude mít pak velikost

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (2.3)$$

Moment M_y se uvažuje jako kladný, pokud vyvolává kladné napětí pro $z > 0$; moment M_z se uvažuje jako kladný, pokud vyvolává kladné napětí pro $y < 0$.

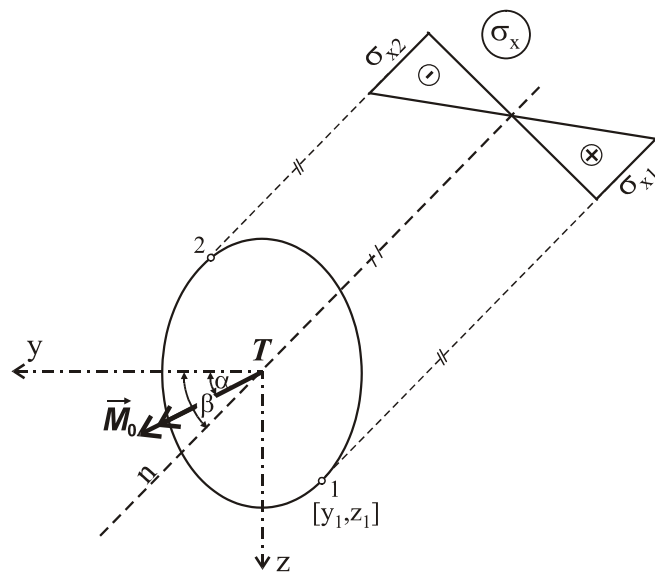


Obr. 2: Průběh složek normálových napětí od prostorového ohybu

Polohu neutrální osy získáme z podmínky $\sigma_x = 0$. Neutrální osa prochází těžištěm, neboť rovnice (2.3) je splněna při $y = 0$, $z = 0$. Sklon neutrální osy úhel β je možno určit z rovnice:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}, \quad (2.4)$$

kde je úhel α úhlem výsledného vektoru ohybového momentu. Jakmile známe polohu neutrální osy, určíme od ní nejvíce vzdálené vlákna, ve kterých je napětí extrémní; podle obr. 3 jsou to vlákna 1 a 2. Na rozdíl od rovinného ohybu není neutrální osa shodná s momentovou osou.



Obr. 3: Průběh výsledného normálového napětí po průřezu

2.2 Tah (tlak) a ohyb v rovině



Působí-li síla kolmo k průřezu, ale mimo těžiště, vzniká kombinované namáhání tahu (tlaku) a ohybu. Zabývejme se nejdříve případem tahu (tlaku) a rovinného ohybu, kdy síla působí na jedné z hlavních centrálních os.

Řešení provedeme tak, že v těžišti připojíme sílu $\bar{N} \equiv N$ a $\bar{\bar{N}} = -N$, viz obr. 4. Síly $\bar{\bar{N}}$ a N tvoří dvojici, která namáhá prut čistým ohybem $M_y = N \cdot a$. Síla \bar{N} působí v těžišti a namáhá prut čistým tahem. Protože platí, že $\bar{N} = N$, je možno normálové napětí od prostého tahu určit dle vztahu:

$$\sigma_{x(N)} = \frac{N}{A} \quad (2.5)$$

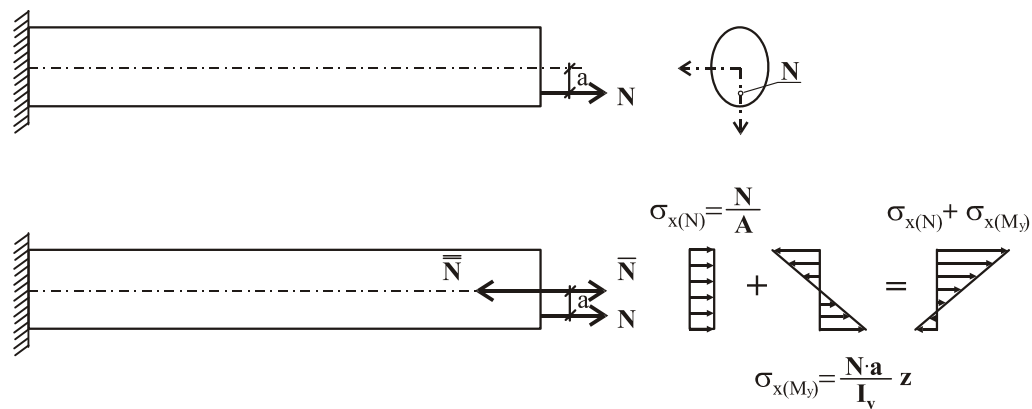
Normálové napětí od prostého tahu je konstantní po celém průřezu. Pro ohybové napětí platí:

$$\sigma_{x(M_y)} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{N \cdot a}{I_y} z \quad (2.6)$$

Při řešení opět použijeme princip superpozice. Výsledné napětí pak je:

$$\sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_y)} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot a}{I_y} z \quad (2.7)$$

Průběh napětí je zobrazen na obrázku.



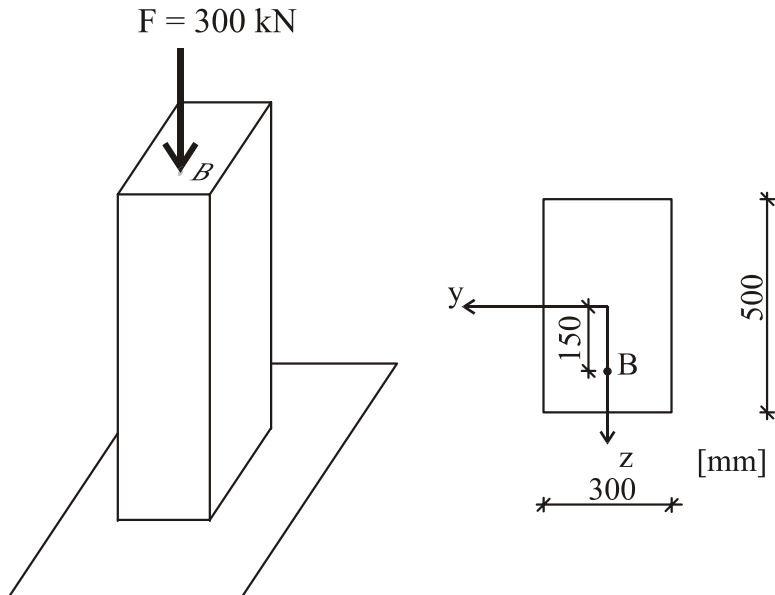
Obr. 4: Průběh normálového napětí od tahu a ohybu v rovině



Poznámka: Je patrné, že při kombinaci tahu (resp. tlaku) a ohybu se neutrální osa posune mimo těžiště průřezu. Polohu neutrální osy dostaneme z podmínky, že je v ní výsledné napětí nulové.

Příklad 2.1*Zadání*

Určete extrémní hodnoty normálového napětí, vypočtete polohu neutrální osy a vykreslete průběh normálového napětí obdélníkového průřezu sloupu, viz obr.5.



Obr. 5: Sloup obdélníkového průřezu zatížený tlakovou silou

Řešení

Sloup je namáhán mimostředným tlakem, protože tlaková síla nepůsobí v těžišti. Nosník je zatížen tlakovou silou

$$N = -300 \text{ kN}$$

a ohybovým momentem M_y působícím v hlavní rovině xz .

$$M_y = N \cdot a = -300 \text{ kN} \cdot 0,15 \text{ m} = -45 \text{ kNm}$$

Pro výpočet průběhu normálového napětí je třeba určit průřezové charakteristiky A , I_y :

$$A = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,5^3 = 0,003125 \text{ m}^4$$

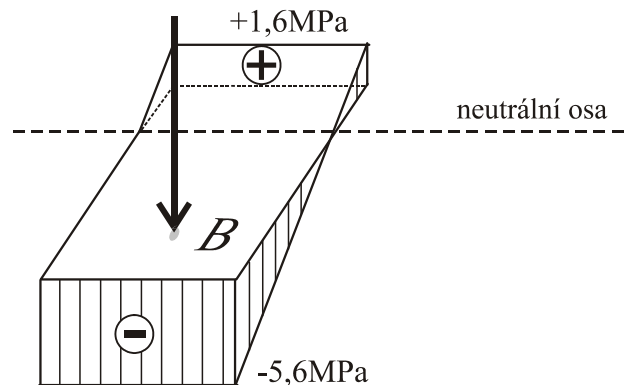
Polohu neutrální osy dostaneme z podmínky, že je v ní výsledné napětí nulové.

$$\sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_y)} = \frac{-300 \cdot 10^3}{0,15} + \frac{-300 \cdot 10^3 \cdot 0,15}{0,003125} z = 0$$

Z této podmínky obdržíme polohu neutrální osy $z = -0,139$ m. Extrémní hodnoty σ_x jsou v bodech nejvíce vzdálených od neutrální osy, tj. na okrajích průřezu rovnoběžných s osou y .

$$\sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_y)} = \frac{-300 \cdot 10^3}{0,15} + \frac{-300 \cdot 10^3 \cdot 0,15}{0,003125} \cdot 0,25m = -5,6MPa$$

$$\sigma_x = \sigma_{x(N)} + \sigma_{x(M_y)} = \frac{-300 \cdot 10^3}{0,15} + \frac{-300 \cdot 10^3 \cdot 0,15}{0,003125} \cdot (-0,25m) = +1,6MPa$$



Obr. 6: Těleso normálového napětí

Hodnota normálového napětí na obr. 6 závisí pouze na souřadnici z , proto by stačilo nakreslit průběh napětí pouze po výšce průřezu.

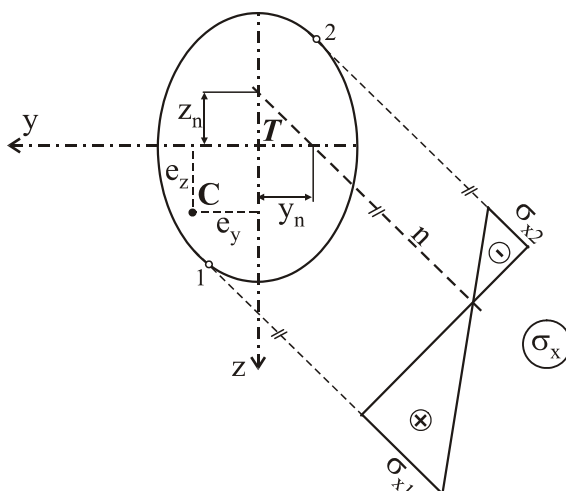
2.3 Mimostředný tah a tlak



Uvažujme nyní sílu, která působí kolmo k průřezu, ale neleží na žádné hlavní centrální ose. Podobně jako v předcházející kapitole převedeme případ připojením „nulové“ síly, tj. dvou sil $\bar{N} = N$ a $\bar{N} = -N$ v těžišti na namáhání tahem (resp. tlakem) a prostorového ohybu. Veškeré veličiny pak plynou ze superpozice vztahů pro osový tlak a prostorový ohyb. Superpozicí napětí od tahu a prostorového ohybu obdržíme výraz:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (2.8)$$

Síla N je kladná, pokud v průřezu vyvolává tahové napětí. Moment M_y se uvažuje jako kladný, pokud vyvolává kladné napětí pro $z > 0$; moment M_z se uvažuje jako kladný, pokud vyvolává kladné napětí pro $y < 0$.



Obr. 7: Průběh normálového napětí od mimostředného tahu

Ohybové momenty je možno vyjádřit v závislosti na mimostředně působící síle N .

$$M_y = N \cdot e_z, \quad (2.9)$$

kde e_y a e_z jsou složky excentricity; jako kladné se uvažují podle smyslu os souřadnic. Využijeme-li známých vztahů pro poloměry setrvačnosti i_y a i_z

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A}, \quad (2.10)$$

pak dosazením (2.9) a (2.10) do (2.8) a úpravou dostáváme

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_z}{A \cdot i_y^2} z - \frac{(-N \cdot e_y)}{A \cdot i_z^2} y = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_y}{i_z^2} y \right) \quad (2.11)$$

Aby bylo možno určit rozložení napětí a jeho extrémní hodnoty v průřezu, je třeba nejprve najít polohu neutrální osy. V bodech, jimiž prochází neutrální osa, je napětí nulové. Nulovou hodnotu může mít pouze závorka, což vyjádří podmínku:

$$1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_y}{i_z^2} y = 0 \quad (2.12)$$

Úseky, které neutrální osa vytíná na osách y a z označené na obr. 7 jako y_n a z_n , je možno určit dosazením $z=0$, resp. $y=0$ do (2.12) a jsou rovny:

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}, \quad z_n = -\frac{i_y^2}{e_z} \quad (2.13)$$

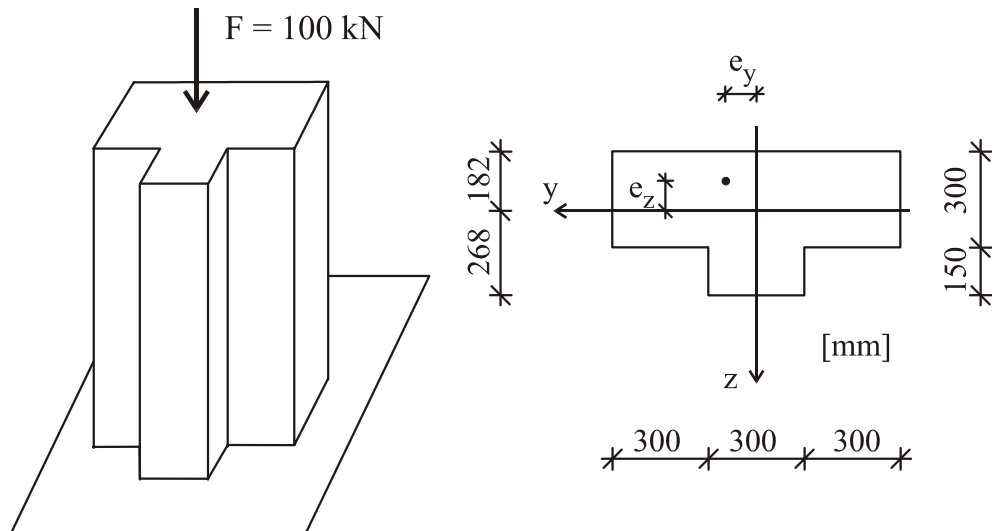
Záporná znaménka ukazují, že neutrální osa neprochází kvadrantem, v němž leží působiště tahové (resp. tlakové) síly.

Příklad 2.2

Zadání



Sloup s průřezem podle obr. 8 je v bodě A zatížen tlakovou silou o velikosti $F=100\text{kN}$. Určete extrémní hodnoty napětí a ověřte, zda nepřekročí maximální dovolené hodnoty: v tahu 1MPa a v tlaku 14MPa .



Obr. 8: Geometrie a zatížení sloupu

Plocha průřezu má hodnotu:

$$A = 315000\text{mm}^2$$

Průřez je jednoose symetrický, což usnadňuje určení hlavních centrálních momentů setrvačnosti.

$$I_y = 406206 \cdot 10^4\text{mm}^4$$

$$I_z = 1856250 \cdot 10^4\text{mm}^4$$

Dále vyjádříme poloměry setrvačnosti:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{406206 \cdot 10^4}{315000} = 12895\text{mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1856250 \cdot 10^4}{315000} = 58929\text{mm}^2$$

Složky excentricity vztahované k těžišti jsou:

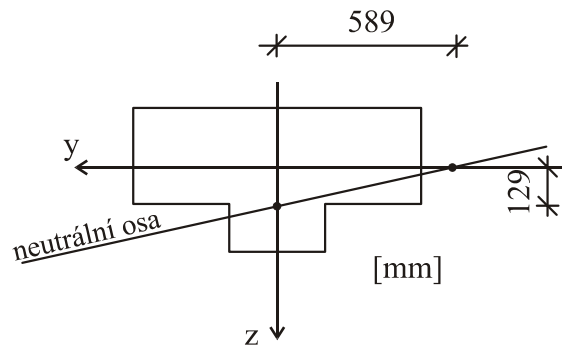
$$e_y = 100\text{mm}$$

$$e_z = -100\text{mm}$$

Polohu neutrální osy určíme z podmínky (2.12) jako:

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} = \frac{58929}{100} = -589\text{mm}$$

$$z_n = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{12895}{-100} = 129\text{mm}$$

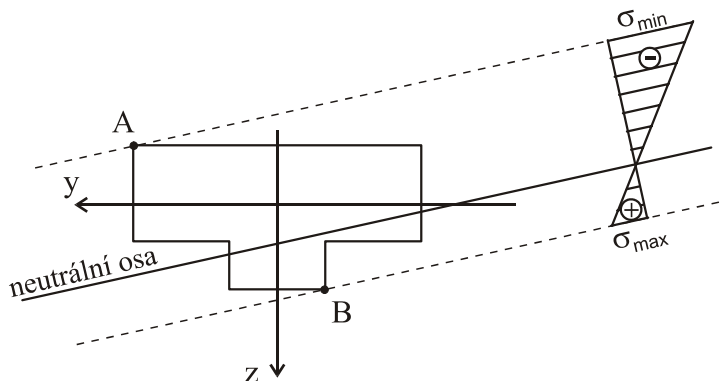


Obr. 9: Poloha neutrální osy na průřezu

Extrémní napětí budou v bodech nejvzdálenějších od neutrální osy průřezu.

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_y}{i_z^2} y \right) = \frac{-100 \cdot 10^3}{0,315} \left(1 + \frac{-0,1}{0,012895} (-0,182) + \frac{0,1}{0,058929} (0,45) \right) = -1,01\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_y}{i_z^2} y \right) = \frac{-100 \cdot 10^3}{0,315} \left(1 + \frac{-0,1}{0,012895} 0,268 + \frac{0,1}{0,058929} (-0,15) \right) = 0,4\text{MPa}$$



Obr. 10: Sklopený průmět průběhu normálového napětí

Porovnáním obdržných napětí s mezními dovolenými hodnotami posoudíme, zda průřez vyhovuje, či nikoliv.

$$|\sigma_{\max}| = 0,4\text{MPa} < 1\text{MPa} \dots \text{vyhovuje}$$

$$|\sigma_{\min}| = 1,01\text{MPa} < 14\text{MPa} \dots \text{vyhovuje}$$

Vzhledem k tomu, že maximální dovolené hodnoty tahového a tlakového napětí nejsou překročeny, průřez na dané zatížení vyhovuje.

2.3.1 Jádru průřezu



Některé stavební materiály (zdivo, beton apod.) mají pevnost v tahu podstatně nižší než v tlaku. Proto je u nich účelné, aby byl průřez namáhán pouze tlakovým napětím. Toho lze při lineárním působení dosáhnout tehdy, pokud neutrální osa probíhá mimo průřez, maximálně se ho dotýká.

Dotýká-li se neutrální osa právě obrysu průřezu a nikde jej neprotíná, působí síla na hranici oblasti, která se nazývá jádrem průřezu.

Definice



Jádru průřezu je určitá oblast v okolí těžiště průřezu, v níž musí působit výslednice vnitřních sil, aby v celém průřezu vznikla normálová napětí téhož znaménka.

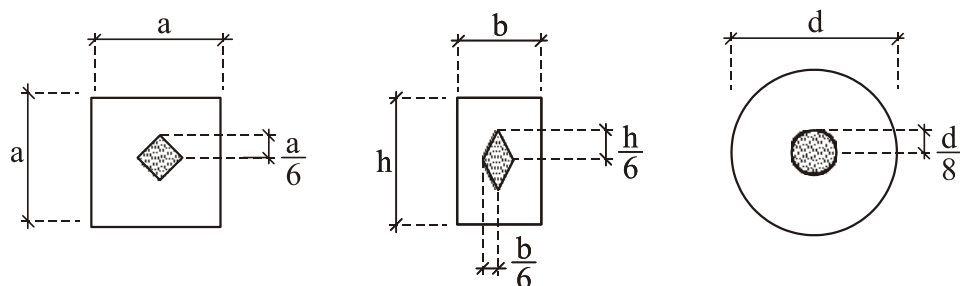
Jádru průřezu je vždy omezeno uzavřenou křivkou tzv. *jádrovou čarou* a závisí pouze na tvaru a velikosti průřezu. Působí-li kolmá síla kdekoli uvnitř jádra, pak v celém průřezu vznikají napětí stejného znaménka.

Jádrovou čaru získáme tak, že klademe neutrální osu postupně do všech tečných poloh k obrysu průřezu, při nichž jej neprotíná („kotálíme“ ji kolem průřezu).

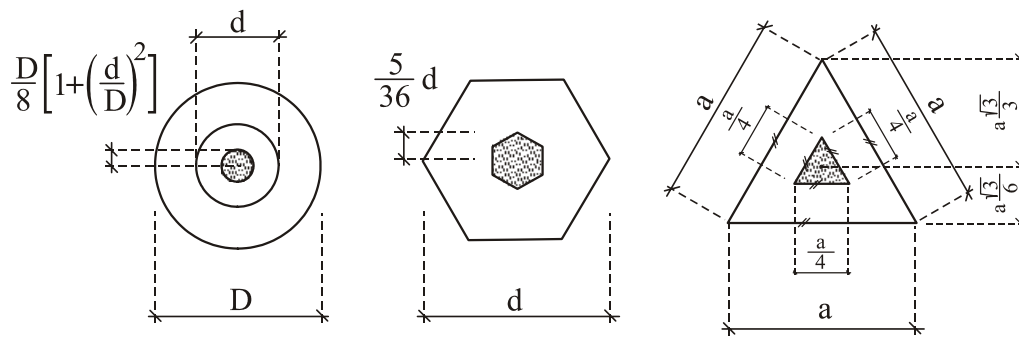
V rovnicích (2.13) představují úseky, které vytíná neutrální osa na souřadnicových osách (tedy y_n a z_n) veličiny známé, dané volbou polohy neutrální osy. Příslušné souřadnice jádrové čáry jsou y , z excentricitami myšlené síly pohybující se po jádrové čáře. Postupnou volbou jednotlivých poloh neutrální osy (1, ..., j , ...) obdržíme úseky y_j a z_j , které vytíná neutrální osa na osách souřadnic:

$$y_j = e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}}, \quad z_j = e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}} \quad (2.14)$$

Na obr. 11 jsou zobrazena jádra průřezu pro některé vybrané případy průřezů.

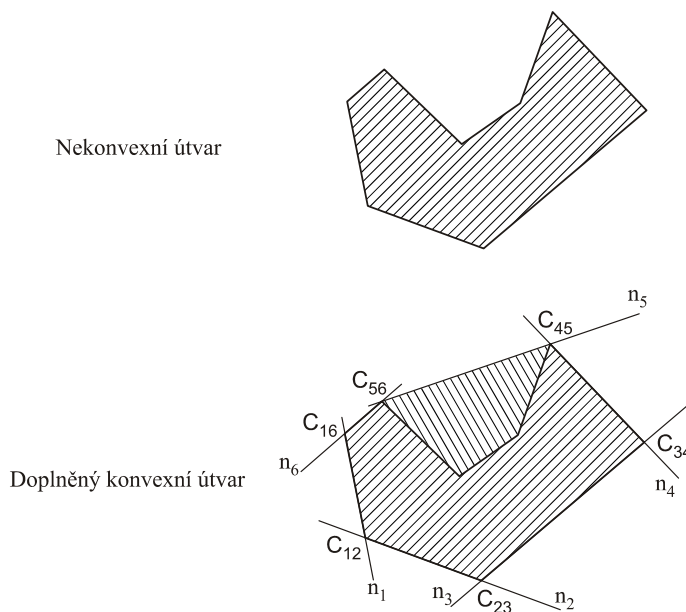


Obr. 11a: Jádru průřezu – základní případy průřezů



Obr. 11b: Jádru průřezu – základní případy průřezů (pokrač.)

Poznámka: S využitím principu duality je možno strany jádra průřezu také určit jako neutrální osy k tlakovým centřům umístěným ve vrcholech obrysu průřezu C_{ij} , viz obr. 12. Při hledání jádra průřezu je třeba doplnit nekonvexní průřez na konvexní útvar (v konvexním útvaru lze libovolné dva body spojit úsečkou, jejíž všechny body patří k tomuto útvaru), přičemž všechny průřezové charakteristiky jsou počítány pro skutečný (tj. nedoplněný) průřez.



Obr. 12: Jádru průřezu – neutrální osy nekonvexního útvaru

Konvexní útvar využíváme pro určování poloh neutrálních os, ke kterým hledáme vrcholy jádrového obrazce, resp. při využití duality ke stanovení tlakových center, ke kterým hledáme neutrální osy tvořící strany jádra průřezu.

Příklad 2.3

Zadání

Určete jádro obdélníkového průřezu, jehož šířka je b a výška h .

Řešení

Jádro průřezu určíme tak, že nejprve stanovíme souřadnice vrcholů jádra (příslušná tlaková centra) pro neutrální osy v tečné poloze n_1, n_2, n_3, n_4 a tyto pak spojíme úsečkou.

Průřezové charakteristiky jsou:

$$A = b \cdot h$$

$$I_y = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

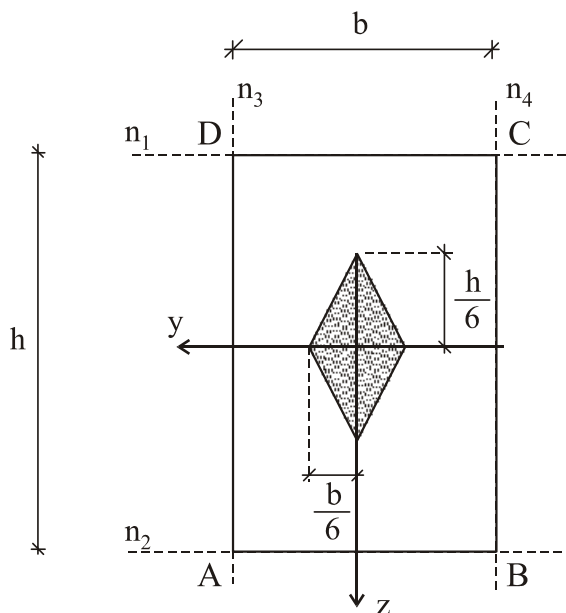
$$I_z = \frac{1}{12} h \cdot b^3$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{b \cdot h} = \frac{1}{12} h^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12} h \cdot b^3}{b \cdot h} = \frac{1}{12} b^2$$

Neutrální osu n_1 položíme do strany CD, takže na hlavních centrálních osách y, z vytíná úseky:

$$y_{n1} = \infty \quad z_{n1} = -\frac{h}{2}$$



Obr. 13: Jádro obdélníkového průřezu

Dosazením do vztahu (2.14) dostaneme souřadnice jádra:

$$y_1 = e_{y1} = -\frac{i_z^2}{y_{n1}} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{\infty} = 0$$

$$z_1 = e_{z1} = -\frac{i_y^2}{z_{n1}} = -\frac{\frac{1}{12}h^2}{-\frac{h}{2}} = +\frac{h}{6}$$

Obdobně neutrální osu n_2 položíme do strany AB, takže na hlavních centrálních osách y, z vytíná úseky:

$$y_{n2} = \infty$$

$$z_{n2} = \frac{h}{2}$$

Dosazením do vztahu (2.14) dostaneme souřadnice jádra:

$$y_2 = e_{y2} = -\frac{i_z^2}{y_{n2}} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{\infty} = 0$$

$$z_2 = e_{z2} = -\frac{i_y^2}{z_{n2}} = -\frac{\frac{1}{12}h^2}{+\frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}$$

Neutrální osa n_3 - úsek AD - vytíná na souřadných osách úseky

$$y_{n3} = \frac{b}{2}$$

$$z_{n3} = \infty$$

jsou souřadnice vrcholu jádra

$$y_3 = e_{y3} = -\frac{i_z^2}{y_{n3}} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{\frac{b}{2}} = -\frac{b}{6}$$

$$z_3 = e_{z3} = -\frac{i_y^2}{z_{n3}} = -\frac{\frac{1}{12}h^2}{\infty} = 0$$

Pro neutrální osu n_4 - úsek BC, která vytíná na souřadných osách úseky

$$y_{n4} = \frac{b}{2} \quad z_{n4} = \infty,$$

jsou souřadnice vrcholu jádra

$$y_3 = e_{y_3} = -\frac{i_z^2}{y_{n3}} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{-\frac{b}{2}} = \frac{b}{6}$$

$$z_3 = e_{z_3} = -\frac{i_y^2}{z_{n3}} = -\frac{\frac{1}{12}h^2}{\infty} = 0$$

Jádrem obdélníka je tedy kosočtverec, jehož vrcholy leží na hlavních centrálních osách y , z .

Příklad 2.4



Zadání

Určete jádro plného kruhového průřezu o poloměru r .

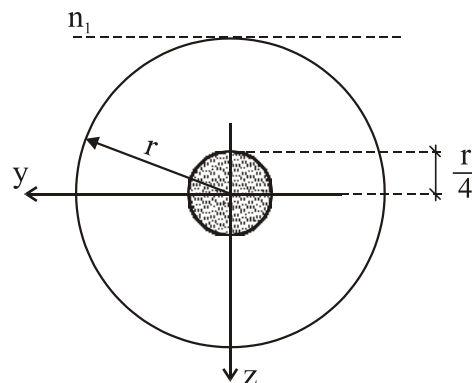
Řešení

Kruhový průřez je rotačně symetrický, což znamená, že jádro průřezu bude mít rovněž tvar kruhu a k jeho určení stačí jediná jádrová úsečka. Průřezové charakteristiky kruhového průřezu k ose procházející těžištěm jsou:

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$i_y^2 = i_z^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{\pi}{4} r^4}{\pi \cdot r^2} = \frac{r^2}{4}$$



Obr. 14: Jádro kruhového průřezu

Neutrální osa n_1 vyťíná na osách y, z úseky: $y_{n1} = \infty \quad z_{n1} = -r$

Dosažením do vztahu (2.14) dostaneme souřadnice jádra:

$$y_1 = e_{y1} = -\frac{i_z^2}{y_{n1}} = -\frac{r^2}{\infty} = 0$$

$$z_1 = e_{z1} = -\frac{i_y^2}{z_{n1}} = -\frac{r^2}{-r} = +\frac{r}{4}$$

Jádrem kruhového průřezu je kruh o poloměru $\frac{r}{4}$.

2.3.2 Dimenzování prutů na kombinované namáhání

Kombinovanými případy namáhání jsou velice často zatíženy pruty představující nosné části stavební konstrukce. Proto se jejich posouzení věnuje pozornost v příslušných návrhových normách. Kombinovaná namáhání lze rozdělit do dvou základních skupin podle typu napjatosti:

1. skupina:

Jedná se o prut namáhaný osovou silou i ohybovými momenty (k jedné nebo oběma hlavním osám setrvačnosti), který vykazuje především normálové napětí ve směru rovnoběžném s osou prutu. Toto napětí se pro různé případy kombinací výše zmíněných základních případů zatížení (a jim odpovídajících vnitřních sil N, M_y, M_z) liší průběhem hodnot po ploše vyšetřovaného průřezu. Spojnice hodnot napětí vyšetřovaného průřezu vždy tvoří rovinu. Pro jednoosou napjatost je podmínku porušení možno formulovat ve tvaru:

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_u, \quad (2.15)$$

kde $|\sigma_{\max}|$ představuje maximální hodnotu normálového zatížení σ_x ve směru osy nosníku vyskytujícího se na posuzovaném prutu a σ_u představuje limitní napětí daného materiálu na hranici platnosti Hookova zákona. Pro ocel je tato hodnota vyjádřena mezí kluzu f_y . U betonu musíme mít na paměti, že vztahy popsané v této kapitole platí při pružném chování materiálu, tj. v průřezu nesmí vznikat trhliny.

2. skupina:

Jestliže je stav napjatosti tělesa víceosý, je třeba formulovat kritéria pro porušení nebo zplastizování materiálu obecněji. Budeme uvažovat materiál, jehož charakteristiky při jednoosé napjatosti v tahu a v tlaku jsou v absolutní hodnotě shodné (mez kluzu f_y a mez pevnosti f_u) a formulujme pro ně lokální podmínku plasticity ve tvaru:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq 0, \quad (2.16)$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí v uvažovaném bodu. Hledáme takový vztah mezi stavem napjatosti v bodu a mezí kluzu při jednoosém tahu f_y , který definuje okamžik zplastizování tělesa v daném bodu.

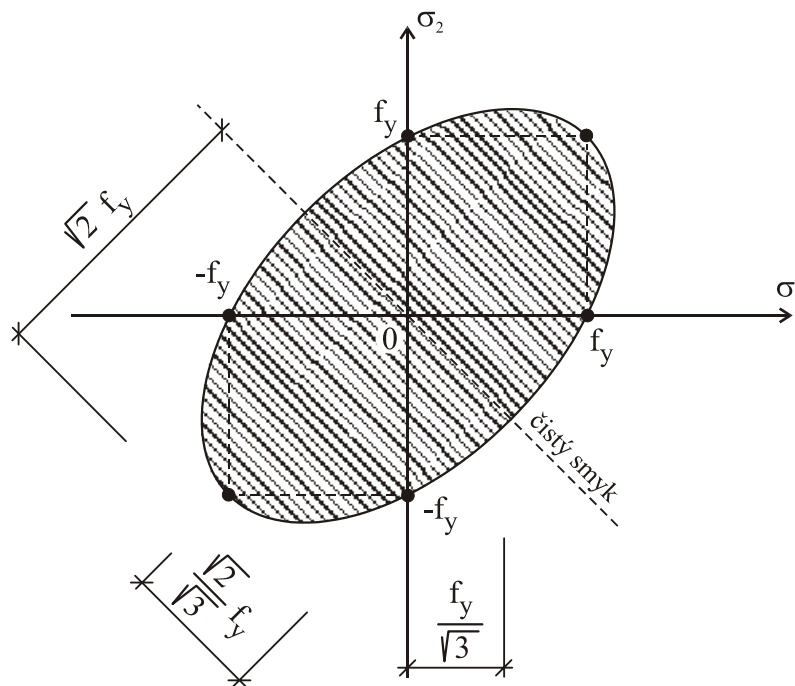
Dobrou shodu se skutečností (např. u oceli a u jiných kovů) prokázala tzv. **Misesova podmínka plasticity**, která byla formulována nezávisle Huberem, von Misesem a Henckym (odtud název HMH) a dalšími autory na základě různých hypotéz. Všechny hypotézy vedou ke stejné podmínce:

$$F_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 2f_y \leq 0 \quad (2.17)$$

Tento vztah platí pro obecnou prostorovou napjatost. V případě rovinné napjatosti můžeme podmínku napjatosti zapsat ve tvaru:

$$F_1 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - f_y^2 \leq 0 \quad (2.18)$$

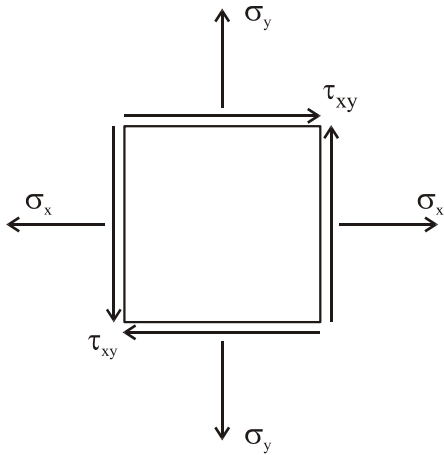
Tato podmínka je znázorněna na obr.15 oblastí omezenou elipsou; při $F < 0$ je znázorňující bod uvnitř zašrafované oblasti; při $F = 0$ je na jejím obrysu (dojde ke zplastizování). Stav $F > 0$ je u materiálu bez zpevnění nemožný.



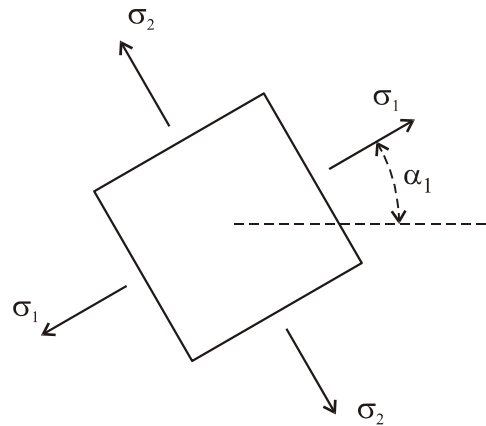
Obr. 15: Misesova podmínka plasticity (rovinná napjatost)

Pokud do rovnice (2.18) dosadíme hodnoty hlavních napětí $\sigma_1; \sigma_2$ z rovnice (2.19):

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.19)$$



Obr. 16: Daná napětí



Obr. 17: Hlavní napětí

Nabývá potom podmínka (2.18) v rovině xy tvar:

$$F_1 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - f_y^2 \leq 0 \quad (2.20)$$

(v rovině xz pak záměnou indexu y za z). Pro případ osové napjatosti např. ve směru x vyjde identita vztahu (2.15), tj.

$$|\sigma_x| \leq f_y \quad (2.21)$$

Pro stav čistého smyku plyne

$$|\tau_{xy}| \leq \frac{f_y}{\sqrt{3}} \approx 0,577 f_y \approx 0,6 f_y. \quad (2.22)$$

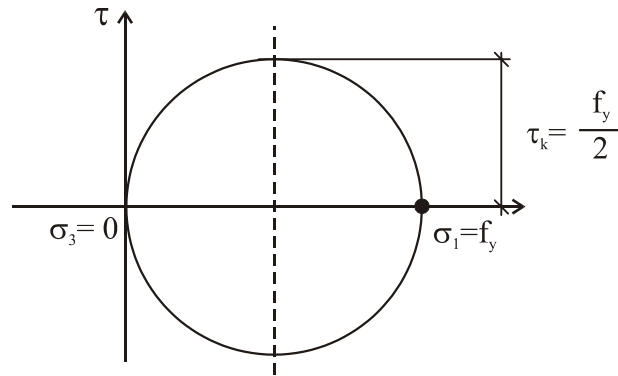
Z rovnice (2.22) je patrné, že mez kluzu ve smyku činí necelých 60 % meze kluzu v tahu nebo v tlaku. Zaměníme-li v uvedených relacích mez kluzu f_y za mez pevnosti f_u , mají význam kritérií pevnosti.

Alternativně můžeme vycházet též z tzv. **Trescovy podmínky plasticity**. Je to jedna z nejstarších podmínek, kterou postupně formulovali Coulomb (1773), Tresca (1868), Guest (1990). Za faktor, který rozhoduje o vzniku mezního stavu pružnosti (neboli počátku plastizace), zvolili autoři maximální smykové napětí. Mezního stavu pružnosti (neboli podmínky plasticity) bude v bodě zatíženého tělesa dosaženo, když maximální smykové napětí τ_{\max} v tomto bodě dosáhne mezní hodnoty τ_k . Matematicky je možno tuto podmínku zapsat ve tvaru:

$$\tau_{\max} \leq \tau_k \quad (2.23)$$

Veličinu τ_k můžeme odvodit z Mohrova diagramu pro prostý tah v závislosti na mezi kluzu použitého materiálu, jež byla zjištěna z tahové zkoušky a platí:

$$\tau_k = \frac{f_y}{2} \quad (2.24)$$



Obr. 18: Mohrova kružnice

Označíme-li u prostorové napjatosti pořadí hlavních hodnot napětí

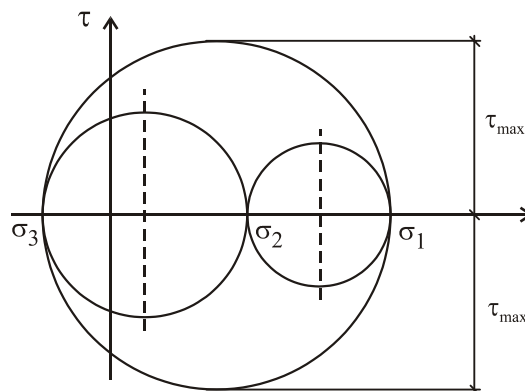
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (2.25)$$

pak největší smykové napětí τ_{\max} je možno vyjádřit jako:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.26)$$

Kombinacemi vztahů (2.24), (2.25), (2.26) je možno vyjádřit Trescovu podmínku ve tvaru:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq f_y \quad (2.27)$$



Obr. 19: Mohrova kružnice

Při obecném pořadí velikosti hlavních napětí je pak možno zapsat:

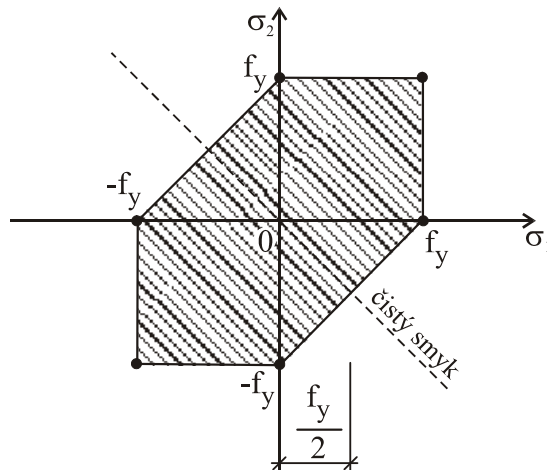
$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} \leq f_y \quad (2.28)$$

U této teorie tedy není rozhodující velikost hlavních napětí (jako u první teorie), nýbrž podíl největšího a nejmenšího napětí. Z teoretického hlediska je možno vidět určitou slabinu teorie v tom, že neuvažuje vliv prostředního hlavního napětí. Podrobnými zkouškami se však zjistilo, že tento vliv je poměrně malý a jeho zanedbáním se dopouštíme nepřesnosti nejvýše asi 10 – 15 %.

V případě rovinné napjatosti můžeme podmínku napjatosti zapsat ve tvaru:

$$\sigma_1 - \sigma_2 - f_y \leq 0 \quad (2.29)$$

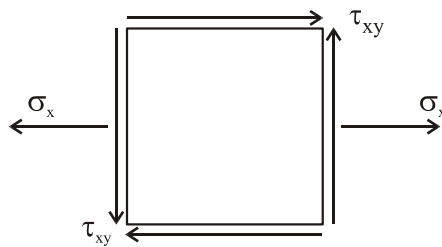
Při rovinné napjatosti je mezní křivka znázorněna šestiúhelníkem dle obr. 20.



Obr. 20: Trescova podmínka plasticity (rovinná napjatost)

Poznámka: Uvažujme napjatost z obr. 21 pro případ, kdy je prut namáhán normálovým napětím $\sigma = \sigma_x$ rovnoběžným s osou prutu x a smykovým napětím

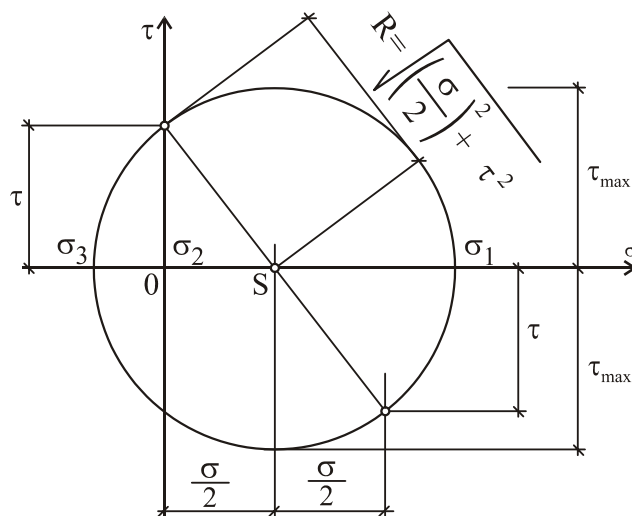
$$\tau = \tau_{xy}.$$



Obr. 21: Daná napětí

Z Mohrovy kružnice na obr. 22 plyne, že

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \overline{OS} + R - (\overline{OS} - R) = 2R = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq f_y \quad (2.30)$$



Obr. 22: Mohrova kružnice

Hodnotu napětí σ_y jsme v tomto příkladě uvažovali nulovou. Srovnáním vztahů (2.20) a (2.30) je zřejmé, že redukovaná napětí se liší pouze číselným koeficientem v druhém členu. Proto je možno vyjádřit

$$F_{12} = \sigma^2 + (\alpha\tau)^2 - f_y^2 \leq 0, \quad (2.31)$$

kde $\alpha = \sqrt{3}$ pro 1. hypotézu HMH a $\alpha = 2$ pro 2. hypotézu τ_{\max} .

Při posudku prutu namáhaného kombinovaným namáháním se uplatní tzv. redukované napětí. Příslušnou podmínku je možno vyjádřit úpravou vztahu (2.31):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + (\alpha\tau)^2} \leq f_y^2 \quad (2.32)$$

S kombinacemi ohybu a smyku se setkáváme u nosníků namáhaných ohybovým momentem a posouvající silou. V průřezu je rovinná napjatost určena napětími σ a τ , takže pevnostní podmínku je možno zapsat ve tvaru (2.32). Rozdělení smykového napětí závisí na tvaru průřezu.

Příklad 2.5

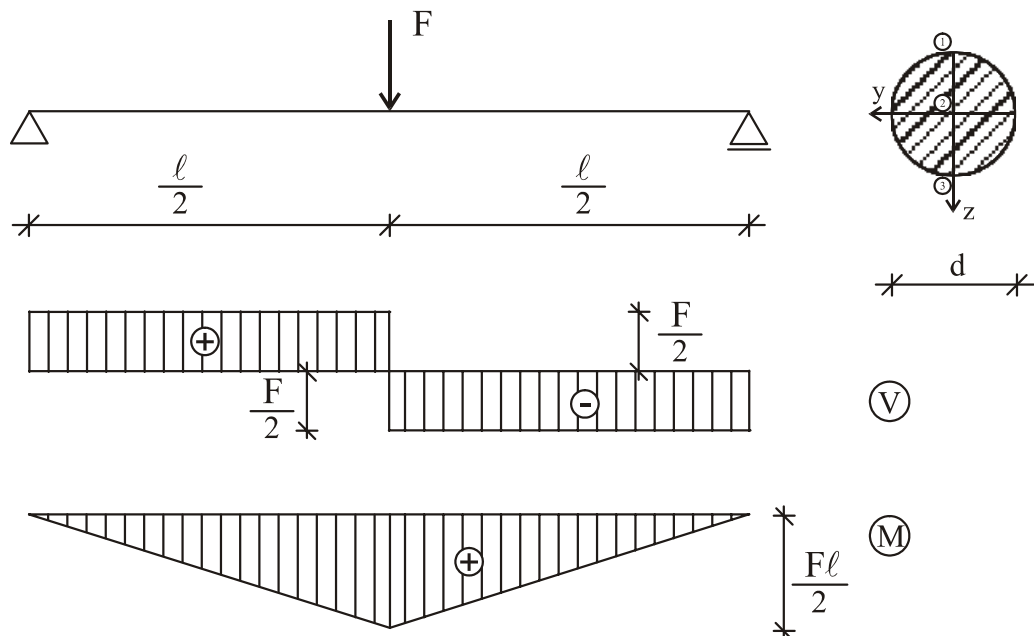
Zadání



Určete hodnotu redukovaného napětí v těžišti a na okraji kruhového průřezu u prostého nosníku v polovině rozpětí. Vyšetřete, v kterých místech je redukované napětí maximální.

Řešení

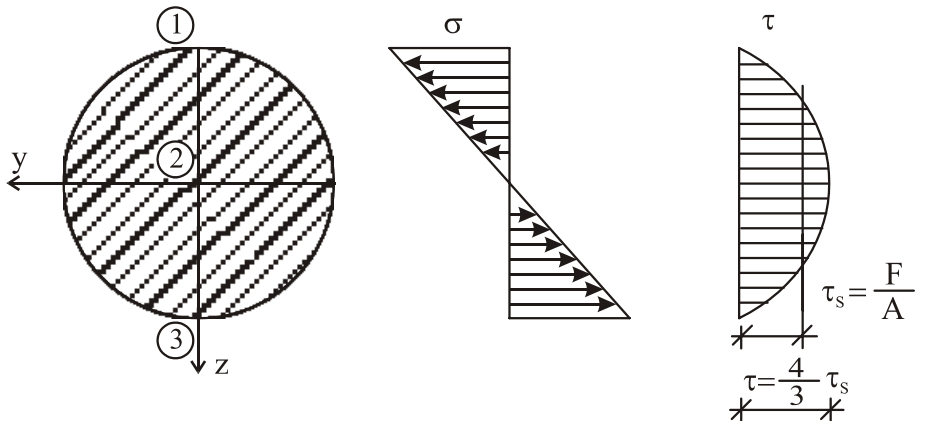
Geometrie nosníku a vnitřní síly jsou zobrazeny na obr. 23.



Obr.23: Řešený nosník s diagramy vnitřních sil

Z průběhu napětí u kruhového průřezu je zřejmé, že v místech, kde je v průřezu extrémní ohybové napětí (body 1 a 2), je smykové napětí nulové a nao-

pak tam, kde je smykové napětí maximální, je normálové napětí nulové. Lze ukázat, že maximální redukované napětí bude buď na obvodu (body 1 a 2), nebo uprostřed (bod 3).



Obr.24: Normálové a smykové napětí u kruhového průřezu

Vypočítejme nyní hodnotu redukovaného napětí v bodu 1 a 2 a porovnejme je.

$$\sigma_{red,1} = \frac{M_0}{W_y} = \frac{32 \cdot F \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot d^3} \quad (2.33)$$

$$\sigma_{red,2} = \alpha \frac{4}{3} \tau_s = \alpha \frac{16 \frac{F}{2}}{3 \cdot \pi \cdot d^2} \quad (2.34)$$

Mezní případ, kdy budou redukovaná napětí v průřezu stejná, nastane, bude-li:

$$\sigma_{red,1} = \sigma_{red,2} \quad (2.35)$$

Po dosazení a úpravě dostáváme:

$$l_{mez} = \alpha \frac{d}{3} \quad (2.36)$$

Pro $l \geq l_{mez}$ bude o maximálním σ_{red} rozhodovat ohyb. Vzhledem k tomu, že $\alpha = \sqrt{3}$, nebo $\alpha = 2$, bude možno skoro všechny nosníky kruhového průřezu počítat pevnostně pouze na ohyb, neboť jejich délka je zpravidla mnohem větší než $\alpha \frac{d}{3}$. Pouze pro velmi krátké (a vysoké) nosníky by rozhodovalo smykové napětí.

Příklad 2.6*Zadání*

Určete hodnotu redukovaného napětí v těžišti a na okraji kruhového průřezu u prostého nosníku v polovině rozpětí. Vyšetřete, v kterých místech je redukované napětí maximální.

*Řešení*

Geometrie nosníku a vnitřní síly jsou zobrazeny na obr. 25.

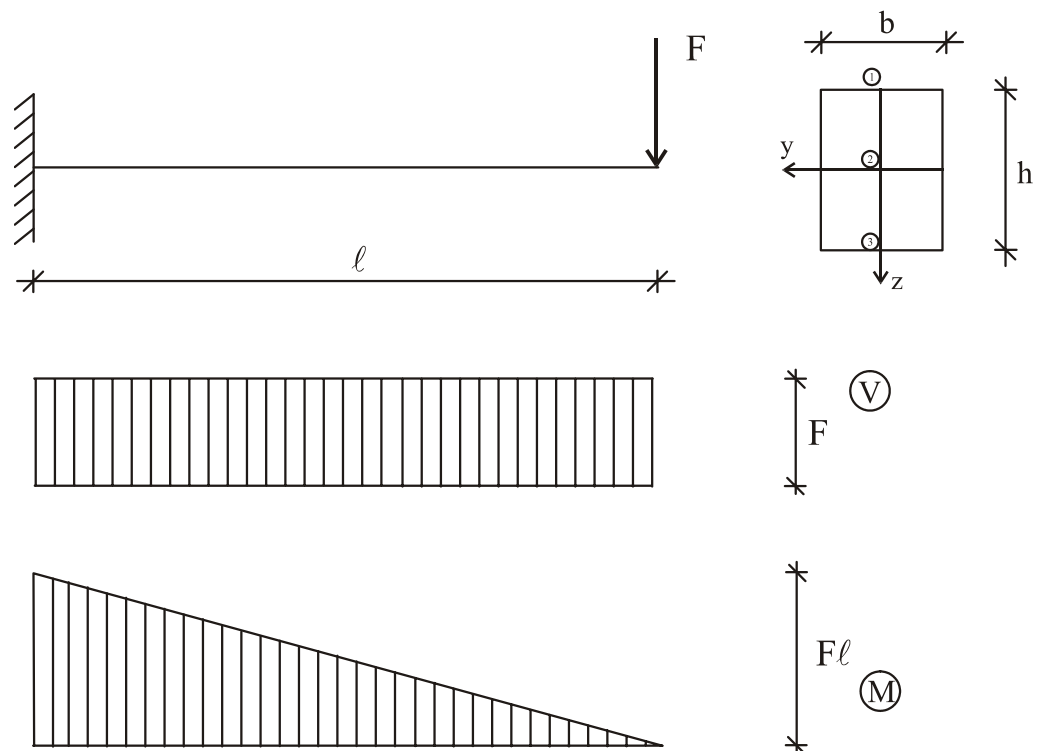
Mezní případ opět nastane tehdy, bude-li

$$\sigma_{red,1} = \sigma_{red,2} \quad (2.37)$$

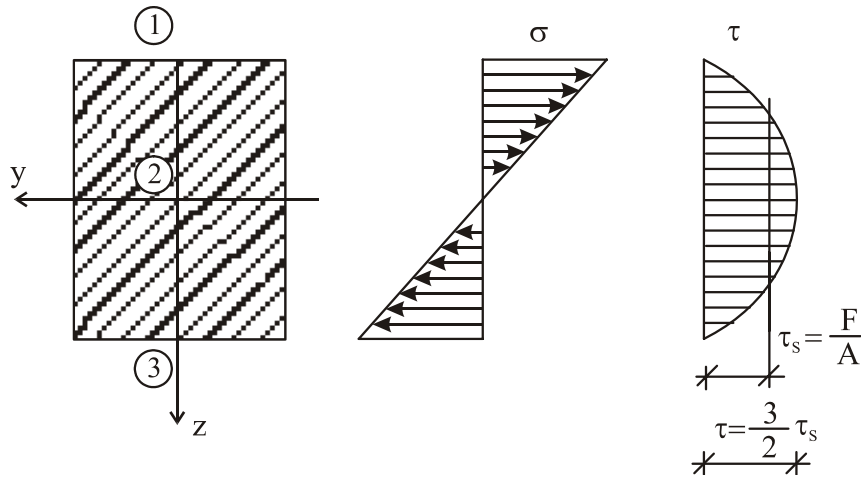
Vypočítejme nyní hodnotu redukovaného napětí v bodu 1 a 2 a porovnejme je.

$$\sigma_{red,1} = \frac{M_0}{W_y} = \frac{F \cdot l}{\frac{1}{6} b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot h^2} \quad (2.38)$$

$$\sigma_{red,2} = \alpha \frac{3}{2} \tau_s = \alpha \frac{3}{2} \frac{F}{b \cdot h} \quad (2.39)$$



Obr. 25: Řešený nosník s průběhy vnitřních sil



Obr. 26: Průběh normálového a smykového napětí po výšce průřezu

Po úpravě dostáváme

$$l_{mez} = \alpha \frac{h}{4} \quad (2.40)$$

Pro $l > l_{mez}$ rozhoduje pouze namáhání v ohybu. Posouvající síla rozhoduje o pevnosti jen u velmi krátkých nosníků $l_{mez} \leq \alpha \frac{h}{2}$.

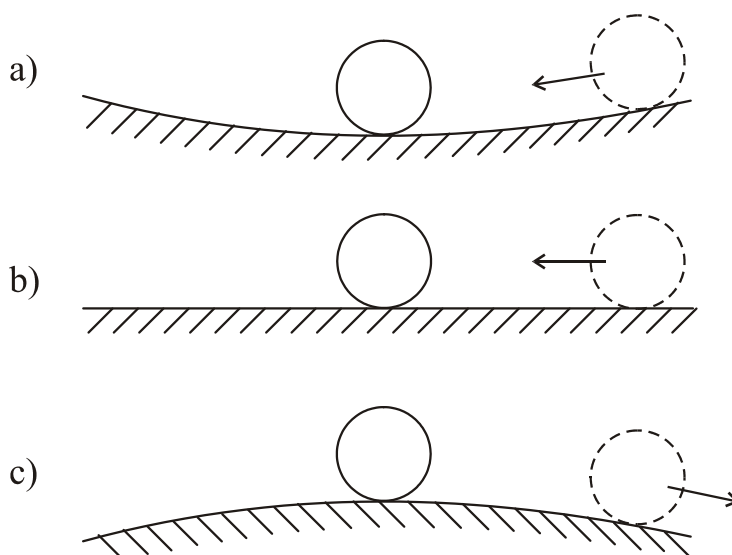
3 Stabilita a vzpěrná pevnost tlačných prutů

Prostý tlak působící na masivní prut byl popsán v předchozích kapitolách. Maximální tlaková síla je limitována materiálovými charakteristikami (mez kluzu, pevnost).



Při namáhání štíhlých prutů osovým tlakem dojde téměř ve všech případech ke ztrátě stability (k vybočení osy). Hovoříme tedy o vzpěrném tlaku, nikoli o tlaku prostém. Odolnost prutu proti porušení označujeme jako vzpěrnou pevnost. Vzpěr úzce souvisí s namáháním štíhlých prutů pod kombinací tlaku a ohybu.

Stabilitou rozumíme původní rovnovážný stav. Pro demonstraci použijme příklad z mechaniky tuhých těles. Vráťe-li se těleso po vychýlení do původní polohy, potom hovoříme o stavu stabilní rovnováhy, viz obr. 27. Při nestabilní rovnováze způsobí malé vychýlení pohyb tělesa, který trvá tak dlouho, dokud těleso nedosáhne stabilní rovnováhy na jiném místě. Mezi oběma uvedenými případy leží případ rovnováhy indiferentní, při které zůstává těleso po vychýlení v odkloněné poloze.



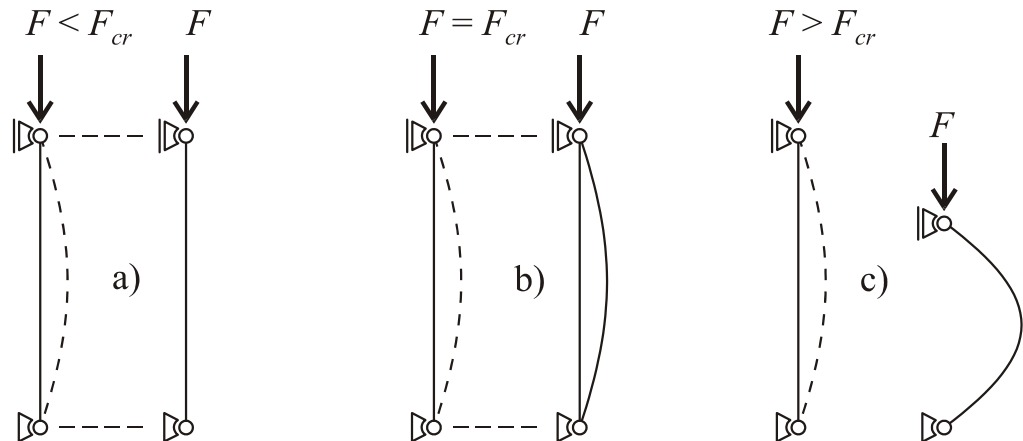
Obr. 27: Stav stabilní rovnováhy (a), indiferentní (b) a nestabilní rovnováhy (c)

Sledujme analogii stabilitního chování u prutu namáhaného vzpěrným tlakem.

Pro názorný popis sledujme chování štíhlého kloubově uloženého prutu na jedné straně zatíženého osově silou. Předpokládejme, že (i) materiál je dokonale pružný, tj. při působení zatížení jakékoliv velikosti nevznikají trvalé deformace, a (ii) jeho osa je absolutně přímá.

Při dostatečně malé hodnotě síly F zůstane prut přímý a vychýlíme-li jej (například dočasně působící vodorovnou silou), vrátí se zpět do přímého tvaru. Přímý tvar prutu je tedy stabilní.

Zvětšujeme-li tlakovou sílu F , návrat prutu do přímé polohy se děje stále pozvolněji a při určité síle F_{cr} prut není schopen zaujmout původní tvar. O této síle hovoříme jako o kritické síle. Budeme-li na prut působit silou větší hodnoty než je F_{cr} , neudrží se již prut prakticky vůbec v přímém tvaru – tento stav již přestal být stabilní. Prut se ohýbá, (vybočuje) ve směru minimální ohybové tuhosti. Průhyby přitom rostou neobyčejně prudce. Tento jev nazýváme ztrátou stability.



Obr. 28: Chování centricky tlačného prutu

U skutečného prutu nejsme schopni docílit dokonalé přímosti ani ideální centricity působení tlakové síly. V důsledku toho dochází k postupnému narůstání průhybů od začátku zatěžovacího procesu. Jak se blíží zatížení k limitní hodnotě F_{cr} , průhyb roste nade všechny meze.

Připomeňme, že stále uvažujeme dokonale pružné chování materiálu, tj. po odstranění síly se prut vrátí do přímé polohy. U štíhlých prutů proběhne ztráta stability při pružném působení prutu. Pokud by došlo k překročení limitující materiálové charakteristiky (např. u oceli se jedná o mez kluzu), vzniklé deformace by byly větší a část by měla trvalý charakter. Tento případ může nastat u prutů s menší štíhlostí. Potom vyšetřujeme stabilitu v nepružném oboru.

Tlakové namáhání, které nekončí „rozdrcením“ nebo „roztlačením“ ve smyslu tlakové zkoušky, ale ztrátou stability, se nazývá vzpěrem. Ztráta stability tlačného prutu je většinou velmi závažná a může vést až ke zhroucení konstrukce.

Stabilita je schopnost rovnovážné soustavy vychýlené nepatrně z původního stavu vracet se do původního stavu, jakmile pomine příčina.

Kritická síla F_{cr} představuje teoretické maximální zatížení štíhlého přímého prutu jako stabilní konstrukce.

3.1 Eulerovo řešení

Velikost kritické síly z podmínky rozdělení rovnováhy (vznik indiferentního stavu, oblast bifurkace) ideálního pružného přímého centricky tlačného prutu stálého průřezu poprvé popsal roku 1744 L. Euler, proto hovoříme o *Eulerově kritické síle*.



Základním případem vzpěru z hlediska uložení je nosník znázorněný na obr. v předchozí kapitole. Při zatížení silou F_{cr} se nosník prohne, přičemž veškeré hodnoty funkce průhybu $v(x)$ jsou velmi malé. Tato konstrukce je potom zatížena mimo osové síly i ohybovým momentem velikosti

$$M_o(x) = F_{cr} \cdot v(x), \quad (3.1)$$

kde $M_o(x)$ a $v(x)$ jsou neznámé funkce. Další závislost mezi $M_o(x)$ a $v(x)$ vyplývá z Bernoulliho diferenciální rovnice průhybové čáry

$$M_o(x) = -E \cdot I \cdot v''(x). \quad (3.2)$$

Můžeme přepsat do tvaru

$$v''(x) + \alpha^2 \cdot v(x) = 0, \quad (3.3)$$

kde

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{E \cdot I}. \quad (3.4)$$

Tato diferenciální rovnice popisuje průhybovou čáru prutu, u kterého byl průhyb vyvolán kritickou silou F_{cr} . Dle diferenciálního počtu budeme řešení předpokládat ve tvaru

$$v(x) = A_1 \cos(\alpha \cdot x) + A_2 \sin(\alpha \cdot x), \quad (3.5)$$

Z okrajové podmínky

$$v(x=0) = 0 = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 0 \quad (3.6)$$

plyne, že řešení průhybové čáry není schopna popsat funkce cosinus.

Okrajová podmínka pro $x=l$ ve tvaru

$$v(l) = A_2 \sin(\alpha \cdot x) = 0 \quad (3.7)$$

vede ke dvěma řešením

- $A_2=0$, popisu tzv. triviální řešení, kdy pro všechna x na intervalu platí $v(x)=0$. Z této podmínky nejsme schopni určit F_{cr} .
- $A_2 \neq 0$, a potom $\sin(\alpha \cdot x) = 0$. Řešení této trigonometrické rovnice má tvar $\alpha \cdot l = i \cdot \pi$, kde $i=(0,1,2, \dots)$. Z fyzikálního hlediska má smysl hledat minimální sílu, při které dojde ke ztrátě stability. Nejnižší nenulový kořen je dán výrazem $\alpha \cdot l = \pi$ nebo pro další postup upravíme na tvar $\alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$

Dosadíme-li do rovnice (3.4) dostáváme

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}, \quad (3.8)$$

což je Eulerova kritická síla základního případu vzpěru.

Tento výraz (3.8) platí pouze pro průřezy se stejnými hlavními centrálními momenty setrvačnosti k oběma osám (kruh, mezikružší, čtverec). Pro ostatní průřezy prizmatického prutu platí

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}, \quad (3.9)$$

kde I_{\min} je menší z hlavních centrálních momentů setrvačnosti.

3.1.1 Vzpěrná délka

U prutů s jinými okrajovými podmínkami délka půlvlny funkce sinus není tožná s délkou prutu. Vzdálenost inflexních bodů křivky potom odpovídá tzv. *vzpěrné délce* L_{cr} .

Spojením výrazů (3.4) a (3.8) obdržíme výraz pro určení vzpěrné délky prizmatického prutu. Normálovou sílu můžeme obecně vyjádřit jako proměnnou po délce

$$-N(x) = v^2(x)F, \quad F \geq 0, \quad (3.10)$$

potom

$$-N(x) = v^2(x) \cdot F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{cr}^2}. \quad (3.11)$$

Z výrazu jsme schopni vyjádřit

$$v^2(x) \cdot E \cdot I \left(\frac{\alpha \cdot l}{l} \right)^2 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{cr}^2} \quad (3.12)$$

Po úpravě dostaneme hledané řešení

$$L_{cr} = L_{cr}(x) = \left(\frac{\pi}{v(x) \cdot \alpha \cdot l} \right) \cdot l \quad (3.13)$$

Pro $-N=F$ a $v^2=1$ nabývá (3.13) tvar

$$L_{cr} = konst. = \left(\frac{\pi}{\alpha \cdot l} \right) \cdot l \quad (3.14)$$

Zobecněním výrazu (3.9) pro různé případy okrajových podmínek dostáváme výraz ve tvaru

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_{cr}^2} \quad (3.15)$$

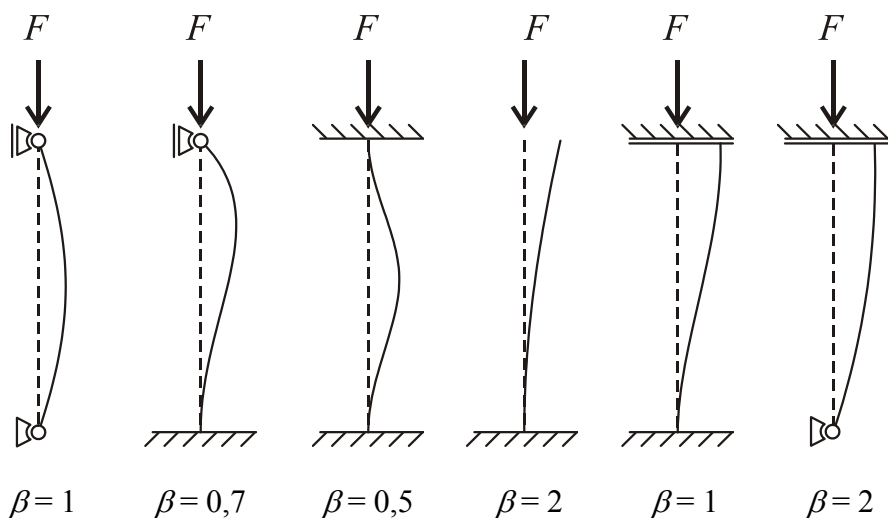
Vzpěrnou délku L_{cr} je účelné vyjádřit jako násobek délky prutu l :

$$L_{cr} = \beta \cdot l \quad (3.16)$$

Poměr mezi vzpěrnou délkou L_{cr} a délkou prutu l je možno vyjádřit a odpovídající Eulerovo kritické břemeno je pro základní případy znázorněno v tabulce.

TABULKA 3

	1	2	3	4	5	6
F_{cr}	$\frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\frac{2\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}$	$\frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}$
L_{cr}	$1l$	$0,7l$	$0,5l$	$2l$	$1l$	$2l$



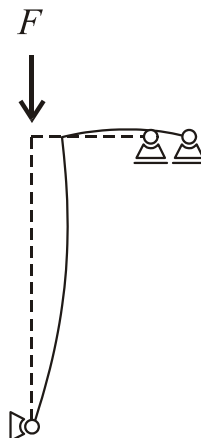
Obr. 29: Vzpěrné délky základních Eulerových případů

Definice

Vzpěrnou délku lze definovat jako délku kloubově uloženého prutu shodné ohybové tuhosti EI , který ztratí stabilitu (vybočí) při stejné kritické síle F_{cr} .



Uvažujme nyní případ kloubově uloženého sloupu v patě a posuvně uloženého v hlavě, viz obr. 30.



Obr. 30: Posuvně uložená hlava sloupu

Jedná se o velice častý případ uspořádání nosného systému skeletových konstrukcí s rámovými styčníky a kloubově uloženým rámem. Vzpěrná délka je závislá mj. na poměru tuhostí příčle a sloupu.

$$L_{cr} = 2 \cdot \left(\sqrt{1 + 0,8 \cdot \kappa} \right) \cdot l, \quad (3.17)$$

kde

$$\kappa = \frac{I \cdot p}{I_p \cdot l} \quad (3.18)$$

Součinitel je možné uvažovat do hodnoty $\kappa \leq 5$.

3.2 Kritická síla a napětí

Na rozdíl od prostého tlaku je napětí při vzpěrném tlaku dáno vztahem

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_{cr}^2} \quad (3.19)$$

nebo

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 Ei^2}{L_{cr}^2}, \quad (3.20)$$

kde

$$i^2 = \frac{I}{A} \quad (3.21)$$

je poloměr setrvačnosti popsany v předchozích kapitolách.

Závislost mezi délkou prutu a jeho průřezem vyjadřuje *štíhlostní poměr*, ve zkratce *štíhlost prutu* λ .

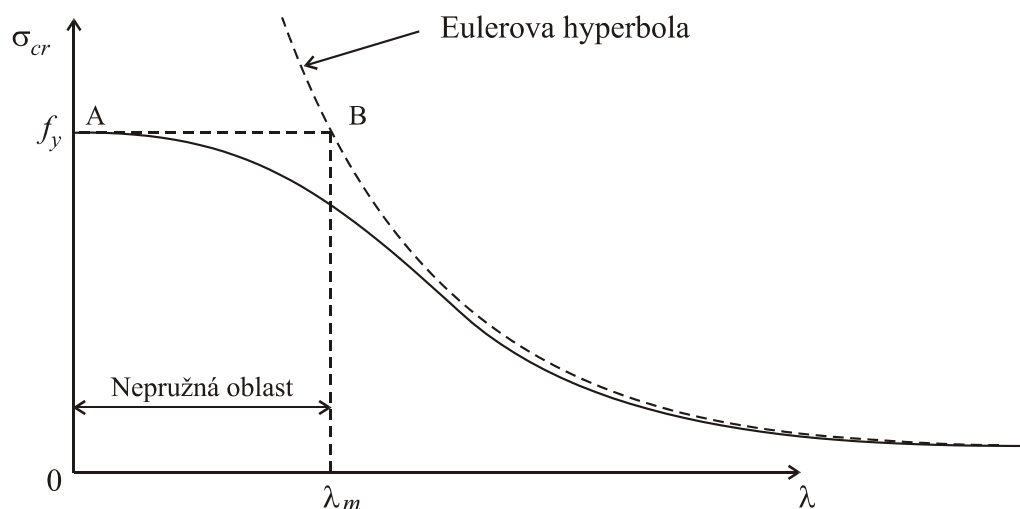
$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} \quad (3.22)$$



Výraz pro kritické napětí přejde v konečný tvar

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (3.23)$$

Závislost kritického napětí σ_{cr} na štíhlostním poměru λ je možné graficky znázornit pomocí tzv. Eulerovy hyperboly, viz obr. 31.



Obr. 31: Vzpěrná křivka

Z grafu je patrný silně nelineární vztah mezi výše popsányými veličinami. Pro vysoké hodnoty štíhlostních poměrů kritické zatížení (tím i napětí) nabývá velmi malých hodnot. Při nízkých hodnotách štíhlostních poměrů kritické napětí prudce stoupá – tj. ztráta stability přestává hrát roli a vzpěrný tlak nakonec přejde v tlak prostý.

Ztráta stability je neopomenutelný problém zejména při návrhu ocelových konstrukcí – materiál o vysoké pevnosti dovoluje použít pruty malých profilů, z nich pramení velké štíhlostí poměry.

Vzhledem k předpokladu platnosti Hookova zákona určíme limitní hodnotu napětí, při kterém je splněna podmínka pružného chování materiálu. Pro ocel je mezní napětí v materiálu, při kterém platí vztahy dány Hookovým zákonem, určeno *mezí kluzu* f_y . Na základě této hodnoty určíme mezní štíhlostní poměr.

$$\lambda_m = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (3.24)$$

Určit křivku v intervalu $0 \leq \lambda_m$ pro tzv. ztrátu stability v nepružné oblasti je obtížné, na její průběh nepanuje jednotný názor, a proto je předmětem experimentálního i numerického výzkumu.

Příklad 3.1

Zadání



Prostě uložený nosník rozpětí $l=1,5m$ je centricky tlačěn silou na konci viz. obr. Použitý materiál je ocel $E=2,1 \cdot 10^{11} Pa$. Pro zadané průřezy určete Eulerovo kritické břemeno.

1. Kruhový průřez $\Phi 40 mm$

2. Mezikruží vnější průměr $D=70 mm$, tloušťka stěny $t=6mm$

3. Čtverec $35 mm$

4. Obdélník $25 \times 50 mm$

Řešení

ad1) Kruhový průřez $\Phi 40 mm$

$$A = 1256,6 mm^2, I_{min} = 125,7 \cdot 10^3 mm^4$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_{cr}^2} = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 125,7 \cdot 10^{-9} \frac{\pi^2}{1,5^2} = 115,8 \cdot 10^3 N = 115,8 kN$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 10 mm$$

$$\lambda_{min} = \frac{L_{cr}}{i_{min}} = 150$$

ad2) Mezikruží Vnější průměr $D=70 mm$, tloušťka stěny $t=6mm$

$$A = 1210 mm^2, I_{min} = 623 \cdot 10^3 mm^4$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_{cr}^2} = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 623 \cdot 10^{-9} \frac{\pi^2}{1,5^2} = 573 \cdot 10^3 N = 573 kN$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 22,69 mm$$

$$\lambda_{min} = \frac{L_{cr}}{i_{min}} = 66,1$$

ad3) Čtverec $35 mm$

$$A = 1225 mm^2, I_{min} = 125 \cdot 10^3 mm^4$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_{cr}^2} = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 125 \cdot 10^{-9} \frac{\pi^2}{1,5^2} = 115,2 \cdot 10^3 N = 115,2 kN$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 10,11 mm$$

$$\lambda_{\min} = \frac{L_{cr}}{i_{\min}} = 148,4$$

ad 4) Obdélník 25x50 mm

$$A = 1250 mm^2, I_{\min} = 65,1 \cdot 10^3 mm^4$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_{cr}^2} = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 65,1 \cdot 10^{-9} \frac{\pi^2}{1,5^2} = 59,9 \cdot 10^3 N = 60 kN$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 7,22 mm$$

$$\lambda_{\min} = \frac{L_{cr}}{i_{\min}} = 207,7$$



TABULKA 4: Výsledky řešení

Číslo profilu	1	2	3	4
Poměr λ	1	0,441	0,989	1,385
Poměr F_{cr}	1	4,951	0,995	0,518
Poměr A	1	0,963	0,975	0,994

3.3 Pevnostní pojetí vzpěru. Posouzení prutů na vzpěr

Zohlednit ztrátu stability při návrhu tlačných prutů je nutné u většiny stavebních prvků. Eulerova kritická síla je zpravidla výrazně vyšší než síla, která vede u reálných konstrukcí ke ztrátě stability. Proto je tento postup zakotven v příslušných návrhových normách. V následující části se v jednoduchosti seznámíme s postupem návrhu ocelových konstrukcí.



Celistvý centricky tlačný prut zatížený silou F se posuzuje dle vzorce

$$\frac{F}{A} \leq \chi \cdot f_d, \quad (3.25)$$

kde

A - plocha neoslabeného průřezu

f_d - návrhová hodnota meze kluzu $f_d = \frac{f_u}{\gamma_m}$

χ - součinitel vzpěrnosti (tabelizován v normě) závislý na štíhlosti prutu λ

Součinitel vzpěrnosti χ zohledňuje i vliv tvaru standardních ocelových průřezů. Proto norma rozděluje

- | | |
|---------------------------------------------------------------|----------|
| a) uzavřené průřezy (kruhové, čtvercové a obdélníkové trubky) | χ_a |
| b) dvouose symetrické průřezy (I, kruhové a obdélníkové tyče) | χ_b |
| c) jednoose symetrické a obecné průřezy | χ_c |

Postup:

Při návrhu zpravidla vycházíme ze známé hodnoty zatížení, kterou musí průřez s jistou rezervou přenést. U základních geometrických obrazců jsme schopni vyjádřit přímo jejich vzpěrnou únosnost.

U válcovaných ocelových profilů musíme návrh zpravidla provádět opakovaně s postupným přibližováním k nejhodnějšímu návrhu. Norma navíc předepisuje pro různé konstrukční prvky maximální štíhlostní poměry.

1. Na základě zkušeností zvolíme výchozí profil navrhovaného tlačného prvku. Orientačně můžeme vycházet z výpočtu prostého tlaku a odhadnutého součinitele vzpěrnosti.
2. Určíme vzpěrné délky (zpravidla pro směry hlavních os). Nutno zohlednit i případné rozdíly v okrajových podmínkách pro různé směry.
3. Z maximální hodnoty štíhlostního poměru určíme minimální hodnotu součinitele vzpěrnosti.
4. Dosazením do vzorce zjistíme, zda námi navržený profil

a) nevyhoví $\frac{F}{A} > \chi \cdot f_d$, tj. je poddimenzován \Rightarrow nutno zopakovat návrh s profilem s větší hodnotou I_{min}

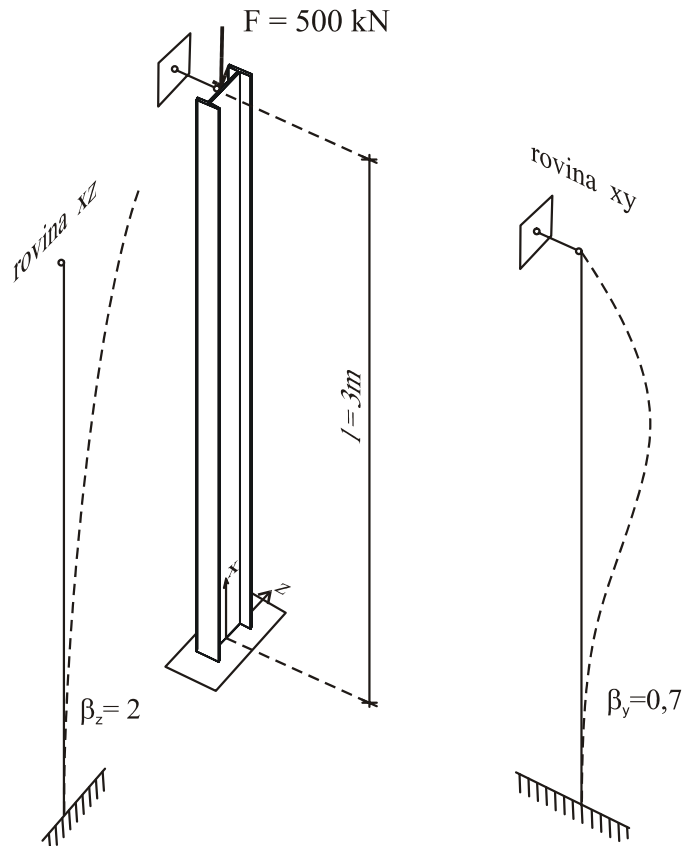
b) vhodně zvolený $\frac{F}{A} \leq \chi \cdot f_d$

c) $\frac{F}{A} \ll \chi \cdot f_d$, tj. je předdimenzován \Rightarrow vhodné zopakovat návrh s profilem s menší hodnotou I_{min} .

Příklad 3.2

Zadání

Provedte návrh a posudek I profilu, pro $f_d = 210 \text{ MPa}$ (ocel pevnostní třídy S235) pro konstrukci sloupu znázorněném na obrázku 32.



Obr. 32: Schéma řešené konstrukce

Řešení:

1. Provedeme přibližný návrh pro zvolenou hodnotu $\chi_b = 0,8$

$$\frac{F}{A} \leq \chi \cdot f_d$$

$$A_{\min} = \frac{F}{\chi_b \cdot f_d} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 210 \cdot 10^6} = 2,976 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 2,976 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Nejblíže vyšší hodnota plochy průřezu (viz. statické tabulky) odpovídá:

$$I200 \quad A = 3,34 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$i_y = 80 \text{ mm} \quad i_z = 18,7 \text{ mm}$$

$$L_y = \beta_y \cdot l = 0,7 \cdot 3 = 2,1 \text{ m}$$

$$L_z = \beta_z \cdot l = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}$$

Pro vyšší štíhlost bude hodnota součinitele χ_b nižší, tj. nepříznivější.

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{18,7} = 112,3 \xrightarrow{\text{tab.}} \chi_b = 0,46$$

$$\lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{6 \cdot 10^3}{80} = 75 \xrightarrow{\text{tab.}} \chi_b = 0,75$$

Vzhledem k různým okrajovým podmínkám (a s nimi souvisejícími vzpěrnými délkami) v rovině xz a xy je pro posouzení konstrukce rozhodující ztráta stability ve směru nižší ohybové tuhosti profilu i přes menší vzpěrnou délku.

Normálové napětí σ_{\max} v průřezu nabývá hodnoty

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{3,34 \cdot 10^3} = 149,7 \text{ MPa},$$

což je hodnota vyšší než vzpěrná pevnost $\chi_b \cdot f_d = 0,46 \cdot 210 \text{ MPa} = 96,6 \text{ MPa} \Rightarrow$ průřez není schopen přenést navrženou sílu, tj. **nevyhovuje**.

2. Je nutno provést nový návrh s profilem o větší ploše (a/nebo) menší štíhlosti.

Zopakujeme výpočet s profilem I240 $A = 4,61 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$, $i_y = 95,9 \text{ mm}$, $i_z = 21,9 \text{ mm}$

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{21,9} = 96 \xrightarrow{\text{tab.}} \chi_b = 0,58$$

$$\lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{6 \cdot 10^3}{95,9} = 62,6 \xrightarrow{\text{tab.}} \chi_b = 0,84$$

Srovnání napětí na konstrukci a únosnosti potom vychází

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{4,61 \cdot 10^3} = 108,5 \text{ MPa} < \chi_b \cdot f_d = 0,58 \cdot 210 \text{ MPa} = 121,8 \text{ MPa}$$

Profil I240 **vyhoví**.

Ověříme, zda by podmínky nesplňoval i menší, tj. levnější profil I220:

I220 $A = 3,95 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$, $i_y = 87,8 \text{ mm}$, $i_z = 20,3 \text{ mm}$

Nejvyšší štíhlost vychází $\lambda_y = 103,4$, té odpovídá součinitel vzpěrnosti $\chi_b = 0,525$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{3,95 \cdot 10^3} = 126,6 \text{ MPa} < \chi_b \cdot f_d = 0,525 \cdot 210 \text{ MPa} = 110,3 \text{ MPa}$$

Profil I220 **nevyhoví**.

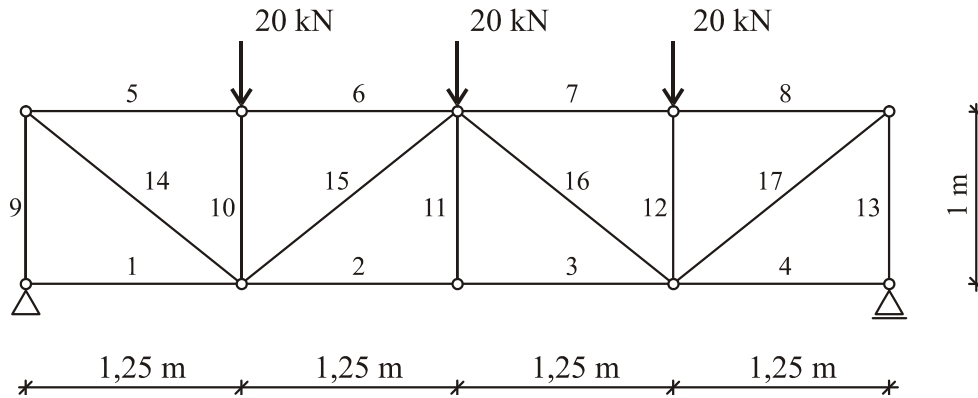
Příklad 3.3

Zadání

Proveďte posudek příhradové konstrukce (viz. obr. 33) z oceli S235.

$$f_y = 235 \text{ MPa}$$

$$f_d = 210 \text{ MPa}$$



Obr. 33: Model příhradové konstrukce

Horní a dolní pás je tvořen U100, stojina umístěna vodorovně

$$A = 6,95 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$i_y = 14 \text{ mm} \quad i_z = 42 \text{ mm}$$

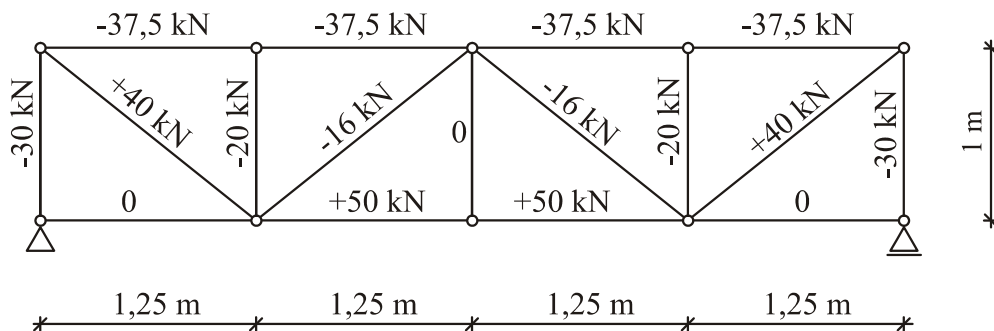
Svislice a diagonály uzavřený profil 30x30x3

$$A = 7,22 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$i_y = 11 \text{ mm} \quad i_z = 11 \text{ mm}$$

Řešení:

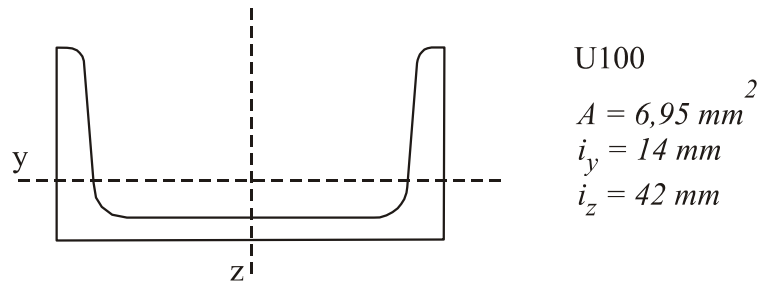
Styčnickovou popř. průsečnou metodou provedeme výpočet vnitřních sil působících na jednotlivých prutech konstrukce. Výsledky řešení jsou znázorněny na obr. 34.



Obr. 34: Normálové síly prutů příhradové konstrukce

V tažených prutech ke vzpěru nedochází, můžeme proto přímo určit maximální tahovou sílu, kterou jsou oba profily schopné přenést

$$N_{\max} = f_d \cdot A$$



Obr. 35: Geometrie průřezu U100

pro U100

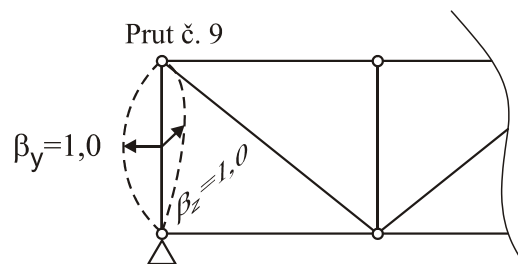
$$N_{\max} = f_d \cdot A = 210 \cdot 695 = 145,95 \text{ kN}$$

pro uzavřený profil 30x30x3

$$N_{\max} = f_d \cdot A = 210 \cdot 722 = 151,62 \text{ kN}$$

Je patrné, že u žádného taženého prutu není maximální hodnoty zatížení dosaženo.

U tlačného prutu č. 9 je normálová síla působící na prut rovna 30 kN. U příhradových nosníků předpokládáme kloubové uložení prutů \Rightarrow vzpěrné délky odpovídají v obou rovinách prostému nosníku.



Obr. 36: Vybočení prutu č. 9 v rovině a z roviny konstrukce

Prut č. 9

Štíhlosti $\lambda_y = \lambda_z = 91$, té odpovídá součinitel vzpěrnosti $\chi_a = 0,86$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{320} = 93,75 \text{ MPa} < \chi_a \cdot f_d = 0,86 \cdot 210 \text{ MPa} = 180,6 \text{ MPa}$$

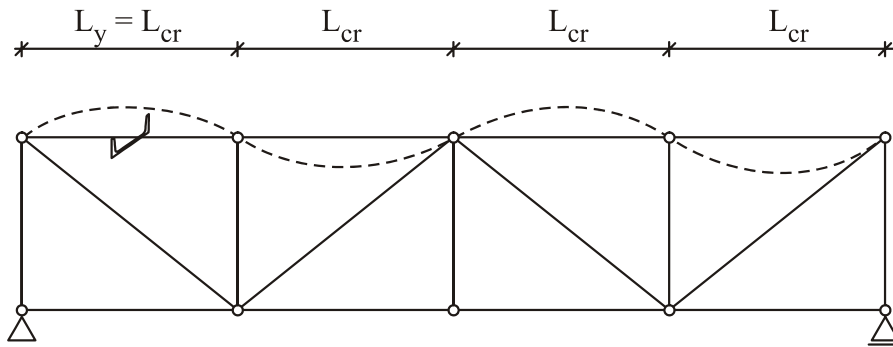
vyhoví

Prut č. 15

Štíhlosti $\lambda_y = \lambda_z = 145$ té odpovídá součinitel vzpěrnosti $\chi_a = 0,30$

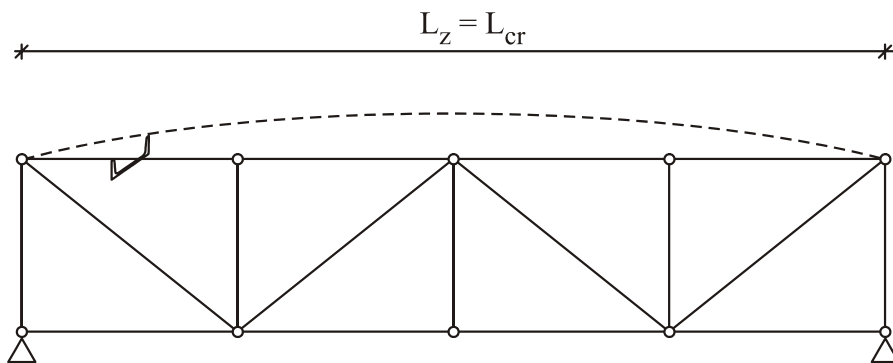
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{16 \cdot 10^3}{320} = 50 \text{ MPa} < \chi_a \cdot f_d = 0,30 \cdot 210 \text{ MPa} = 63 \text{ MPa} \text{ vyhoví}$$

Pruty horního pásu jsou v rovině příhradové konstrukce stabilizovány svíslícemi a diagonálami (viz. obr.37), proto vzpěrná délka odpovídá délce prutu.



Obr. 37: Vybočení horního pásu v rovině konstrukce

Kolmo na rovinu příhradové konstrukce však ztrátě stability není bráněno a vzpěrná délka odpovídá délce celého nosníku, tj. $\beta_z = 4$ a $L_{cr} = 5 \text{ m}$!



Obr. 38: Vybočení horního pásu z roviny konstrukce

$$\lambda_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{1,25 \cdot 10^3}{14} = 89 \xrightarrow{\text{tab.}} \chi_b = 0,63$$

$$\lambda_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{5 \cdot 10^3}{42} = 119 \xrightarrow{\text{tab.}} \chi_b = 0,42$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{695} = 53,9 \text{ MPa} < \chi_b \cdot f_d = 0,42 \cdot 210 \text{ MPa} = 88,2 \text{ MPa}$$

vyhoví

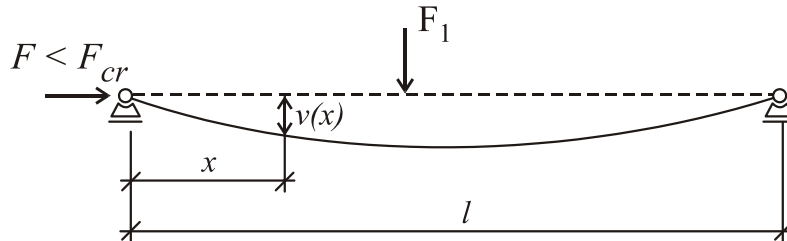
Závěr

Při posuzování prutů, které jsou součástí konstrukce, je nutno mít na zřeteli chování celé konstrukce, nikoliv jen okrajové podmínky jednotlivých prutů.

3.4 Kombinace ohybu a vzpěru



Doposud jsme se zabývali ztrátou stability dokonale přímého centricky tlčeného prutu. Působí-li tlaková síla $F < F_{cr}$ na prut s počáteční imperfekcí, mimostředně působící, popř. spolupůsobící s příčným zatížením, jedná se o velmi nebezpečnou kombinaci vzpěru a ohybu.



Obr. 39: Vzpěr s ohybem

Dle (3.3) platí

$$M(x) = M_o(x) + F \cdot v(x), \quad (3.26)$$

kde

$M(x)$ je ohybový moment vyvolaný ohybem a vzpěrným tlakem

$M_o(x)$ moment pouze od příčného zatížení při $F=0$

Rovnice obsahuje dvě neznámé funkce $M(x)$ a $v(x)$. Druhou závislostí mezi těmito funkcemi je Bernoulliho diferenciální rovnice ohybové čáry

$$M(x) = -EI \cdot v''(x) \quad (3.27)$$

Tím máme k dispozici soustavu rovnic. Ve shodě s předešlými kapitolami budeme předpokládat řešení ve tvaru

$$v(x) = A \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (3.28)$$

Derivací (3.28) dostáváme

$$v''(x) = -A \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi \cdot x}{l} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 v(x) \quad (3.29)$$

Dosazením (3.29) do (3.27) obdržíme algebraickou rovnici

$$M(x) = \frac{\pi^2 EI}{l^2} v(x) = F_{cr} \cdot v(x) \quad (3.30)$$

$$M(x) = M_o(x) + \frac{F}{F_{cr}} M(x) \quad (3.31)$$

Zavedeme-li poměr $\frac{F_{cr}}{F} = k_\varepsilon$ jako *součinitel bezpečnosti osově síly* F vůči *kritické síle* F_{cr} ,

$$M(x) = M_o(x) \frac{k_\varepsilon}{k_\varepsilon - 1} = M_o(x) \cdot \xi, \quad (3.32)$$

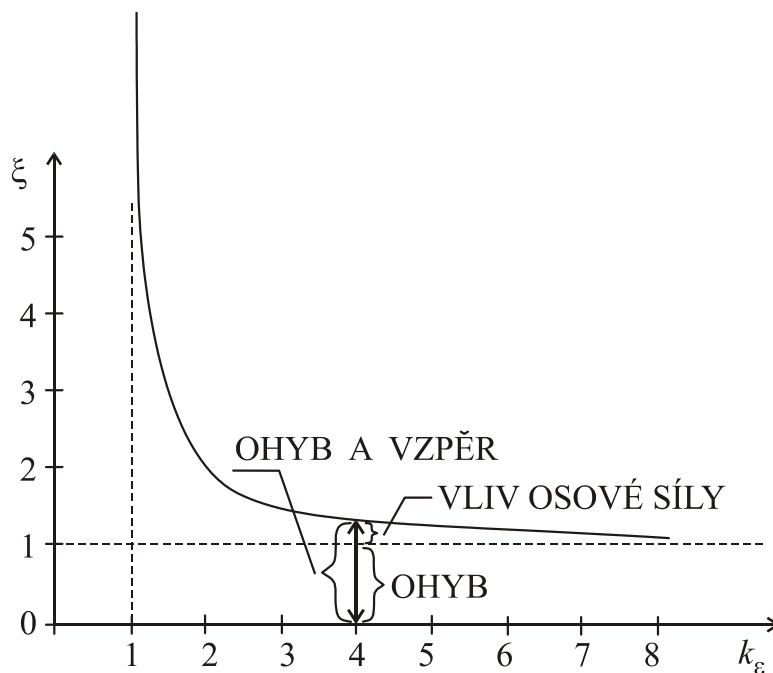
kde

$\xi = \frac{k_\varepsilon}{k_\varepsilon - 1}$ je *zesilovací součinitel* ohybového momentu $M_o(x)$. Tento součinitel charakterizuje vliv osově síly F .

Na obr. 40 je znázorněna závislost zesilovacího činitele ξ na k_ε . Je zřejmý velký vliv osově síly pro hodnoty k_ε blížíící se 1, tj. kdy se normálová síla svou hodnotou přibližuje síle kritické.

Při posudku prvku zatíženého vzpěrným tlakem a ohybem musíme do velikosti maximálního momentu zohlednit i vliv osově síly:

$$\left| \frac{F}{A} \right| + \left| \frac{M}{W} \right| = \left| \frac{F}{A} \right| + \left| \frac{\xi \cdot M_o}{W} \right| \leq \sigma_u \quad (3.33)$$



Obr. 40: Interakce vzpěru a ohybu

4 Závěr



Modul, který jste prostudovali, obsahuje informace o základních případech složeného namáhání a o stabilitních problémech prutových konstrukcí. Výše uvedená problematika byla pojata obecně, bez vazby na konkrétní typy stavebních konstrukcí. Konkrétně bude tato problematika rozvedena v odborných předmětech dalších semestrů bakalářského studia a ve studiu magisterském.

4.1 Shrnutí

Cílem předloženého textu bylo shrnutí obecných témat, která jsou tradiční součástí nauky o pružnosti a poskytnout učební text studentům distančního studia stavební fakulty.

4.2 Kontrolní otázky

- Co rozumíme pod pojmem složené případy namáhání prutu?
- Vysvětlete rozdíl mezi jednotlivými případy.
- Jaký je vztah mezi normálovým napětím a vnitřními silami při složeném namáhání?
- Vysvětlete postup určení jádra průřezu? Vysvětlete fyzikální podstatu jádra průřezu.
- Definujte případy, kdy musíme uvažovat se stabilitou prutu.
- V čem spočívá Eulerovo řešení?
- Vysvětlete pojem vzpěrné délky. V jakém intervalu se pohybuje poměr mezi vzpěrnou a skutečnou délkou prutu?
- Vysvětlete rozdíl v přístupu Eulerova řešení a pevnostního pojetí vzpěru.
- Jaký je postup posouzení prutů na vzpěr?

5 Studijní prameny

5.1 Seznam použité literatury



- [1] ŠMIŘÁK, S., *Pružnost a plasticita pro distanční studium*, Nakladatelství VUT Brno: 1995.
- [2] Bažant, Z.P., Cedolin, L. *Stability of Structure*, New York, Oxford University Press, 1991.

5.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [3] CRHA, M., ŠMIŘÁK, S., *Pružnost a plasticita (skriptum)*, Ediční středisko VUT v Brně, 1991.
- [4] Teplý, B., Šmiřák, S., *Pružnost a plasticita pro distanční studium*, Nakladatelství VUT Brno: 1993.