

Matematika 2

Garant předmětu:

Prof. RNDr. František Melkes, CSc.

Autoři textu:

Prof. RNDr. František Melkes, CSc.

Mgr. Martin Řezáč

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | ÚVOD | 4 |
| 2 | ZAŘAZENÍ PŘEDMĚTU VE STUDIJNÍM PROGRAMU | 4 |
| 2.1 | ÚVOD DO PŘEDMĚTU | 4 |
| 2.2 | VSTUPNÍ TEST | 5 |
| 3 | OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE | 6 |
| 3.1 | ZÁKLADNÍ POJMY | 6 |
| 3.2 | EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ | 9 |
| 3.3 | ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU | 10 |
| 3.3.1 | <i>Geometrická interpretace</i> | <i>10</i> |
| 3.3.2 | <i>Singulární body</i> | <i>11</i> |
| 3.3.3 | <i>Separace proměnných</i> | <i>13</i> |
| 3.3.4 | <i>Lineární rovnice</i> | <i>14</i> |
| 3.3.5 | <i>Homogenní rovnice</i> | <i>15</i> |
| 3.3.6 | <i>Exaktní rovnice</i> | <i>16</i> |
| 3.3.7 | <i>Numerické řešení</i> | <i>19</i> |
| 3.4 | SOUSTAVA ROVNIC n -TÉHO ŘÁDU | 21 |
| 3.4.1 | <i>Souvislost soustav n-tého a prvního řádu</i> | <i>21</i> |
| 3.4.2 | <i>Lineární soustava</i> | <i>23</i> |
| 3.4.3 | <i>Určení partikulárního řešení</i> | <i>24</i> |
| 3.4.4 | <i>Určení fundamentální matice</i> | <i>26</i> |
| 3.4.5 | <i>Rovnice n-tého řádu</i> | <i>27</i> |
| 3.4.6 | <i>Numerické řešení</i> | <i>29</i> |
| 3.5 | KONTROLNÍ OTÁZKY A PŘÍKLADY KE KAPITOLE 3 | 29 |
| 4 | PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE | 30 |
| 4.1 | ZÁKLADNÍ POJMY | 30 |
| 4.2 | KLASIFIKACE ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU | 31 |
| 4.3 | METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH | 32 |
| 4.4 | METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ | 33 |
| 4.5 | KONTROLNÍ OTÁZKY A PŘÍKLADY KE KAPITOLE 4 | 34 |
| 5 | DIFERENCIÁLNÍ POČET V KOMPLEXNÍM OBORU | 35 |
| 5.1 | ÚVOD | 35 |
| 5.2 | MNOŽINY KOMPLEXNÍCH ČÍSEL | 35 |
| 5.3 | POSLOUPNOSTI KOMPLEXNÍCH ČÍSEL | 37 |
| 5.4 | KOMPLEXNÍ NEKONEČNÉ ŘADY | 38 |
| 5.5 | KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ | 39 |
| 5.6 | DERIVACE FUNKCE | 40 |
| 5.7 | HOLOMORFNÍ FUNKCE | 43 |
| 5.8 | RACIONÁLNÍ FUNKCE | 46 |
| 5.8.1 | <i>Lineární funkce</i> | <i>46</i> |
| 5.8.2 | <i>Kruhová inverze</i> | <i>46</i> |
| 5.8.3 | <i>Lineární lomená funkce</i> | <i>47</i> |
| 5.8.4 | <i>Mocninná funkce</i> | <i>49</i> |
| 5.8.5 | <i>Funkce Žukovského</i> | <i>49</i> |
| 5.8.6 | <i>Obecná racionální funkce</i> | <i>50</i> |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.9 | ZÁKLADNÍ TRANSCENDENTNÍ FUNKCE | 50 |
| 5.9.1 | <i>Exponenciální funkce</i> | 50 |
| 5.9.2 | <i>Trigonometrické funkce</i> | 51 |
| 5.9.3 | <i>Hyperbolické funkce</i> | 51 |
| 5.9.4 | <i>Logaritmická funkce</i> | 52 |
| 5.9.5 | <i>Obecná mocnina</i> | 52 |
| 5.9.6 | <i>Cyklometrické funkce</i> | 53 |
| 5.9.7 | <i>Hyperbolometrické funkce</i> | 53 |
| 5.9.8 | <i>Přehled základních transcendentních funkcí</i> | 54 |
| 5.10 | KONTROLNÍ OTÁZKY A PŘÍKLADY KE KAPITOLE 5 | 54 |
| 6 | INTEGRÁLNÍ POČET V KOMPLEXNÍM OBORU | 55 |
| 6.1 | ÚVOD | 55 |
| 6.2 | INTEGRÁL..... | 55 |
| 6.3 | CAUCHYOVA VĚTA..... | 57 |
| 6.4 | CAUCHYŮV VZOREC..... | 58 |
| 6.5 | TAYLOROVA A LAURENTOVA ŘADA..... | 59 |
| 6.6 | IZOLOVANÉ SINGULÁRNÍ BODY | 61 |
| 6.7 | TEORIE REZIDUÍ | 63 |
| 6.8 | APLIKACE TEORIE REZIDUÍ | 66 |
| 7 | LAPLACEOVA TRANSFORMACE | 68 |
| 7.1 | O TRANSFORMACÍCH OBECNĚ | 68 |
| 7.2 | PŘÍMÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE | 69 |
| 7.3 | ZPĚTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE | 74 |
| 8 | VÝSLEDKY TESTŮ | 77 |

Seznam obrázků

| | | |
|---------------------|--|----|
| OBRÁZEK 3.1: | UKÁZKY SINGULÁRNÍHO ŘEŠENÍ | 8 |
| OBRÁZEK 3.2: | PRŮBĚH IZOKLIN A INTEGRÁLNÍCH KŘIVEK UKÁZKY 3.5 | 10 |
| OBRÁZEK 3.3: | PRŮBĚH ŘEŠENÍ V OKOLÍ UZLU, SEDLA, STŘEDU A OHNISKA. | 12 |
| OBRÁZEK 3.4: | PRŮBĚH ŘEŠENÍ ROVNICE $y' = 4x^3 - x$ | 13 |
| OBRÁZEK 3.5: | PRŮBĚHY INTEGRÁLNÍCH KŘIVEK UKÁZEK 3.8, 3.9 A 3.10 | 14 |
| OBRÁZEK 3.6: | OBDELNÍKOVÁ DRÁŽKA A ROVNOBĚŽNÁ VLÁKNA | 17 |
| OBRÁZEK 4.1: | TYPY VÝPOČETNÍCH SÍTÍ | 34 |
| OBRÁZEK 4.2: | NELINEÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE V SYNCHRONNÍM STROJI - MKD A MKP .. | 34 |
| OBRÁZEK 5.1: | GEOMETRICKÝ VÝZNAM C-R PODMÍNEK..... | 43 |
| OBRÁZEK 5.2: | IMPEDANCE A ADMITANCE | 47 |
| OBRÁZEK 5.3: | ELEKTRICKÉ POLE ŠESTI RŮZNÝCH SESKUPENÍ | 48 |
| OBRÁZEK 5.4: | ELEKTROMAGNETICKÉ POLE RŮZNÝCH USKUPENÍ VLNOVODŮ | 48 |
| OBRÁZEK 5.5: | SMITHŮV DI | |
| OBRÁZEK 5.6: | ZOBRAZENÍ REALIZOVANÁ NĚKTERÝMI MOCNINNÝMI FUNKCEMI | 49 |
| OBRÁZEK 5.7: | OBTĚKÁNÍ PROFILU KŘÍDLA | 50 |
| OBRÁZEK 5.8: | ZOBRAZENÍ A JEHO FYZIKÁLNÍ INTERPRETACE | 52 |
| OBRÁZEK 5.9: | NĚKTERÁ DALŠÍ INTERPRETACE HOLOMORFNÍCH FUNKCÍ | 54 |

| | |
|--|----|
| OBRÁZEK 5.10: KONSTRUKCE ZÁKLADNÍCH TRANSCENDENTNÍCH FUNKCÍ | 54 |
| OBRÁZEK 7.1: PŘEDMĚTY LAPLACEOVY TRANSFORMACE..... | 70 |

1 Úvod

Předložené elektronické texty jsou určeny studentům bakalářského studia na FEKT VUT v Brně. Obsahují nejprve základní kapitoly z oblasti řešení diferenciálních rovnic a poté nezbytné pojednání o funkci komplexní proměnné jako matematickém základu pro navazující kapitoly o integrálních transformacích. Veškerá látka je vzhledem k rozsahu a zaměření textů probírána tak, aby jednak v rozumné míře popisovala základní problematiku a hlavně aby umožňovala využití v praxi.

2 Zařazení předmětu ve studijním programu

Předmět *Matematika 2* je zařazen do druhého semestru bakalářského studia na FEKT. K jeho úspěšnému zvládnutí je zapotřebí, aby student byl v dostatečné míře seznámen se základními matematické pojmy, se základy lineární algebry a geometrie, s diferenciálním a integrálním počtem jedné i více proměnných a to v rozsahu prerekvizitního předmětu *Matematika 1*.

2.1 Úvod do předmětu

Do předmětu *Matematika 2* jsou zahrnuty dvě významné matematické disciplíny, které velice těsně souvisejí s četnými praktickými aplikacemi, a to jak technického tak i netechnického charakteru. Těmito disciplínami jsou diferenciální rovnice a integrální transformace.

S diferenciálními rovnicemi se setkáváme všude tam, kde modelujeme působení nějaké změny, pohybu či růstu, např. při navrhování elektrických obvodů, při analýze fyzikálních polí, při vyšetřování koncentrace chemických reakcí, při studiu ekonomických procesů, při sledování růstu populace, při modelování biologických pochodů a pod. Při řešení každého takového problému je nutné, a to na základě vlastností uvažované problematiky, příslušnou diferenciální rovnici (eventuálně soustavu diferenciálních rovnic) nejprve odvodit a poté vhodným způsobem vyřešit. V tomto předmětu se sestavováním diferenciálních rovnic zabývat nebudeme, zaměříme se jen na některé základní metody jejich řešení.

V praxi se ukazuje, že mnoho konkrétních úloh, zvláště úloh spojených s lineárními diferenciálními rovnicemi, lze úspěšně řešit také pomocí řady formálních operací, kdy zadaný problém nejprve vhodným způsobem transformujeme, transformovanou a zpravidla jednodušší úlohu vyřešíme a zpětnou transformací pak získáme řešení původního problému. Tento postup se s výhodou aplikuje např. ve sdělovací technice, automatizaci, teorii systémů, energetice, elektrických obvodech apod. Zaměříme se zejména na Laplaceovu a Fourierovu transformaci a na tzv. (a ne plně integrální) transformaci Z.

Před vlastním čtením skript bychom upozornili na některou užitou symboliku, která by mohla vést k nedorozumění. Symbolem C budeme v dalším rozumět prostor všech spojitých funkcí, přičemž za tento symbol uvedeme, eventuelně v závorkách, definiční obor těchto

funkcí. Tedy např. $C\langle a, b \rangle$ označuje prostor všech spojitých funkcí jedné proměnné definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$ nebo $C(\Omega)$ je prostor spojitých funkcí definovaných na oblasti Ω . Podobně je to se symbolem C_1 , který označuje prostor všech funkcí, jejichž první derivace jsou spojité. Na rozdíl od tohoto označení budeme symbolem C označovat prostor všech komplexních čísel.

2.2 Vstupní test

Před studiem následujících kapitol je nezbytné si prověřit znalosti některých pojmů, označení a metod z prerekvizitního předmětu Matematika 1. K tomu slouží následující test.

Příklad 2.1: Vysvětlete význam symbolů $\forall, \exists, \exists!, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \times, \cup, \cap, \in, \notin, \rightarrow$.

Příklad 2.2: Negujte následující složený výrok a rozhodněte o jeho pravdivosti: $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2) \Rightarrow (\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0)$.

Příklad 2.3: Vysvětlete význam označení číselných tříd $\mathbb{N}, \mathbb{I}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}$.

Příklad 2.4: Vypočítejte a v Gaussově rovině znázorněte řešení rovnice $z^6 = 1$ pro $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 2.5: Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.6: Určete množinu všech hodnot parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ takových, že kvadratická forma $K(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2\alpha xz + 2yz$ je pozitivně definitní.

Příklad 2.7: Určete, pro které hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$ je přímka p o rovnici $2x - y + c = 0$ a) tečnou, b) sečnou, c) vnější přímkou kružnice k se středem $S = [3, -1]$ a poloměrem $r = 2$.

Příklad 2.8: Co je to úplný (totální) diferenciál?

Příklad 2.9: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Příklad 2.10: Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ v bodě $A = [1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Příklad 2.11: Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ definované na E_2

Příklad 2.12: Metodou per partes najděte integrál $\int x^3 e^{3x} dx$.

Příklad 2.13: Vypočítejte $\int \frac{5 dx}{x^3 + 2x^2 + 5x}$.

Příklad 2.14: Proud v elektrickém obvodu je dán vztahem $i(t) = (4 + 5t)e^{-bt}$, kde b je kladná konstanta. Určete celkový náboj $Q = \int_0^{\infty} i(t) dt$.

Příklad 2.15: Vypočítejte integrál $\iint_M ye^x dx dy$, kde M je množina ohraničená přímkou $y = x - 2$ a parabolou $x = y^2$.

Příklad 2.16: Pomocí transformace do cylindrických souřadnic vypočítejte trojný integrál $\iiint_T z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, přičemž integrační obor T je vymezen nerovnostmi $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1$.

Příklad 2.17: Najděte hmotnost skořepiny tvaru rotačního paraboloidu daného rovnicí $z = 0,5 \cdot (x^2 + y^2), z \in [0,1]$, jestliže hustota $\gamma(x, y, z)$ je přímo úměrná vzdálenosti od souřadné roviny $z = 0$.

3 Obyčejné diferenciální rovnice

Cíle kapitoly: V této kapitole se seznámíme s některými exaktními a numerickými metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic či jejich soustav.

3.1 Základní pojmy

Obyčejnou diferenciální rovnici rozumíme rovnici obsahující nezávisle proměnnou x a neznámou funkci $y = y(x)$ jedné proměnné včetně jejich derivací. Ve speciálních případech mohou některé z těchto veličin chybět, avšak alespoň jedna z derivací se v diferenciální rovnici musí vyskytnout. Místo derivací může diferenciální rovnice obsahovat též diferenciály nezávisle proměnné a neznámé funkce. Příklady obyčejných diferenciálních rovnic:

$$y'' - y = 0, \quad y' y^{iv} - e^x y'' + y^5 = \sin x, \quad y''' + x \tan y' = (x - 1)^3, \quad x dy - e^{2y} dx = 0$$

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. Tedy rovnice z uvedené ukázky jsou postupně druhého, čtvrtého, třetího a prvního řádu.

Obecný tvar rovnice můžeme uvést v *implicitním* nebo *explicitním* (tj. vyřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci) tvaru. Tedy

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{je implicitní tvar diferenciální rovnice } n\text{-tého řádu,}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{je explicitní tvar diferenciální rovnice } n\text{-tého řádu.}$$

Abychom toto obecně pojaté vyjádření poněkud konkretizovali, lze speciálně pro rovnici prvního a druhého řádu psát:

$$f(x, y, y') = 0, \quad y' = f(x, y), \quad f(x, y, y', y'') = 0, \quad y'' = f(x, y, y').$$

V těchto ukázkách vyznačuje symbol f tzv. *generickou funkci*, která jen naznačuje, že se jedná o funkční závislost, nemusí to být však tatáž funkce.

Řešením obyčejné diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která v nějakém intervalu dané rovnici identicky vyhovuje. Křivku, která toto řešení znázorňuje, nazýváme *integrální křivkou*. Řešení vyšetřované diferenciální rovnice nemusí v některých případech vůbec existovat, zatímco v jiných případech jich může existovat více, i nekonečně mnoho. Rovnici považujeme za vyřešenou, určíme-li všechna její řešení. Každé konkrétní řešení nazýváme *partikulárním řešením*. Nalezeme-li univerzální vzorec, který zahrnuje všechna

partikulární řešení, mluvíme o *obecném řešení*. Toto obecné řešení obsahuje n navzájem nezávislých integračních konstant c_1, \dots, c_n , přičemž n označuje řád rovnice. Jedná se vlastně o n -parametrickou třídu funkcí, kterou můžeme získat v jednom z následujících tvarů:

$$\textit{implicitní tvar} \quad \Phi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$$

$$\textit{explicitní tvar} \quad y = \Psi(x, c_1, \dots, c_n)$$

$$\textit{parametrický tvar} \quad x = x(t, c_1, \dots, c_n), \quad y = y(t, c_1, \dots, c_n), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Ne každá n -tice konstant vyjadřuje obecné řešení. Např. funkce $y = c_1 e^{x+c_2}$ není obecným řešením rovnice $y'' - y = 0$, neboť uvedené konstanty nejsou nezávislé. Řešení lze totiž upravit na tvar $y = c e^x$, kde $c = c_1 e^{c_2}$. Za integrační konstanty nelze vždy volit libovolná čísla. Např. u rovnice $y y' + x = 0$ můžeme řešení získat v implicitním tvaru $x^2 + y^2 = c$, z něhož vyplývá omezení $c > 0$.

Diferenciální rovnice může mít ještě *singulární řešení*, které je jistým způsobem výjimečné. V matematické literatuře existují sice tři definice singulárního řešení, avšak žádné dvě z nich nejsou ekvivalentní. Podle těchto definic nazýváme řešení singulárním jestliže:

- buď není obsaženo v obecném řešení
- nebo je v každém jeho bodě porušena jednoznačnost
- nebo jsou všechny jeho přímkové elementy singulární.

Podle první definice tedy singulární řešení není speciálním případem obecného řešení pro žádnou konkrétní n -tici integračních konstant. Podle druhé definice každým bodem singulárního řešení prochází alespoň dvě integrační křivky dané rovnice. Podle třetí definice singulární řešení vyhovuje např. pro implicitní rovnici prvního řádu soustavě dvou rovnic $f(x, y, y') = 0$, $f_{y'}(x, y, y') = 0$. Daná funkce tedy podle některé z definic může představovat singulární řešení, zatímco podle jiné definice ne. To demonstrují následující ukázky.

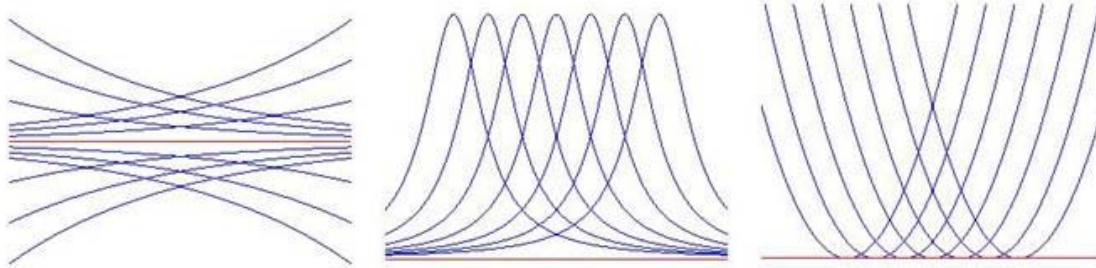
Ukázka 3.1: Vyšetřujeme rovnici $y'^2 = y^2$. Funkce $y_0 = 0$ je obsažena v jejím obecném řešení $y = c e^{\pm x}$ pro $c = 0$, žádným jejím bodem neprochází jiné řešení uvedené rovnice, avšak vyhovuje soustavě rovnic $f(x, y, y) \equiv y'^2 - y^2 = 0$, $f_{y'}(x, y, y') \equiv 2y' = 0$. Podle prvních dvou definic se tedy nejedná o singulární řešení, podle třetí definice však ano.

Ukázka 3.2: Nyní studujeme rovnici $y' = -y^2 \sqrt{1 - y^2}$. Funkce $y_0 = 0$ není obsažena v jejím implicitně zadaném obecném řešení $y = \operatorname{sgn}(x - c)(1 + (x - c)^2)^{3/2}$, žádným jejím bodem neprochází další řešení studované rovnice. Funkce y_0 sice vyhovuje rovnici $f(x, y, y') \equiv y' + y^2 \sqrt{1 - y^2} = 0$, avšak nevyhovuje druhé rovnici, neboť $f_{y'}(x, y, y') \equiv 1 \neq 0$. Podle první definice se tedy jedná o singulární řešení, podle zbývajících dvou však ne.

Ukázka 3.3: Nakonec vyšetříme rovnici $y'^2 = 4y$, $y > 0$. Funkce $y_0 = 0$ není obsažena v jejím obecném řešení $y = (x - c)^2$ pro žádnou hodnotu c , libovolným jejím bodem \hat{x} prochází ještě další řešení $\hat{y} = (x - \hat{x})^2$ a vyhovuje soustavě rovnic $f(x, y, y') \equiv y'^2 - 4y = 0$, $f_{y'}(x, y, y') \equiv 2y' = 0$. Funkce y_0 je tedy singulárním řešením podle všech tří definic.

Průběhy řešení uvedených ukázek znázorňuje ve stejném pořadí

Obrázek 3.1. Červeně je zde vyznačeno singulární řešení, které u všech tří ukázek splývá s osou x .



Obrázek 3.1: Ukázky singulárního řešení

Uvedli jsme, že řešení diferenciální rovnice závisí obecně na n integračních konstantách. Abychom tyto konstanty jednoznačně určili, musíme k diferenciální rovnici přidat ještě n navzájem nezávislých *vedlejších podmínek*. Jsou-li tyto podmínky zadány v jednom bodě, nazývají se *počátečními*, jsou-li zadány ve více bodech, nazývají se *okrajovými*. Jako technická interpretace počátečních a okrajových podmínek nám může posloužit jednostranně a dvoustranně vetknutý nosník. Diferenciální rovnici spolu s počátečními či okrajovými podmínkami nazýváme *počáteční* či *okrajovou úlohou*. Vedlejší podmínky hrají při řešení diferenciálních úloh důležitou roli, neboť mohou velice ovlivnit tvar výsledného řešení, jak naznačuje následující ukázka.

Ukázka 3.4: Uvažujme rovnici druhého řádu $y'' + y = 0$, kterou pro dosažení jednoznačnosti řešení doplníme dvěma vedlejšími podmínkami. Vyberme sedm možností:

- počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ vedou na řešení $y = \sin x$,
- okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ dávají totéž řešení $y = \sin x$,
- okrajové podmínky $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ poskytují řešení $y = \cos x$,
- okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ implikují nulové řešení $y = 0$,
- počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ dávají $y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$,
- okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ dávají $y = c \sin x$, kde c je libovolné,
- okrajové podmínky $y(0) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ nedávají žádné řešení.

Vystupuje-li v rovnici neznámá funkce y včetně všech svých derivací nejvýše v prvním stupni, mluvíme o *lineární diferenciální rovnici*. Tuto rovnici můžeme tedy zapsat v obecném tvaru

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x).$$

Příkladem lineární rovnice druhého řádu je rovnice z předchozí ukázky. Rovnice, která není lineární je *nelineární*.

3.2 Existence a jednoznačnost řešení

Již jsme zmínili, že zadaná diferenciální úloha nemusí mít žádné řešení. Např. počáteční úloha $y y' + x = 0$, $y(0) = 0$ v reálném oboru žádné řešení nemá, v komplexním oboru však má řešení dvě $y = \pm j x$, kde $j^2 = -1$. Pro praktické aplikace je však žádoucí, aby řešení bylo jediné. Musíme tedy nejprve stanovit nějaké podmínky, za nichž řešení dané úlohy vůbec existuje a podmínky, za nichž je jediné. Existuje řada vět, které na tyto otázky odpovídají. Vybereme jen dvě z nich. S ohledem na další kapitoly se budeme zabývat úlohou n -tého řádu. Za tím účelem předpokládáme, že máme danu $(n+1)$ -rozměrnou oblast Ω a v ní bod $[x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}] \in \Omega$. Počáteční úlohu, kterou budeme vyšetřovat, formulujeme takto:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3.1)$$

Tvrzení následujících vět zapíšeme nejprve přehledným matematickým zápisem a tento zápis ihned vysvětlíme.

Věta 3.1: $f \in C(\Omega) \Rightarrow \exists$ řešení úlohy (3.1) v okolí x_0 , tj. je-li funkce f v oblasti Ω spojitou funkcí všech svých argumentů, pak v okolí bodu x_0 řešení úlohy (3.1) existuje.

K zajištění jednoznačnosti řešení úlohy (3.1) však samotná spojitost funkce f nestačí a proto musíme předpoklad zesílit. Budeme požadovat navíc, aby funkce měla spojitě i první derivace podle všech argumentů, tj. aby byla hladká.

Věta 3.2: $f \in C_1(\Omega) \Rightarrow \exists!$ řešení úlohy (3.1) v okolí x_0 , tj. je-li funkce f v oblasti Ω hladkou funkcí všech svých argumentů, pak v okolí bodu x_0 existuje právě jedno řešení úlohy (3.1).

Důsledek: Lineární rovnice

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + f_1(x) y' + f_0(x) y = f(x) \quad (3.2)$$

má jednoznačné řešení na celém intervalu, i nekonečném, v němž jsou funkce $f_{n-1}(x), \dots, f_0(x), f(x)$ spojitě a který obsahuje bod x_0 .

Povšimněme si ještě vlivu počátečních podmínek na řešení naší úlohy.

Věta 3.3: $f \in C(\Omega)$, $\forall [x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}] \in \Omega \Rightarrow \exists!$ řešení $y = \varphi(x, x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \Rightarrow \varphi \in C(I \times \Omega)$, tj. je-li funkce f v oblasti Ω spojitá a existuje-li pro každé počáteční podmínky z této oblasti právě jedno řešení úlohy (3.1), pak toto řešení závisí spojitě na počátečních podmínkách.

3.3 Rovnice prvního řádu

3.3.1 Geometrická interpretace

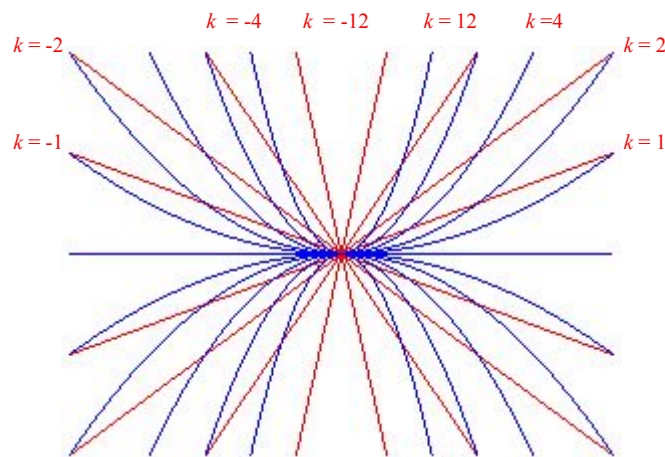
Nejprve se budeme zabývat diferenciální rovnicí prvního řádu v explicitním tvaru. Obecné řešení této rovnice obsahuje jednu integrační konstantu, takže můžeme předepsat jen jednu vedlejší podmínku, tj. podmínku počáteční. Budeme tedy vyšetřovat počáteční úlohou

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.3)$$

Proveďme nejprve geometrickou interpretaci této úlohy. Každému bodu $[x, y]$ roviny (x, y) můžeme přiřadit hodnotu funkce $f(x, y)$ a tuto hodnotu můžeme chápat jako směrnici tečny ke grafu řešení (integrální křivce) v bodě $[x, y]$. Trojici čísel $(x, y, f(x, y))$ nazveme *lineárním elementem* rovnice (3.3) a množinu všech lineárních elementů jejím *směrovým polem*. Rovnici (3.3) můžeme přepsat na $f(x, y) = k$ a $y' = k$, kde k je nějaká konstanta. První z těchto rovnic je implicitním vyjádřením rovinné křivky, kterou nazýváme *izoklina*. Druhá rovnice říká, že každé řešení protíná izoklinu se stejnou směrnici k .

Ukázka 3.5: Situaci si ilustrujme na rovnici $y' = 2 \frac{y}{x}$. Zvolme pevně konstantu k . Pak odpovídající izoklina, na níž graf každého řešení má směrnici $y' = k$, má tvar $y = \frac{k}{2}x$.

Obrázek 3.2 znázorňuje odpovídající izokliny (červené čáry) a integrální křivky (modré čáry) pro různá k . Zejména lze prověřit, že všechny integrální křivky protínají izoklinu $k=1$ pod úhlem 45° .



Obrázek 3.2: Průběh izoklin a integrálních křivek ukázky 3.5

Z předchozích vět vyplývá věta o jednoznačné existenci řešení naší úlohy.

Věta 3.4 Necht' jsou funkce f a f_y spojité v celé rovině (x, y) . Pak pro libovolné počáteční podmínky existuje právě jedno řešení počáteční úlohy (3.3), které je buď definováno na celé číselné ose nebo má jednu či dvě asymptoty bez směrnice.

Ukázka 3.6: Vyšetřeme počáteční problém $y' = 2x(y^2 + 1)$, $y(0) = 0$. Funkce $f(x, y) = 2x(y^2 + 1)$ zřejmě splňuje předpoklady předchozí věty (jedná se o polynom), takže existuje právě jedno řešení zadaného problému. Dosazením se přesvědčíme, že tímto řešením je funkce $y = \tan x^2$, která je definována v intervalu $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ a má tedy v bodech $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ dvě asymptoty bez směrnice.

3.3.2 Singulární body

Singulárními body diferenciální rovnice rozumíme body, které jsou z nějakého důvodu výjimečné. Např. v bodech, v nichž nejsou splněny předpoklady předchozí věty, nemusí řešení existovat, ale může zde existovat více, i nekonečně mnoho, řešení. Abychom mohli singulární body blíže popsat přepíšeme si rovnici (3.3) do tvaru

$$y' = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}, \quad (3.4)$$

přičemž funkce $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ jsou v nějaké rovinné oblasti Ω hladké. Zvolme $[x_0, y_0] \in \Omega$. Platí-li alespoň jedna z podmínek $f_1(x_0, y_0) \neq 0$ či $f_2(x_0, y_0) \neq 0$, pak podle věty 3.4 prochází bodem $[x_0, y_0]$ právě jedno řešení (při nesplnění druhé podmínky musíme zaměnit závisle a nezávisle proměnnou) a nejedná se tedy o singulární bod. Pro singulární bod musí platit současně $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$.

Abychom další úvahy formálně zjednodušili, přesuneme bod $[x_0, y_0]$ pomocí lineární transformace obou proměnných do počátku. Vzhledem k předpokladům o funkcích f_1 a f_2 lze v okolí singulárního bodu $[0, 0]$ psát

$$f_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + \varphi_1(x, y), \quad f_2(x, y) = a_2 x + b_2 y + \varphi_2(x, y),$$

přičemž funkce $\varphi_1(x, y)$ a $\varphi_2(x, y)$ konvergují dostatečně rychle k nule pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$. Můžeme se proto omezit na rovnici

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Průběh řešení v okolí singulárního bodu $[0, 0]$ závisí na kořenech charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - (a_2 + b_1)\lambda + a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0.$$

Tato závislost je vyjádřena tabulkou udávající mimo jiné název singulárního bodu a počet řešení, která tímto bodem procházejí.

| kořeny | název | počet řešení | poznámka |
|---|---------|--------------|--|
| reálné, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ | uzel | ∞ | $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ stabilní uzel $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ nestabilní uzel |
| reálné, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ | sedlo | 2 | |
| komplexní, $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0$ | ohnisko | ∞ | $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ stabilní ohnisko $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ nestabilní ohnisko |
| komplexní, $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ | střed | 0 | |

Ukázka 3.7: Abychom ilustrovali jednotlivé typy singulárních bodů, uveďme si čtyři jednoduché rovnice. U každého případu uveďme výchozí rovnici, charakteristickou rovnici s jejími kořeny, typ singularity a tvar obecného řešení. O správnosti obecného řešení se přesvědčíme dosazením do výchozí rovnice. Průběh řešení v okolí jednotlivých singularit uvádí **Obrázek 3.3**.

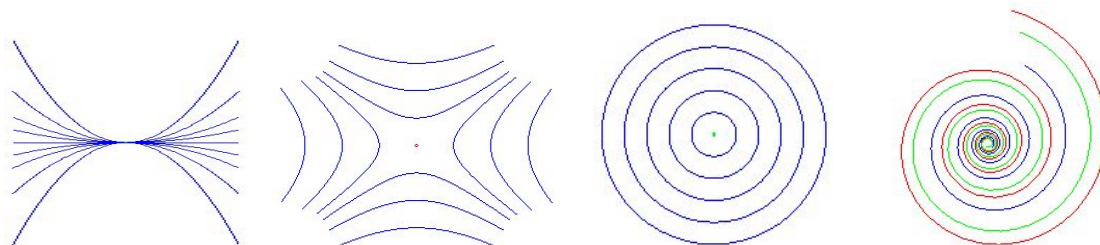
$$\text{a) } y' = 2 \frac{y}{x} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \text{uzel, } y = cx$$

$$\text{b) } y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow \text{sedlo, } y^2 - x^2 = c$$

$$\text{c) } y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j, \lambda_2 = -j \Rightarrow \text{střed, } y^2 + x^2 = c$$

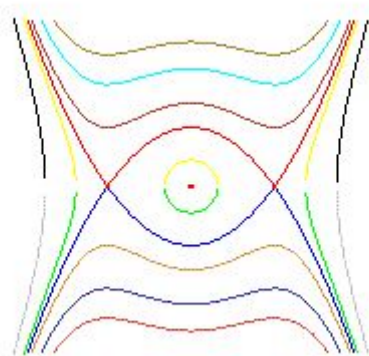
$$\text{d) } y' = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1+j, \lambda_2 = 1-j \Rightarrow \text{ohnisko,}$$

$$r = c \exp(\varphi), \text{ kde } x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$



Obrázek 3.3: Průběh řešení v okolí uzlu, sedla, středu a ohniska.

Ukázka 3.8: Máme nalézt singulární body rovnice $y y' = 4x^3 - x$. Abychom zjistili souřadnice těchto bodů, musíme nejprve nalézt všechna řešení soustavy rovnic $4x^3 - x = 0$, $y = 0$. Protože soustava má tři řešení, má zadaná rovnice tři singulární body $[0, 0]$, $[\frac{1}{2}, 0]$ a $[-\frac{1}{2}, 0]$. Zabýváme se nejprve bodem $[0, 0]$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ příslušná tomuto bodu má komplexně sdružené ryze imaginární kořeny a proto je bod $[0, 0]$ středem. Abychom prošetřili bod $[\frac{1}{2}, 0]$ posuneme jej pomocí transformace $\xi = x - \frac{1}{2}$, $\eta = y$ do počátku nových souřadnic ξ, η . Transformovaná rovnice tak získá tvar $\eta \eta' = \xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi$. Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2 = 0$ má reálné kořeny opačných znamének a proto je bod $[\frac{1}{2}, 0]$ sedlem. Podobným způsobem zjistíme, že i bod $[-\frac{1}{2}, 0]$ je sedlem. Daná rovnice má tedy tři singulární body – střed a dvě sedla. Dosazením do zadané rovnice můžeme ověřit, že funkce $y = \pm \sqrt{2x^4 - x^2 + c}$ je jejím obecným řešením. Průběh této funkce pro několik c znázorňuje Obrázek 3.4.



Obrázek 3.4: Průběh řešení rovnice $y y' = 4x^3 - x$

Pro praxi je velice důležité určit obecné řešení dané rovnice. Protože neexistuje univerzální metoda řešení diferenciálních rovnic, omezíme se jen na některé nejdůležitější typy rovnic a pro ně uvedeme způsob exaktního řešení.

3.3.3 Separace proměnných

Diferenciální rovnici se separovanými proměnnými rozumíme rovnicí tvaru

$$y' = f(x)g(y) \quad (3.5)$$

Obecný integrál této rovnice lze psát ve tvaru

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c \quad (3.6)$$

Abychom alespoň zhruba naznačili, proč tomu tak je, upravme rovnici (3.5) na tvar $\frac{y'(x) dx}{g(y(x))} = f(x) dx$. Zvážíme-li, že $y'(x) dx = dy$, dosadíme do předchozí relace a obě strany zintegrujeme, dostaneme (3.6). Vzhledem k tomu, že se funkce $g(y)$ vyskytuje ve jmenovateli, musíme při praktickém řešení případ $g(y) = 0$ vyšetřit zvlášť.

Speciálně rovnice tvaru $f_1(x)g_1(y)y' = f_2(x)g_2(y)$ se na rovnici se separovanými proměnnými snadno převedou.

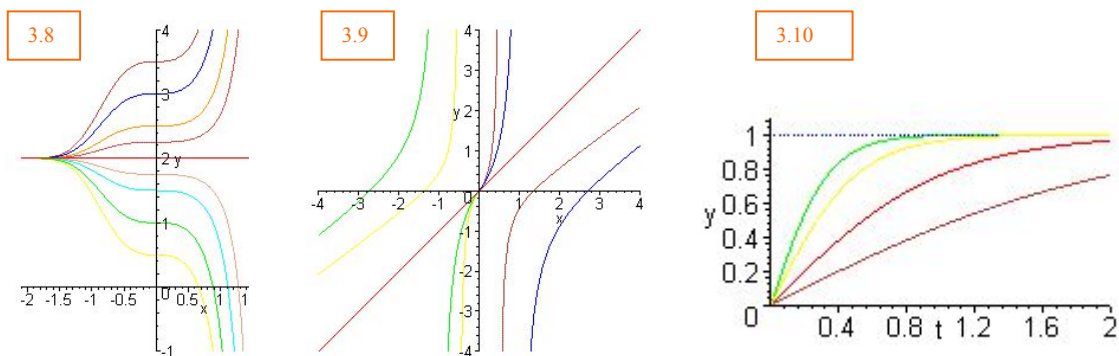
Ukázka 3.8: Máme nalézt obecné řešení rovnice $y' = 3x^2(y-2)$. Rovnici nejprve upravíme na tvar $\frac{dy}{y-2} = 3x^2 dx$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Integrací obou jejích stran získáme $\ln(y-2) = x^3 + \ln c$, odkud odlogaritmováním dostaneme obecné řešení $y = 2 + c \exp(x^3)$. Nesmíme zapomenout na mlčky provedený předpoklad, že $y-2 \neq 0$, neboť $y=2$ též vyhovuje zadané rovnici. Toto řešení je však již obsaženo v obecném řešení pro $c=0$. Průběh integrálních křivek pro různá c znázorňuje **Obrázek 3.6**. Případ $c=0$ je vykreslen červeně.

Ukázka 3.9: Hledáme všechna řešení rovnice $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$. Tuto rovnici nelze přímo separovat. Zavedeme proto novou neznámou z pomocí relace $y = xz$ a získáme tak

po úpravě rovnici $xz' = (z-1)^2$, kterou již separovat lze. Z této rovnice vyplývá $\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x}$

a odsud $\frac{1}{1-z} = \ln|x| + \ln\tilde{c} = \ln(cx)$, neboť $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Přejdem k původní neznámé získáme nakonec obecné řešení ve tvaru $y = x(1 - \frac{1}{\ln(cx)})$. Během úprav jsme dělili dvojčlenem $z-1$, který nabývá nulové hodnoty pro $z=1$ a to odpovídá funkci $\tilde{y} = x$. Tato funkce zadané rovnici též vyhovuje, avšak není obsažena v obecném řešení pro žádnou hodnotu integrační konstanty c . Jednparametrický systém funkcí y a funkce \tilde{y} představují všechna řešení výchozí rovnice. Průběh integrálních křivek znázorňuje **Obrázek 3.5**. Jedině funkce \tilde{y} , znázorněná červeně, je definována na celé číselné ose. Partikulární řešení jsou pro $c > 0$ či pro $c < 0$ definována jen na poloose $(0, \infty)$, případně $(-\infty, 0)$. Tato řešení jsou nespojitá v bodě $x = \frac{1}{c}$.

Ukázka 3.10: V R-L obvodu je zapojena nelineární cívka s charakteristikou $i = k\Phi^2$, kde k je zadaná konstanta. Stanovte proudovou odezvu $i = i(t)$, je-li v čase $t=0$ sepnut vypínač. Uvedený obvod je popsán počáteční úlohou $\frac{d\Phi}{dt} + Ri = U_0$, $i(0) = 0$. Po dosažení za proud dospějeme k rovnici $\frac{d\Phi}{dt} + kR\Phi^2 = U_0$. Jejím separováním dostaneme $\frac{d\Phi}{1 - \kappa^2\Phi^2} = U_0 dt$, kde jsme položili $\kappa = \sqrt{\frac{kR}{U_0}}$. Integrací získáme $\operatorname{arctgh}(\kappa\Phi) = \kappa U_0 t + c$. Z počáteční podmínky pro proud vyplývá, že také $\Phi(0) = 0$, což implikuje $c = 0$. Proto $\Phi = \tanh(\kappa U_0 t) / \kappa$ a dosazením do charakteristiky $i = \frac{U_0}{R} \tanh^2(\kappa U_0 t)$. Průběh proudové odezvy je v případě $U_0 = R$ pro některé hodnoty κ vynesena na obrázku **Obrázek 3.5**.



Obrázek 3.5: Průběhy integrálních křivek ukázek 3.8, 3.9 a 3.10

3.3.4 Lineární rovnice

Lineární rovnice se v praxi velice často vyskytuje. Má tvar

$$y' + f(x)y = g(x), \quad x \in I \quad (3.7)$$

Platí-li $f, g \in C(I)$, tj. jsou-li obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu I spojité, pak v důsledku věty (3.4) má lineární rovnice pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$ právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu I . Obecné řešení lineární rovnice je pak dáno relací

$$y = \exp(-F(x)) \left[c + \int g(x) \exp(F(x)) dx \right], \quad \text{kde } F(x) = \int f(x) dx. \quad (3.8)$$

Řešení lineární rovnice tedy vyžaduje v obecném případě provedení dvou kvadratur.

Ukázka 3.11: Máme nalézt všechna řešení rovnice $y' - 2xy = 4x^3$. Vidíme ihned, že obě funkce $f(x) = -2x$ a $g(x) = 4x^3$ jsou na celé číselné ose spojité. První kvadratura je velice jednoduchá, neboť $F(x) = -2 \int x dx = -x^2$. Dosazením do vzorce (3.8) pak obdržíme $y = \exp(x^2) (c + 4 \int x^3 \exp(-x^2) dx)$. Pro výpočet integrálu nejprve zavedeme substituci $t = x^2$ a transformovaný integrál vypočteme metodou per partes. Po úpravách získáme nakonec systém funkcí $y = c \exp(x^2) - 2x^2 - 2$, který obsahuje všechna řešení dané rovnice.

Ukázka 3.12: Lineární R-L obvod se střídavým buzením je popsán diferenciální rovnicí $L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t$, v níž všechny koeficienty jsou kladné. Máme určit proudovou odezvu

$i = i(t)$, platí-li $i(0) = 0$. Obě funkce $f(t) = \frac{R}{L}$ a $g(t) = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$ dané rovnice jsou spojité.

V tomto případě $F(t) = \frac{R}{L} t$. Dosazením do (3.9) pak po dvojí integraci per partes dospějeme k obecnému řešení $i(t) = c \exp(-\frac{R}{L} t) + \hat{E} \sin(\omega t - \delta)$, kde jsme pro jednoduchost označili

$\tan \delta = \frac{\omega L}{R}$ a $\hat{E} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{E_0}{R} |\cos \delta|$. Integrační konstantu c určíme z počáteční

podmínky, neboť $0 = c - \hat{E} \sin \delta$. Proudová odezva $i(t) = \hat{E} (\exp(-\frac{R}{L} t) \sin \delta + \sin(\omega t - \delta))$ tedy obsahuje periodickou složku a thumenou složku, která po určitém čase prakticky zanikne.

Abychom si nemuseli pamatovat vzorec (3.8), je v podkapitole 3.4.3 uveden ještě jeden způsob řešení lineární rovnice.

3.3.5 Homogenní rovnice

Homogenní rovnici označujeme rovnicí $y' = f(\frac{y}{x})$, kde f je spojitá funkce. Zavedením nové proměnné z pomocí relace $y = xz$ převedeme homogenní rovnici na separabilní tvar $xz' = f(z) - z$.

Poznamenejme, že převodem na homogenní rovnici lze řešit i obecnější rovnici $y' = f(\frac{ax+by+c}{\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}})$, kde f je spojitá funkce a a, \dots, \bar{c} jsou konstanty. Za tím účelem v případě

$D \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{vmatrix} \neq 0$ odstraníme absolutní členy c a \bar{c} a to tak, že zavedeme nové proměnné

$\xi = x - x_0$ a $\eta = y - y_0$, přičemž konstanty x_0 a y_0 vyhovují soustavě lineárních rovnic $ax_0 + by_0 + c = 0$, $\bar{a}x_0 + \bar{b}y_0 + \bar{c} = 0$, která je vzhledem k nenulovému determinantu

soustavy jednoznačně řešitelná. Je-li $D = 0$ získáme separovatelnou rovnici pomocí substituce $z = ax + by$ přímo.

Ukázka 3.13: *Nalezneme všechna řešení rovnice $x dy = (4y - 30x) dx$. Protože je rovnice zadána pomocí diferenciálů, budeme v tomto stylu pokračovat i při hledání řešení. Zavedme substituci $y = xz$, která implikuje $dy = z dx + x dz$. Dosazením do výchozí rovnice získáme po úpravě separabilní rovnici $x dz = 3(z - 10) dx$, z níž integrací a odlogaritmováním dostaneme $z = cx^3 + 10$, takže obecné řešení má tvar $y = cx^4 + 10x$. Při řešení jsme dělili faktory x a $z - 10$. Dosazením do výchozí rovnice se přesvědčíme, že také funkce $\tilde{y} = xz = 10x$ ji vyhovuje. Toto řešení je však speciálním případem obecného řešení pro $c = 0$, takže všechna řešení jsou obsažena v obecném řešení.*

3.3.6 Exaktní rovnice

V tomto odstavci se budeme zabývat rovnicí tvaru

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0. \quad (3.9)$$

Je-li levá strana této rovnice úplným diferenciálem, mluvíme o exaktní rovnici. Připomeňme, že platí-li v nějaké rovinné oblasti Ω relace $f(x, y), g(x, y) \in C_1(\Omega)$, pak levá strana (3.9) je úplným diferenciálem právě tehdy, když je zde splněna rovnost $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Označme $F \equiv F(x, y)$ funkci, jejímž úplným diferenciálem levá strana (3.9) je. Pak podle definice úplného diferenciálu musí tato funkce vyhovovat soustavě rovnic

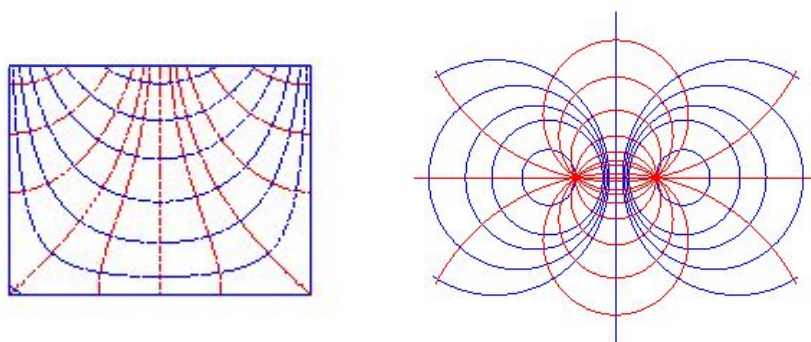
$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y). \quad (3.10)$$

Určíme-li funkci F , pak obecné řešení exaktní rovnice je dáno implicitně relací $F(x, y) = c$. Způsob, jak funkci F prakticky určit, nejlépe vysvitne z následující ukázky.

Ukázka 3.14: *Určeme všechna řešení rovnice $(2x^3 - 3xy^2) dx + (4y^3 - 3x^2y) dy = 0$. Obě funkce $f = 2x^3 - 3xy^2$ i $g = 4y^3 - 3x^2y$ jsou spojitě diferencovatelné v celé rovině a splňují $\frac{\partial f}{\partial y} = -6y = \frac{\partial g}{\partial x}$. První z rovnic (3.10) má v našem případě tvar $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x^3 - 3xy^2$. Integrací této rovnice podle x získáme $F = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \tilde{c}(y)$. Zde si musíme uvědomit, že jsme integrovali podle proměnné x a že tedy integrační konstanta $\tilde{c} = \tilde{c}(y)$ může záviset na zbývajících proměnných. Tuto funkci jedné proměnné určíme z druhé podmínky (3.10), v níž použijeme právě dosažený tvar funkce F . Postupně získáme $-3x^2y^2 + \tilde{c}' = 4y^3 - 3x^2y^2 \Rightarrow \tilde{c}' = 4y^3 \Rightarrow \tilde{c} = y^4 + c$, kde c již nezávisí na žádné z proměnných. Obecné implicitní řešení má tedy po zjednodušení tvar $x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 = c$, kde c je generická konstanta.*

Ukázka 3.15: *Stacionární magnetické pole dlouhé drážky obdélníkového průřezu o rozměrech a a b , buzené na horní straně polem $\varphi = \varphi_0 \sin \kappa x$, kde $\kappa = \frac{\pi}{a}$, a na zbývajících stranách obklopené feromagnetikem s permeabilitou $\mu = \infty$ je popsáno skalárním magnetickým potenciálem $\varphi = U \sin \kappa x \sinh \kappa y$, $U = \varphi_0 / \sinh \kappa b$. Určete rovnice siločar*

pole intenzity $\vec{H} = -\text{grad } \varphi$. Siločáry v rovině jsou popsány rovnicí $H_y dx = H_x dy$, tj. $\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = 0$. V našem případě tedy $\sin \kappa x \cosh \kappa y dx - \cos \kappa x \sinh \kappa y dy = 0$. Snadno se přesvědčíme, že tato rovnice je exaktní a proto $F = \int \sin \kappa x \cosh \kappa y dx = -\frac{1}{\kappa} \cos \kappa x \cosh \kappa y + \tilde{c}(y)$. Dosazením takto získaného mezivýsledku do $\frac{\partial F}{\partial y} = -\cos \kappa x \sinh \kappa y + \tilde{c}'(y)$ dospějeme k $\tilde{c}'(y) = 0 \Rightarrow \tilde{c}(y) = c_0$. Hledaná funkce F je tedy $F = -\frac{1}{\kappa} \cos \kappa x \cosh \kappa y + c_0$, z níž po úpravě obdržíme rovnici siločar $\cos \kappa x \cosh \kappa y = c$. Siločáry prezentuje **Obrázek 3.6** červeně. Pro zajímavost je zde modře vykreslen i systém ortogonálních křivek, odpovídajících ekvipotenciálním hladinám $\varphi = \text{konst.}$, tj. čáry $\sin \kappa x \sinh \kappa y = c$. Znovu zdůrazněme, že každá červená křivka protíná každou modrou křivku pod pravým úhlem.



Obrázek 3.6: Obdélníková drážka a rovnoběžná vlákna

Případ, kdy levá strana (3.9) není úplným diferenciálem lze na exaktní rovnici poměrně jednoduše převést. Za tím účelem vynásobíme (3.9) zatím neurčenou funkcí $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ dvou proměnných, zvanou *integrační faktor*. Dostaneme tak $\mu f dx + \mu g dy = 0$. Po takto vzniklé rovnici budeme požadovat, aby splňovala podmínku pro úplný diferenciál, tj. aby $\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial x}$. Provedením naznačených derivací a úpravou dospějeme k parciální diferenciální rovnici

$$g \frac{\partial \mu}{\partial x} - f \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right). \quad (3.11)$$

Nalézt obecné řešení této rovnice je ovšem mnohem složitější než u výchozí rovnice. Vtip tohoto postupu však spočívá v tom, že rovnici (3.11) nemusíme řešit obecně. Za integrační faktor můžeme vzít libovolné konkrétní řešení rovnice (3.11), tedy zpravidla to nejjednodušší. Většinou se nejprve zkouší případ, kdy integrující faktor μ závisí jen na jedné proměnné. Více osvětlí následující ukázky.

Ukázka 3.16: Řešme rovnici $(x^3 + 2xy^2)dx + x^2y dy = 0$. Zde $f = x^3 + 2xy^2$, $g = x^2y$ a tudíž $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy \neq \frac{\partial g}{\partial x} = 2xy$, neleží-li bod na některé ze souřadných os. Zadaná rovnice není exaktní a proto použijeme integrační faktor μ . Rovnice (3.11) má v tomto případě tvar

$x^2 y \frac{\partial \mu}{\partial x} - (x^3 + 2x y^2) \frac{\partial \mu}{\partial y} = 2x y \mu$. Abychom našli nějaké řešení takto vzniklé parciální diferenciální rovnice, povšimněme si jejího tvaru. Zvolíme-li $\mu = \mu(x)$, pak druhý člen, který je nejkomplicovanější, vymizí a zbývající dva členy jsou úměrné proměnné y . Po vykrácení součinem $x y$ obdržíme obyčejnou diferenciální rovnici $x \mu' = 2 \mu$ se separovanými proměnnými, jejíž řešení je např. $\mu = x^2$. Touto funkcí vynásobíme výchozí rovnici a dostaneme exaktní rovnici $(x^5 + 2x^3 y^2) dx + x^4 y dy = 0$. K jejímu vyřešení uvažme, že $\frac{\partial F}{\partial x} = x^5 + 2x^3 y^2$, odkud integrací $F = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{2} x^4 y^2 + \tilde{c}(y)$. Dosazením za F do vztahu $\frac{\partial F}{\partial y} = x^4 y$ a další integrací obdržíme $\tilde{c}(y) = c_0$, takže obecné implicitní řešení lze po úpravách zapsat ve tvaru $x^6 + 3x^4 y^2 = c$.

Ukázka 3.17: Nalezněte rovnici siločar elektrostatického pole dvou rovnoběžných nabitých vláken vzdálených od sebe $2a$ a umístěných v dielektriku. Toto pole je popsáno potenciálem $\varphi = \varphi_0 \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$. Protože $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ získáme, podobně jako v ukázce

3.14, obecnou rovnici $\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = 0$, konkrétně pak $2x y dx + (a^2 - x^2 + y^2) dy = 0$. Tato

rovnice není exaktní, neboť $2x = \frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x} = -2x$, pro $x \neq 0$. Užitím integračního faktoru

$\mu = \mu(x, y)$ dospějeme k $(a^2 - x^2 + y^2) \frac{\partial \mu}{\partial x} - 2x y \frac{\partial \mu}{\partial y} = 4x \mu$. Abychom vyloučili ten nejkomplicovanější člen, zvolíme $\mu = \mu(y)$. Poslední rovnice se pak zjednoduší na $y \mu' = -2 \mu$, kterou lze řešit separací proměnných. Jedním z řešení je např. $\mu = y^{-2}$.

Odpovídající exaktní rovnice (3.11) pak nabude tvaru $\frac{2x}{y} dx + \frac{a^2 - x^2 + y^2}{y^2} dy = 0$. Jejím

řešením dostaneme postupně $F = \frac{x^2}{y} + \tilde{c}(y) \Rightarrow \frac{a^2 - x^2 + y^2}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2} + \tilde{c}'(y) \Rightarrow$

$\tilde{c}'(y) = \frac{a^2 + y^2}{y^2} \Rightarrow \tilde{c}(y) = y - \frac{a^2}{y} + c_0 \Rightarrow F = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{y} + c_0$. Po jednoduché úpravě má

rovnice siločar tvar $x^2 + y^2 - a^2 = 2c y$, neboli $x^2 + (y - c)^2 = a^2 + c^2$. Reprezentuje tedy systém kružnic se středem $[0, c]$ a poloměrem $r = \sqrt{a^2 + c^2}$. Vidíme, že středy všech kružnic leží na ose y a všechny kružnice procházejí body $[-a, 0]$ a $[a, 0]$; na obrázku **Obrázek 3.6** jsou vyznačeny červeně. Systém ortogonálních kružnic, odpovídajících ekvipotenciálním

hladinám $\varphi = \text{konst.}$, je popsán rovnicí $(x - \frac{1+c}{1-c} a)^2 + y^2 = \frac{4c a^2}{(1-c)^2}$, což znamená, že

jednotlivé kružnice mají poloměr $r = \frac{2\sqrt{c} a}{|1-c|}$ a jejich středy leží na ose x v bodě $[\frac{1+c}{1-c} a, 0]$;

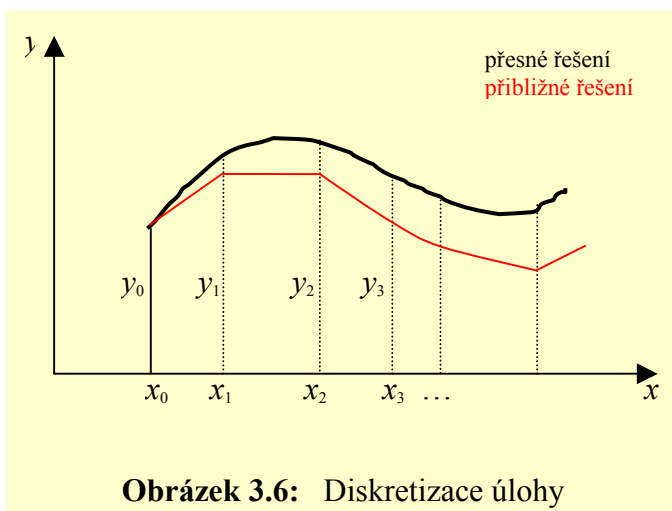
na obrázku **Obrázek 3.6** jsou vykresleny modře. Každá modrá kružnice tedy protíná každou červenou kružnici pod pravým úhlem.

Uvedli jsme jen nejzákladnější metody exaktního řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. Metody pro řešení některých dalších typů rovnic lze nalézt např. v [8], [14], [23], [24]. Zvláště [14] je vhodná pro použití v praxi, neboť obsahuje velké množství konkrétních diferenciálních rovnic (a to nejen prvního řádu), které jsou buď přímo vyřešeny nebo je zde uveden podrobný postup, jak řešení získat.

3.3.7 Numerické řešení

Úlohy současné praxe jsou často modelovány komplikovanými diferenciálními rovnicemi, o nich lze jen stěží předpokládat, že budou v brzké době řešitelné exaktně. V takových případech se obracíme k numerickým metodám řešení. Numerické metody jsou velice univerzální. Komplikovanost výpočetních algoritmů vedoucích na ohromná množství operací není na závadu, neboť dnešní výkonné počítače dovedou tuto dříve nepřekonatelnou nesnáz překlenout. Před vlastním popisem numerického řešení diferenciálních rovnic, zmiňme se několika slovy o numerické matematice obecně.

Numerická matematika se zabývá procesy, které umožňují řešení matematických problémů pomocí aritmetických operací. Princip numerických metod spočívá v tom, že zadaný problém, který zpravidla nedovedeme řešit aritmetickými prostředky, nahradíme jiným problémem, který již aritmetickými prostředky řešit umíme a který se od původního problému v jistém smyslu příliš neliší. Přesné řešení náhradního problému pak považujeme za přibližné řešení problému původního. Již z toho vyplývá, že nerozlučným doprovodem numerických procesů je vznik chyb. Podle svého původu rozdělujeme chyby na *chyby vstupních dat* (zidealizované matematické modelování vyšetřované reality, nepřesnost v zadání vstupních veličin, apod.), *chybu diskretizační* neboli *chybu metody* (náhrada původního problému jiným) a *chybu zaokrouhlovací* (omezený počet desetinných míst při výpočtu). Vznik chyb při numerických výpočtech však není na závadu, jak by se na první pohled mohlo zdát. Na jedné straně je nutné si uvědomit, že praxe vždy nevyžaduje absolutně přesné výsledky, v mnoha případech se spokojuje jen s výsledky ležícími v přijatelných mezích. Na druhé straně lze požadované přesnosti výsledků dosáhnout výběrem dostatečně přesné metody či provedením dostatečného počtu výpočetních kroků. V každém případě je však nutné zvážit hodnotu získaných numerických výsledků, neboť jak vyslovil Norbert Wiener ve své knize *Jsem matematikem* „... není intelektuální ctností, ale naopak vážnou intelektuální nectností, jestliže se používá tří číslic, když dosažitelná přesnost směřuje k číslici jedné“.



Obrázek 3.6: Diskretizace úlohy

Po těchto předběžných úvahách přistupme k numerickému řešení naší počáteční úlohy (3.3). Za tím účelem zvolme nějakým pevným způsobem tzv. *diskretizační síť* $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ a označme $y_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, viz Obrázek 3.6. Bez újmy na obecnosti se kvůli jednoduchosti omezíme na síť pravidelnou, tj. budeme předpokládat, že uzly x_i jsou na ose x pravidelně rozloženy a že jsou tedy dány relací $x_i = x_0 + ih$, kde h je délka kroku, s nímž diskretizaci úlohy provádíme.

Zvolme nyní libovolně, ale pevně index i , rovnici (3.3) přepišme pro i -tý uzel a derivaci

v tomto uzlu nahradíme přibližně poměrnou diferencí $y'_i = (y_{i+1} - y_i)/h$. Po úpravě obdržíme jednoduché výpočetní schéma

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 \text{ dáno} \quad (3.12)$$

Toto schéma, známé jako *Eulerova metoda*, je sice velice jednoduché, ale jako metoda prvního řádu přesnosti málo přesné. K numerickým výpočtům se prakticky vůbec nepoužívá. Poslouží nám však k formulování obecné jednokrokové metody. Z relace (3.12) je vidět, že přibližnou funkční hodnotu hledaného řešení v každém uzlu (kromě výchozího, kdy je funkční hodnota dána počáteční podmínkou přesně) dostaneme jako opravu již vypočtené přibližné funkční hodnoty z předchozího kroku. Tato oprava je přímo úměrná funkční hodnotě pravé strany rovnice (3.3) v bodě $[x_i, y_i]$ udávající směrnici aproximační úsečky, která v intervalu $I = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ hledané řešení lokálně aproximuje, přičemž koeficient úměrnosti je roven délce diskretizačního kroku. Přesné řešení je tedy globálně aproximováno po částech lineární funkcí a integrální křivka je aproximována lomenou čarou.

Uvedené schéma je velice výhodné pro realizaci na počítači a proto je můžeme v podstatě převzít pro formulaci obecného jednokrokového schématu

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi(x_i, y_i, h, f), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad y_0 \text{ dáno} \quad (3.13)$$

kde Φ je zatím neurčená funkce reprezentující zmíněnou opravu. Jednokrokové metody využívají pro odhad nové funkční hodnoty jen informace z předchozího kroku, informace z dřívějších kroků nevyužívají. Obrázek 3.6 dokumentuje, že chyba mezi přesným a numerickým řešením může velice vzrůstat. Abychom tento vzrůst chyby minimalizovali, musíme zmíněnou směrnici Φ odhadnout co nejpřesněji. Za tím účelem zvolíme v intervalu I několik pomocných bodů, v každém z nich určíme hodnotu funkce $f(x, y)$ a pomocí takto získaných hodnot pak výslednou směrnici Φ konstruujeme. Existuje mnoho způsobů konstrukce směrnice Φ , viz např. [28]. Uvedeme jen nejvíce užívaný případ a to *Rungeovu-Kuttovu metodu* čtvrtého řádu přesnosti, která k určení veličiny Φ využívá čtyř pomocných bodů. Výpočetní algoritmus má tento tvar:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_i, y_i), & k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2), & k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Největší podíl práce při aplikování postupu (3.14) tedy tvoří výpočet funkčních hodnot funkce f . Tyto hodnoty se počítají v levém krajním bodě intervalu I , dvakrát uprostřed I (zde se nejedná o dvojnásobný výpočet téže hodnoty; x -ová souřadnice těchto bodů je sice stejná, ale y -ové souřadnice se liší) a v pravém krajním bodě intervalu I .

Ukázka 3.18: Máme spočítat dvě první iterace počáteční úlohy $y' = y + (1+x)y^2$, $y(0) = 1$ s krokem $h = 0,1$. V tomto případě lze určit též exaktní řešení $y = (\exp(-x) - x)^{-1}$ a proto můžeme zjistit i absolutní chybu ε . Výpočty, počítané na 6 desetinných míst, uvedeme ve tvaru tabulky:

| x | k_1 | k_2 | k_3 | k_4 | y | $y_{\text{přesné}}$ | ε |
|-----|-------|----------|----------|----------|----------|---------------------|---------------|
| 0,0 | - | - | - | - | 1,000000 | 1,000000 | - |
| 0,1 | 0,2 | 0,237050 | 0,243218 | 0,294337 | 1,242479 | 1,242487 | 0,000008 |

0,2 0,294061 0,360985 0,375155 0,475772 1,616165 1,616212 0,000047

3.4 Soustava rovnic n -tého řádu

3.4.1 Souvislost soustav n -tého a prvního řádu

Začneme nejprve pro jednoduchost s formulací počáteční úlohy soustavy n obyčejných explicitních diferenciálních rovnic prvního řádu, kde n je přirozené číslo. Tuto úlohu můžeme zapsat formálně ve vektorovém tvaru

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0, \quad (3.15)$$

přičemž $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, $\underline{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$ jsou n -rozměrné vektory, v nichž $y_i = y_i(x)$, $f_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $y_{0i} = \text{konst.}$, $i = 1, \dots, n$. Pověšme si, že zápis této úlohy se formálně shoduje se zápisem úlohy (3.3). Rozepíšeme-li (3.15) ve složkách, dostaneme

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), & y_1(x_0) &= y_{01}, \\ &\dots & &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= y_{0n}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podobně, jako v podkapitole 3.2 lze dokázat větu o existenci a jednoznačnosti řešení. Při její formulaci použijeme označení z podkapitoly 3.2.

Věta 3.5: $\underline{f}(x, \underline{y}) \in C(\Omega) \Rightarrow \exists$ řešení úlohy (3.15) $\forall [x_0, \underline{y}_0] \subset \Omega$, platí-li navíc \Rightarrow je toto řešení jediné.

Nyní uvažme explicitní úlohu pro jednu rovnici n -tého řádu definovanou vztahem (3.1). Označme $y_1 = y$, $y_2 = y'$, \dots , $y_n = y^{(n-1)}$. Pak po jednoduché úpravě můžeme (3.1) přepsat ve tvaru systému

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(x_0) &= y_0, \\ y_2' &= y_3, & y_2(x_0) &= y_0', \\ &\dots & &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n, & y_{n-1}(x_0) &= y_0^{(n-2)}, \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

což je speciální případ úlohy (3.16). Zavedením dalších neznámých můžeme tedy jednu diferenciální rovnici n -tého řádu zadanou v explicitním tvaru převést na soustavu n rovnic prvního řádu. Máme-li řešit soustavu rovnic n -tého řádu daných v explicitním tvaru, pak podle předchozího nahradíme každou z těchto rovnic soustavou prvního řádu a tím i zadanou soustavu n -tého řádu převedeme na soustavu prvního řádu. Studium soustav prvního řádu tedy současně studujeme soustavy vyššího řádu.

Ukázka 3.19: Pohyb $y = y(x)$ stěny válcové nádrže je popsán diferenciální rovnicí $y^{(4)} + ay = bx + c$, kde konstanty a, b, c zahrnují geometrický i fyzikální popis konkrétní situace. Abychom našli ekvivalentní soustavu, zavedme nové proměnné $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$ a $y_4 = y'''$. Po krátké úpravě obdržíme soustavu $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = y_4$ a $y_4' = -ay_1 + bx + c$.

Ukázka 3.20: Pohyb dvojitého fyzického kyvadla je popsán soustavou dvou silně nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} 8\Phi'' + 3\Psi'' \cos(\Psi - \Phi) - 3\Psi'^2 \sin(\Psi - \Phi) + 9\frac{g}{l} \sin\Phi &= 0, \\ 3\Phi'' \cos(\Psi - \Phi) + 2\Psi'' + 3\Phi'^2 \sin(\Psi - \Phi) + 3\frac{g}{l} \sin\Psi &= 0, \end{aligned}$$

kde neznámé funkce Φ, Ψ vyjadřují úhlové výchylky jednotlivých kyvadel od vertikály. I když tato soustava druhého řádu není uvedena v explicitním tvaru, přesto se nám ji na explicitní soustavu prvního řádu podaří převést. Zavedme dvě nové neznámé funkce $u = \Phi'$ a $v = \Psi'$. Pak

$$\begin{aligned} \Phi' &= u, \\ \Psi' &= v, \\ 8u' + 3v' \cos(\Psi - \Phi) &= 3v^2 \sin(\Psi - \Phi) - 9\frac{g}{l} \sin\Phi, \\ 3u' \cos(\Psi - \Phi) + 2v' &= -3u^2 \sin(\Psi - \Phi) - 3\frac{g}{l} \sin\Psi. \end{aligned}$$

Tato soustava je prvního řádu, není však explicitní. Vyřešením soustavy dvou posledních rovnic vzhledem k u' a v' pak získáme konečnou explicitní soustavu

$$\begin{aligned} \Phi' &= u, \\ \Psi' &= v, \\ u' &= [p(qu^2 + 2v^2) - 6\sin\Phi + q\sin\Psi]/s, \\ v' &= [-p(8u^2 + qv^2) + 3q\sin\Phi - 8\sin\Psi]/s, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli označení $p = \frac{1}{6} \sin(\Psi - \Phi)$, $q = 3 \cos(\Psi - \Phi)$ a $s = \frac{1}{36} (16 - q^2)$.

V mnoha případech se při řešení soustav prvního řádu, zvláště lineárních soustav s konstantními koeficienty, užívá *eliminační metoda*, jako v jistém smyslu inverzní postup k právě popsanému postupu. Myšlenka metody spočívá v převedení soustavy n rovnic prvního řádu na jedinou rovnici n -tého řádu. Toho lze dosáhnout vyloučením všech neznámých funkcí kromě jediné, přičemž se využívá postupného derivování a vhodných algebraických úprav. Při aplikování této metody se však může stát, že se systém nepodaří převést na jedinou rovnici, nýbrž jen na několik rovnic nižšího řádu. Užití eliminační metody si ilustrujeme na dvou ukázkách.

Ukázka 3.21: Převedme soustavu rovnic $y_1' = y_1 - 2y_2 + x$, $y_2' = 2y_1 - y_3 + \exp(x)$, $y_3' = -4y_2 + y_3 + \sin x$ na jedinou rovnici třetího řádu. Začneme první rovnicí. Derivujme ji a za y_2' a y_3' dosadíme výrazy z druhé, resp. třetí rovnice. Po úpravě obdržíme $y_1'' - y_1' + 4y_1 = 2y_3 - 2\exp(x) + 1$. Tuto rovnici znovu derivujme a veličiny y_2' a y_3' odstraňme stejným způsobem. Dostaneme $y_1''' - y_1'' + 4y_1' = -8y_2 + 2y_3 + 2\sin x - 2\exp(x)$. K dispozici tedy máme tři rovnice

$$y_1' = y_1 - 2y_2 + x,$$

$$y_1'' - y_1' + 4y_1 = 2y_3 - 2\exp(x) + 1,$$

$$y_1''' - y_1'' + 4y_1' = -8y_2 + 2y_3 + 2\sin x - 2\exp(x),$$

z nichž můžeme dvě nežádoucí veličiny y_2 a y_3 eliminovat. Po úpravě dospějeme k jediné rovnici $y_1''' - 2y_1'' + y_1' = 2\sin x - 4x - 1$ třetího řádu.

Ukázka 3.22: Převedme nyní poměrně komplikovanou soustavu nelineárních rovnic $y y' = z - 2y^2$, $y^2 z' = 2z^2 - 4y^2 z + (8 - 32x^3)y^4$ na rovnici druhého řádu. Derivováním první rovnice dostaneme $y y'' + y'^2 = z' - 4y y'$. Pomocí takto získané relace a první ze zadaných rovnic můžeme z druhé rovnice vyeliminovat z a z' . Po úpravách dospějeme k nelineární rovnici $y y'' - y'^2 + 2y y' + 32x^3 y^2 = 0$ druhého řádu. Tuto rovnici lze substitucí $y' = yu$ převést na lineární rovnici $u' + 2u = -32x^3$, kterou již umíme vyřešit. Jejím řešením je funkce $u = c \exp(-2x) - 16x^3 + 24x^2 - 24x + 12$. Dosazením do relace $y' = yu$ obdržíme separabilní rovnici s výsledným řešením $y = c_2 \exp(c_1 \exp(-2x) - 4x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 12x)$ a $z = y y' + 2y^2$.

3.4.2 Lineární soustava

V praxi se nejčastěji setkáváme se soustavou lineárních diferenciálních rovnic

$$\underline{y}' = \mathbf{A}(x)\underline{y} + \underline{b}(x) \quad (3.17)$$

přičemž $\mathbf{A}(x) = \{A_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, $\underline{b} = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T$, $A_{ij}(x), b_i(x) \in C(I)$, $I \subset \mathbf{R}$. Její problematika je nejvíce propracována a lze pomocí ní aproximovat i mnohou nelineární soustavu. Poznamenejme na okraj, že v technické praxi je linearizace nelineární soustavy aplikována mnohdy poměrně nepřesně a to může vést k nesprávným závěrům. Je třeba si zejména uvědomit, že ne všechny vlastnosti nelineární soustavy se dají přenést na příslušnou linearizovanou soustavu. Před vlastním použitím principu linearizace je proto zapotřebí prostudovat vlastnosti diferenciálních rovnic podrobněji, speciálně závislost na počátečních podmínkách, viz např. [15], [16].

Při konstrukci obecného řešení soustavy (3.17) nám pomůže rozdělení na soustavy **homogenní**, kdy $\underline{b}(x) = \underline{0}$, a **nehomogenní**, kdy $\underline{b}(x) \neq \underline{0}$.

Zabývejme se nejprve homogenní soustavou. Zvolme nějakým způsobem n jejich řešení $\underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n$, kde $\underline{y}^i = (y_1^i(x), \dots, y_n^i(x))^T$, $i = 1, \dots, n$ a označme

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{bmatrix}, \quad W \equiv \det \mathbf{W} = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix}.$$

Řekneme, že vybraná řešení $\underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n$ tvoří **fundamentální systém**, jestliže determinant (tzv. **wronskián**) $W \neq 0$ na celém intervalu I . Nerovnost stačí ověřit jen v jediném bodě intervalu I , neboť wronskián je na celém intervalu I buď všude různý od nuly nebo identicky

nulový. Za fundamentální systém řešení tedy můžeme vzít libovolnou n -tici lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy. Matici \mathbf{W} v tomto případě nazýváme *fundamentální maticí*, která, jak lze snadno ověřit, vyhovuje maticové diferenciální rovnici $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W}$. Znalost fundamentálního systému tedy umožňuje zkonstruovat obecné řešení homogenní soustavy. Tvoří-li $\underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n$ fundamentální systém a jsou-li $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ libovolná čísla, pak obecné řešení homogenní soustavy má tvar $\sum_{i=1}^n c_i \underline{y}^i$ nebo pomocí maticového zápisu $\mathbf{W}\underline{c}$, kde $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$. Obecné řešení homogenní soustavy je tedy tvořeno libovolnou lineární kombinací jednotlivých členů fundamentálního systému.

Známe-li obecné řešení homogenní soustavy, pak k němu stačí přičíst libovolné partikulární řešení $\underline{\hat{y}}$ nehomogenní soustavy a obdržíme obecné řešení nehomogenní soustavy (3.17). Obecné řešení nehomogenní soustavy je tedy součtem obecného řešení homogenní soustavy a libovolného partikulárního řešení nehomogenní soustavy. Lze je tedy psát ve tvaru

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^n c_i \underline{y}^i + \underline{\hat{y}} \quad \text{neboli} \quad \underline{y} = \mathbf{W}\underline{c} + \underline{\hat{y}}. \quad (3.18)$$

Ukázka 3.23: *Proveďte, že $\underline{y}^1 = (\cos x, \sin x)^T$, $\underline{y}^2 = (-\sin x, \cos x)^T$ tvoří fundamentální systém soustavy $y_1' = -y_2 + x$, $y_2' = y_1$ a sestrojte obecné řešení. V tomto případě je $n = 2$, $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\underline{b} = (x, 0)^T$. Spočítejme nejprve wronskián $W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, takže $c_1 \underline{y}^1 + c_2 \underline{y}^2$ reprezentuje obecné řešení příslušné homogenní soustavy. Pokusme se nyní najít nějaké partikulární řešení nehomogenní soustavy. S ohledem na tvar vektoru \underline{b} se pokusme předpokládat partikulární řešení ve tvaru $\underline{\hat{y}} = (\alpha x + \beta, \gamma x + \delta)^T$. Dosazením do zadané soustavy rovnic a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme $\delta = -\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$. Hledané obecné řešení nehomogenní soustavy je tedy $y_1 = c_1 \cos x - c_2 \sin x + 1$, $y_2 = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x$.*

3.4.3 Určení partikulárního řešení

Při určení partikulárního řešení soustavy (3.17) použijeme *metodu variace konstant*. Vyjdeme ze znalosti obecného řešení $\mathbf{W}\underline{c}$ příslušné rovnice homogenní a budeme předpokládat, že partikulární řešení je stejného tvaru jen s tím rozdílem, že vektor \underline{c} může záviset na proměnné x . Partikulární řešení tedy budeme hledat ve tvaru $\underline{\hat{y}} = \mathbf{W}\underline{c}(x)$. Dosazením do (3.17) obdržíme $\mathbf{W}'\underline{c} + \mathbf{W}\underline{c}' = \mathbf{A}\mathbf{W}\underline{c} + \underline{b} \Rightarrow \mathbf{W}\underline{c}' + (\mathbf{W}' - \mathbf{A}\mathbf{W})\underline{c} = \underline{b}$. Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{W} je fundamentální, je matice v kulatých závorkách nulová a proto

$$\mathbf{W}\underline{c}' = \underline{b}. \quad (3.19)$$

Fundamentální matice je regulární a proto dále platí $\underline{c}' = \mathbf{W}^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{c} = \int_{x_0}^x \mathbf{W}^{-1}(\xi)\underline{b}(\xi) d\xi$.

Hledané partikulární řešení můžeme tedy psát ve tvaru

$$\underline{\hat{y}} = \mathbf{W}(x) \int_{x_0}^x \mathbf{W}^{-1}(\xi) \underline{b}(\xi) d\xi . \quad (3.20)$$

Metoda variace konstant je velice obecná, neboť může být aplikována na obecnou lineární rovnici. Na druhé straně je však z relací (3.19) a (3.20) vidět, že její užití je technicky velice náročné, neboť představuje řešení soustavy n rovnic a poté výpočet n integrálů.

V případě soustavy s konstantními koeficienty, tj. v případě soustavy

$$\underline{y}' = \mathbf{A} \underline{y} + \underline{b}(x), \quad (3.21)$$

kde matice \mathbf{A} je konstantní, můžeme pro určení partikulárního řešení užít *metodu neurčitých koeficientů*, která je jednodušší, ale lze ji aplikovat jen v některých případech. Metoda spočívá v tom, že pro některé typy vektoru $\underline{b}(x)$ dovedeme odhadnout tvar partikulárního řešení, v němž vystupují zatím neurčené koeficienty. Dosazením do (3.21) pak dospějeme k soustavě algebraických rovnic, z níž tyto koeficienty vypočteme. Abychom si tři z těchto typů mohli uvést, označme $\underline{p}^m(x)$ a $\underline{q}^m(x)$ vektory, jejichž složky jsou polynomy stupně nejvýše m .

1° Je-li $\underline{b}(x) = \underline{p}^m(x)$ a je-li nula r -násobným kořenem charakteristické rovnice matice \mathbf{A} , pak $\underline{\hat{y}} = \underline{q}^{m+r}(x)$, tj. složky partikulárního řešení můžeme hledat ve tvaru polynomů stupně nejvýše $m+r$.

2° Je-li $\underline{b}(x) = \exp(\alpha x) \underline{p}^m(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, pak substituce $\underline{y} = \exp(\alpha x) \underline{z}$ převede, po vykrácení výrazem $\exp(\alpha x)$, danou soustavu na předchozí případ. Vzhledem k tomu, že α je komplexní číslo, tento případ v sobě zahrnuje mnohé exponenciální a trigonometrické funkce, včetně některých jejich kombinací.

3° V důsledku platí: Necht' $\alpha = \alpha_r + j \alpha_i$, $\underline{y} = \underline{y}_r + j \underline{y}_i$ a $\underline{y}' = \mathbf{A} \underline{y} + \exp(\alpha x) \underline{p}^m(x)$. Pak $\underline{y}'_r = \mathbf{A} \underline{y}_r + \exp(\alpha_r x) \underline{p}^m(x) \cos \alpha_i x$, $\underline{y}'_i = \mathbf{A} \underline{y}_i + \exp(\alpha_r x) \underline{p}^m(x) \sin \alpha_i x$.

Ukázka 3.24: Nalezněte obecné řešení soustavy $\underline{y}' = 2 \underline{y} + 4 \underline{z} + 6 \underline{x}$, $\underline{z}' = -\underline{y} - 2 \underline{z}$, přičemž je známa fundamentální matice $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2x+1 & 2 \\ -x & -4 \end{bmatrix}$. Máme tedy nalézt vektor $(\underline{y}, \underline{z})^T$.

Nejprve použijeme metodu neurčitých koeficientů. V našem případě $\underline{b} = (6x, 0)^T$. Protože charakteristická rovnice $\lambda^2 = 0$ matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ má dvojnásobný nulový kořen, budeme složky $\underline{\hat{y}}$, $\underline{\hat{z}}$ partikulárního řešení $(\underline{\hat{y}}, \underline{\hat{z}})^T$ hledat ve tvaru polynomů třetího stupně, tj. konkrétně položíme $\underline{\hat{y}} = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $\underline{\hat{z}} = px^3 + qx^2 + rx + s$. Dosazením do výchozí soustavy a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x získáme pro osm neznámých koeficientů soustavu osmi lineárních rovnic, z nichž jen šest je lineárně nezávislých. Proto můžeme dva koeficienty, v našem případě r a s , považovat za parametry. Pro ostatní koeficienty pak vyřešením soustavy obdržíme $a = 2$, $b = 3$, $c = -2r$, $d = -2s$, $p = -1$ a $q = 0$. Aby partikulární řešení bylo co nejjednodušší, zvolíme $r = s = 0 \Rightarrow c = d = 0$, což

implikuje $\hat{y} = 2x^3 + 3x^2$, $\hat{z} = -x^3$. Hledané obecné řešení výchozí soustavy má tedy tvar $y = c_1(2x+1) + 2c_2 + 2x^3 + 3x^2$, $z = -c_1x - c_2 - x^3$.

Nyní pro srovnání nalezneme totéž řešení metodou variace konstant. Složky partikulárního řešení budeme hledat ve tvaru $\hat{y} = (2x+1)c_1(x) + 2c_2(x)$ a $\hat{z} = -xc_1(x) - c_2(x)$. Dosazením do zadané soustavy získáme

$$(2x+1)c_1'(x) + 2c_1(x) + 2c_2'(x) = 2(2x+1)c_1(x) + 4c_2(x) - 4xc_1(x) - 4c_2(x) + 6x,$$

$$-xc_1'(x) - c_1(x) - c_2'(x) = -(2x+1)c_1(x) - 2c_2(x) + 4xc_1(x) + 4c_2(x),$$

odkud úpravou $(2x+1)c_1'(x) + 2c_2'(x) = 6x$, $xc_1'(x) + c_2'(x) = 0$. Vyřešením této lineární soustavy dostaneme $c_1'(x) = 6x$, $c_2'(x) = -6x^2$ a následnou integrací pak $c_1(x) = 3x^2$, $c_2(x) = -2x^3$, integrační konstanty pro jednoduchost volíme nulové. Takže složky partikulárního řešení $\hat{y} = (2x+1)3x^2 - 4x^3 = 2x^3 + 3x^2$ a $\hat{z} = -x3x^2 + 2x^3 = -x^3$ a tedy i složky hledaného obecného řešení zadané rovnice jsou stejné jako při užití předchozí metody.

Ukázka 3.25: Nalezneme nyní partikulární řešení soustavy rovnic $y' = 2y + 4z$, $z' = -y - 2z + x \sin x$. Položme tedy $y = \operatorname{Re} Y$, $z = \operatorname{Re} Z$ a řešme soustavu $Y' = 2Y + 4Z$, $Z' = -Y - 2Z + x \exp(jx)$. Podle 2^o zavedeme substituce $Y = \exp(jx)u$, $Z = \exp(jx)v$. Pak po úpravě získáme pro nové neznámé soustavu $u' = (2-j)u + 4v$, $v' = -u - (2+j)v + x$. Příslušná charakteristická rovnice $(\lambda + j)^2 = 0$ nemá nulové kořeny a proto můžeme položit $\hat{u} = ax + b$, $\hat{v} = cx + d$. Dosazením do poslední soustavy určíme všechny čtyři koeficienty a sice $a = -4$, $b = -8j$, $c = 2 - j$, $d = 1 + 4j$. Proto $\hat{u} = -4x - 8j$ a $\hat{v} = 2x + 1 + (4-x)j$. V důsledku toho máme $\hat{Y} = -(4x + 8j) \exp(jx)$ a $\hat{Z} = [2x + 1 + (4-x)j] \exp(jx)$. Složky partikulárního řešení zadané soustavy nakonec získáme jako reálné složky těchto komplexních funkcí a proto $\hat{y} = -4x \cos x + 8 \sin x$, $\hat{z} = (2x + 1) \cos x + (x - 4) \sin x$.

Nakonec uveďme ještě slíbený způsob řešení lineární rovnice (3.7). Nejprve separaci proměnných vyřešíme příslušnou homogenní rovnicí a obdržíme obecné řešení $y = c \exp(-F(x))$, kde $F(x) = \int f(x) dx$. Pro nalezení partikulárního řešení \hat{y} pak uijeme metodu variace konstant. Předpokládáme tedy $\hat{y} = c(x) \exp(-F(x))$ a dosadíme do (3.7). Získáme $c' \exp(-F) - c F' \exp(-F) + f c \exp(-F) = g$. Druhý a třetí člen se vyruší, neboť $F' = f$, takže po úpravě $c(x) = \int g(x) \exp(F(x)) dx$, což odpovídá (3.8).

3.4.4 Určení fundamentální matice

V současné době není známa žádná obecná metoda pro určení systému fundamentálních řešení příslušného soustavě (3.17). Je to možné provést jen pro speciální soustavu (3.21), kdy matice \mathbf{A} má konstantní prvky. Abychom odvodili příslušné relace, vyjdeme z formální podobnosti s případem $n = 1$. Řešení homogenní soustavy (3.21) budeme proto předpokládat ve tvaru $\underline{y} = \underline{c} \exp(\lambda x)$. Dosazením do této soustavy dospějeme po krátké úpravě k homogenní soustavě lineárních rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \underline{c} = \underline{0}$, kde \mathbf{I} označuje jednotkovou matici. Homogenní soustava má nenulové řešení právě tehdy, je-li determinant soustavy nulový. Tím soustavě (3.21) přiřazujeme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (3.22)$$

Charakteristická rovnice je algebraickou rovnicí n -tého stupně a má tedy právě n kořenů, počítáme-li je i s násobností. Určíme-li tyto kořeny, můžeme určit i jednotlivá řešení fundamentálního systému. Přitom mohou nastat tři možnosti:

- 1° λ_i je jednoduchý reálný kořen $\Rightarrow \underline{y}^i = \underline{c}^i \exp(\lambda_i x)$
- 2° $\lambda_1 = \alpha + j\beta$, $\lambda_2 = \alpha - j\beta$ je dvojice komplexně sdružených kořenů \Rightarrow
 $\underline{y}^1 = \underline{a} \exp(\alpha x) \cos \beta x$, $\underline{y}^2 = \underline{b} \exp(\alpha x) \sin \beta x$, přičemž konstantní vektory \underline{a} a \underline{b} volíme tak, aby \underline{y}^1 a \underline{y}^2 vyhovovaly dané soustavě rovnic
- 3° λ_i je r -násobný kořen (reálný či komplexní) $\Rightarrow \underline{y}^i = \underline{p}(x) \exp(\lambda_i x)$, kde složky vektoru $\underline{p}(x)$ jsou polynomy stupně menšího než r .

Ukázka 3.26: Nalezněme obecné řešení soustavy rovnic $y' = y - z$, $z' = 2y + 3z$.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = 2 + j$, $\lambda_2 = 2 - j$ a proto můžeme složky obecného řešení $(y, z)^T$ předpokládat ve tvaru $y = \exp(2x)(a \cos x + b \sin x)$, $z = \exp(2x)(c \cos x + d \sin x)$. Dosazením do zadané soustavy obdržíme pro neurčené koeficienty a , b , c a d soustavu čtyř lineárních rovnic, z nichž jen dvě jsou lineárně nezávislé. Zvolíme-li $a = c_1$ a $b = c_2$ za integrační konstanty, dostaneme pro zbývající koeficienty relace $c = -c_1 - c_2$, $d = c_1 - c_2$. Složky obecného řešení mají pak tvar $y = \exp(2x)(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$, $z = \exp(2x)(-(c_1 + c_2) \cos x + (c_1 - c_2) \sin x)$.

3.4.5 Rovnice n -tého řádu

Uvedli jsme, že mezi soustavou rovnic prvního řádu a obecnou rovnicí n -tého řádu

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad a_n(x) \neq 0 \quad (3.23)$$

existuje poměrně těsná souvislost. Formulujme si proto krátce, jaké závěry z tohoto faktu pro rovnici n -tého řádu vyplývají.

Je-li $f(x) \equiv 0$ mluvíme o **homogenní rovnici**, v případě $f(x) \neq 0$ o **rovnici nehomogenní**. Systém n řešení y_1, \dots, y_n homogenní rovnice nazveme **fundamentálním systémem**, jsou-li tato řešení lineárně nezávislá, tj. je-li jejich wronskián

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

různý od nuly na intervalu I . Tak jako u soustav stačí nerovnost prověřit v jediném bodě intervalu I . Vybereme-li nyní nějaký fundamentální systém a zvolíme libovolně konstanty c_1, \dots, c_n , pak lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i y_i$ představuje obecné řešení rovnice homogenní. Nalezneme-li libovolné partikulární řešení \hat{y} nehomogenní rovnice, pak obecné řešení y

nehomogenní rovnice můžeme psát ve tvaru $y = \hat{y} + \sum_{i=1}^n c_i y_i$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je tedy součtem obecného řešení rovnice homogenní a partikulárního řešení rovnice nehomogenní.

K určení partikulárního řešení můžeme opět využít *metodu variace konstant*. Řešení tedy hledáme ve tvaru $\hat{y} = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i$, kde derivace neznámých funkcí $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ musí vyhovovat soustavě rovnic

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Aplikace metody variace konstant tedy reprezentuje vyřešení soustavy n lineárních rovnic a poté provedení n kvadratur.

Protože metoda variace konstant je mnohdy technicky velice náročná, můžeme u rovnice s konstantními koeficienty s výhodou využít *metodu neurčitých koeficientů*. Je-li pravá strana $f(x)$ dané rovnice tvaru

$$f(x) = \exp(\alpha x)[p^m(x) \cos \omega x + q^m(x) \sin \omega x],$$

kde $p^m(x)$ a $q^m(x)$ jsou polynomy m -tého stupně a α, ω jsou reálná čísla, pak lze partikulární řešení hledat ve tvaru

$$\hat{y} = x^\kappa \exp(\alpha x)[r^m(x) \cos \omega x + s^m(x) \sin \omega x],$$

přičemž κ je násobnost dvojice komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \omega j$ charakteristické rovnice. Koeficienty polynomů $r^m(x)$ a $s^m(x)$ se určí dosazením \hat{y} do nehomogenní rovnice a porovnáním koeficientů u stejných funkcí.

Tak jako u soustav si uvedeme metodiku určení fundamentálních řešení jen pro případ, kdy v rovnici (3.23) jsou všechny koeficienty $a_i(x) = a_i$ konstantní. Diferenciální rovnici pak přiřadíme *charakteristickou rovnici* $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, která má právě n kořenů, počítáme-li je i s násobností. Je-li λ jednoduchý reálný kořen, pak příslušné fundamentální řešení je $y = \exp(\lambda x)$. Obdržíme-li dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, pak příslušná dvojice fundamentálních řešení má tvar $y_1 = \exp(\alpha x) \cos \beta x$ a $y_2 = \exp(\alpha x) \sin \beta x$. Jedná-li se o p -násobný kořen, pak $y_1 = \tilde{y}, y_2 = x \tilde{y}, \dots, y_p = x^{p-1} \tilde{y}$, přičemž \tilde{y} je řešení, které by odpovídalo jednoduchému kořenu, ať již reálnému či komplexnímu.

Ukázka 3.27: *Proveďte si analýzu seriového elektrického RLC obvodu, jehož proudová odezva $i = i(t)$ vyhovuje diferenciální rovnici $LCi'' + RCi' + i = 0$ druhého řádu. Příslušná charakteristická rovnice $LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0$ má dva kořeny $\lambda_1 = \frac{1}{2L}(-R - \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}})$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2L}(-R + \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}})$. V závislosti na velikosti parametrů R, L a C analyzovaného obvodu můžeme rozeznat tři případy:*

a° $CR^2 > 4L \Rightarrow$ Charakteristická rovnice má dva reálné různé záporné kořeny, takže $i = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$. Jedná se tedy o silně tlumený neperiodický děj.

b° $CR^2 = 4L \Rightarrow$ Charakteristická rovnice má dvojný reálný záporný kořen a proto $i = \exp(-pt)(c_1 + c_2 t)$, kde $p = \frac{R}{2L}$. Jedná se o kriticky tlumený děj.

$c^o \quad CR^2 > 4L \Rightarrow$ Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny

$\lambda_1 = -p - j\omega$ a $\lambda_2 = -p + j\omega$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - p^2}$, se zápornou reálnou složkou. Tento děj je tedy slabě tlumený.

Poznamenejme na okraj, že k nalezení fundamentálních řešení u lineárních rovnic s nekonstantními koeficienty se často využívá mocninných řad, které v oboru konvergence konvergují stejnoměrně a proto mohou být derivovány i integrovány člen po členu, aniž by se změnil obor konvergence.

Ukázka 3.28: Při řešení rotačně symetrických úloh zpravidla dospějeme k Besselově diferenciální rovnici $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$, kde $n \in \mathbf{R}$. Bez odvození uveďme, že fundamentální systém této rovnice tvoří Besselova funkce $J_n(x)$ n -tého řádu a Neumannova funkce $N_n(x)$ n -tého řádu, přičemž (označíme-li symbolem Γ tzv. gama funkci)

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(n+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i}, \quad N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}.$$

3.4.6 Numerické řešení

Algoritmus numerického řešení provedeme jen pro soustavu prvního řádu (3.15), neboť, jak jsme již uvedli, soustavy vyššího řádu lze na (3.15) poměrně jednoduše převést. Obecně možno říci, že u většiny úloh můžeme použít metody, které se využívají pro řešení jediné rovnice prvního řádu s tím, že jak neznáme funkce $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, tak i pravé strany $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ jednotlivých rovnic považujeme za sloupcové vektory. Speciálně tedy pro výše uvedenou klasickou Rungeovu-Kuttovu metodu čtvrtého řádu můžeme psát

$$\begin{aligned} \underline{y}_{i+1} &= \underline{y}_i + \frac{1}{6} h (\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4), \\ \underline{k}_1 &= \underline{f}(x_i, \underline{y}_i), & \underline{k}_2 &= \underline{f}\left(x_i + \frac{1}{2}h, \underline{y}_i + \frac{1}{2}h\underline{k}_1\right), \\ \underline{k}_3 &= \underline{f}\left(x_i + \frac{1}{2}h, \underline{y}_i + \frac{1}{2}h\underline{k}_2\right), & \underline{k}_4 &= \underline{f}(x_i + h, \underline{y}_i + h\underline{k}_3). \end{aligned}$$

3.5 Kontrolní otázky a příklady ke kapitole 3

Příklad 3.1: Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = \sin(x+z)$.

Příklad 3.2: Ukažte, že funkce $u(x)$, určená rovnicí $\arctg \frac{u}{x} - \ln \sqrt{x^2 + u^2} = 0$,

vyhovuje diferenciální rovnici $(x+y) dx - (x-y) dy = 0$.

Příklad 3.3: Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici $y' = \cos^2 x$, při počáteční podmínce $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$.

Příklad 3.4: Určete všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{x+y}{y-x}$.

Příklad 3.5: Řešte rovnici $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 4$.

Příklad 3.6: Najděte obecné řešení rovnice $y' = \frac{1}{x+y-2}$.

Příklad 3.7: Najděte řešení rovnice $\left(\frac{1}{y} + 2x\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = 0$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

Příklad 3.8: Najděte obecné řešení rovnice $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$.

Příklad 3.9 Pomocí Eulerovy metody pro počáteční úlohu $y' = 2x$, $y(1) = 2$ vypočítejte funkční hodnoty pro body: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

Příklad 3.10 Řešte systém diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

4 Parciální diferenciální rovnice

Cíle kapitoly: V této kapitole uvedeme základy řešení parciálních diferenciálních rovnic.

4.1 Základní pojmy

Parciální diferenciální rovnici rozumíme diferenciální rovnici více proměnných. Za *řád diferenciální rovnice* považujeme řád nejvyšší parciální derivace, která se v rovnici vyskytuje. Vyskytuje-li se v dané rovnici neznámá funkce včetně všech svých derivací nejvýše v prvním stupni, mluvíme o *lineární rovnici*. Je-li rovnice lineární jen vzhledem k nejvyšším derivacím a jinak je linearita porušena, mluvíme o *kvasilineární rovnici*. *Řešením* parciální diferenciální rovnice rozumíme funkci, která v nějakém oboru dané rovnici identicky vyhovuje.

Ukázka 4.1: Některé parciální diferenciální rovnice, které se v elektrotechnické praxi často vyskytují:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Laplaceova rovnice (elektrostatické pole, ...)}$$

$$\Delta u = f \quad \text{Poissonova rovnice (elst. pole s volnými náboji, ...)}$$

$$\Delta u = a^2 u \quad \text{Helmholzova rovnice (stacionární vlnová rovnice, ...)}$$

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{difusní rovnice (rovnice pro vedení tepla, ...)}$$

$$\Delta u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{vlnová rovnice (šíření elektromagnetických vln, \dots),}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -J, \quad v = v(|\text{gradu } u|) \quad \text{rovinné stacionární magnetické pole.}$$

Všechny rovnice jsou druhého řádu a lineární až na poslední, která je druhého řádu a kvasilineární.

Ukázka 4.2: Omezme se na rovnice prvního řádu ve dvou proměnných. Lineární, resp. kvasilineární rovnice pro neznámou funkci $u = u(x, y)$ má obecný tvar

$$f_1(x, y)u_x + f_2(x, y)u_y + f_3(x, y)u = f_0(x, y), \quad \text{resp.}$$

$$f_1(x, y, u)u_x + f_2(x, y, u)u_y = f_0(x, y, u).$$

Tak jako u obyčejných rovnic i u parciálních rovnic musíme předepsat vedlejší podmínky, které jsou buď *počáteční* nebo *okrajové*. Okrajové podmínky mohou být *Dirichletovy* (na hranici řešené oblasti jsou předepsány funkční hodnoty hledaného řešení), *Neumannovy* (předepsány hodnoty derivací ve směru normály), *třetího typu* (předepsány lineární kombinace funkčních hodnot a hodnot derivací ve směru normály), *periodičnosti* a *smíšené* (hranice rozdělena na části s některou z předchozích podmínek). Ve srovnání s obyčejnými diferenciálními rovnicemi se však u parciálních rovnic vyskytují některé podstatné odchylky. Zatím co obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu obsahuje právě n integračních konstant, mohou řešení parciální rovnice i nízkého řádu obsahovat obecné funkce nebo nekonečně mnoho integračních konstant. Tato okolnost však není na závadu, neboť realizaci okrajových podmínek je nutno provádět v nekonečném počtu bodů hraničních křivek či povrchových ploch.

Ukázka 4.3: Řešením rovnice $b \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ je funkce $u = f(ax + by)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce. Řešením dvoudimenzionální Laplaceovy rovnice

$$\Delta u = 0 \quad \text{lze psát např. ve tvaru} \quad u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sin(ix + \beta_i) \sinh(iy + \gamma_i), \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}.$$

4.2 Klasifikace rovnic druhého řádu

V technické praxi, jak již vyplývá z ukázky 4.1, se nejčastěji vyskytují parciální rovnice druhého řádu. Provedme si proto jejich klasifikaci. Tuto klasifikaci vysvětlíme na rovnici ve dvou dimenzích typu

$$a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}). \quad (4.1)$$

Rovnici přiřadíme veličinu $D \equiv D(x, y) = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$. Platí-li v bodě $[x, y] \in \Omega$ podmínka $D > 0$, resp. $D < 0$ či $D = 0$, nazýváme rovnici (4.1) v tomto bodě *eliptickou*, resp. *hyperbolickou* či *parabolickou*. Jestliže je rovnice (4.1) eliptická, hyperbolická či parabolická v každém bodě oblasti Ω , nazýváme ji eliptickou, hyperbolickou či parabolickou v oblasti Ω . Vhodnou lokální transformací souřadnic můžeme rovnici (4.1) převést na *kanonický tvar*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad \text{pro rovnici eliptickou,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad \text{pro rovnici hyperbolickou,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad \text{pro rovnici parabolickou.}$$

V kanonickém tvaru rovnice tedy chybí smíšená derivace a koeficienty u zbývajících derivací jsou jen 0 a ± 1 , přitom u eliptických rovnic jsou znaménka u těchto derivací shodná, u hyperbolických rovnic rozdílná a u parabolických rovnic jedna z těchto derivací chybí. Zdůrazněme ještě, že typ rovnice se může v oblasti Ω měnit.

Ukázka 4.4: *Typickými představiteli eliptických, hyperbolických a parabolických rovnic jsou postupně Laplaceova, vlnová a difusní rovnice.*

Ukázka 4.5: *Uřčeme typ rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. V tomto případě je $D = y$ a proto daná rovnice je nad osou x eliptická, na ose x parabolická a pod osou x hyperbolická.*

Ukázka 4.6: *Jako další ukázka rovnice, která v oblasti řešení není stejného typu, nám poslouží rovnice pro kvasistacionární elektromagnetické pole*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - J, \quad v = v(|\text{grad } u|).$$

Tato rovnice je v elektricky vodivých podoblastech parabolického typu, neboť v těchto podoblastech je elektrická vodivost $\gamma = \gamma(x, y)$ kladná, zatímco v elektricky nevodivých podoblastech, kde je elektrická vodivost nulová, se jedná o rovnici eliptickou. Tuto skutečnost je nutné respektovat při matematickém vyšetřování kvasistacionárního pole, neboť počáteční podmínka může být předepsána jen v elektricky vodivých částech definičního oboru.

4.3 Metoda separace proměnných

Při řešení některých lineárních parciálních diferenciálních rovnic, zvláště při analýze lineárních polí rozkládajících se na oblastech jednodušších geometrií, lze s úspěchem využívat *metodu separace proměnných*. Myšlenka této metody spočívá v tom, že řešení předpokládáme ve tvaru součinu funkcí jedné proměnné. Podaří-li se nám za tohoto předpokladu jednotlivé proměnné v původní rovnici separovat, rozpadne se zadaná parciální rovnice na obyčejné diferenciální rovnice, které můžeme řešit některým ze způsobů popsaných v předchozí kapitole. Do hry tak vstoupí zatím neurčené integrační konstanty eventuelně i integrační funkce. Superponováním takto nalezených řešení získáme zpravidla dostatečně obecné řešení pro to, abychom mohli realizovat i vedlejší podmínky. Superpozice je vyjádřena sumou v případě integračních konstant a integrálem v případě integračních funkcí. Celkem lze tedy říci, že separaci proměnných dosáhneme splnění zadané rovnice a následnou superpozicí pak vyhovíme vedlejší podmínkám.

Ukázka 4.7: *Uvažujme dvojrozměrnou Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a předpokládejme $u = y(x, y) = X(x)Y(y)$. Dosazením do Laplaceovy rovnice a vydělením*

mezivýsledné rovnice součinem XY obdržíme $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$. Na levé straně poslední relace vystupuje součet dvou sčítanců, z nichž první závisí jen na proměnné x a druhý jen na proměnné y . Splnění této relace je tedy možné jen tak, že oba sčítance jsou konstantní a součet těchto konstant je roven nule. Označíme-li první z těchto konstant λ , pak se původní parciální rovnice rozpadne na dvě obyčejné diferenciální rovnice $X'' - \lambda X = 0$, $Y'' + \lambda Y = 0$ druhého řádu, přičemž λ je libovolné reálné číslo. Obecné řešení těchto rovnic můžeme psát ve tvaru

$$X_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha \sinh(\sqrt{\lambda}x + \beta) \\ \alpha x + \beta \\ \alpha \sin(\sqrt{-\lambda}x + \beta) \end{cases}, \quad Y_\lambda(y) = \begin{cases} \gamma \sin(\sqrt{\lambda}y + \delta) \\ \gamma x + \delta \\ \gamma \sinh(\sqrt{-\lambda}y + \delta) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda > 0 \\ \text{pro } \lambda = 0, \\ \lambda < 0 \end{array}$$

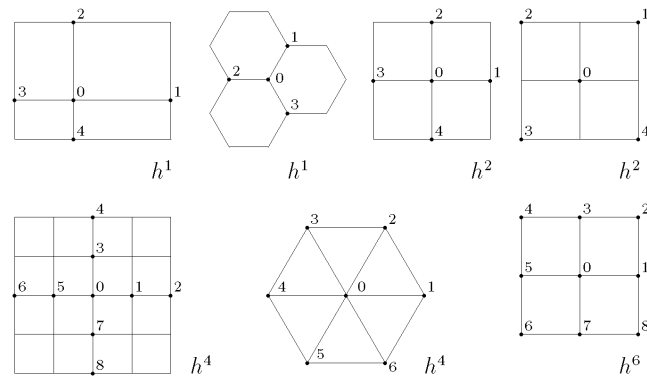
přičemž integrační konstanty α , β , γ a δ závisejí na veličině λ . Je-li tato závislost spojitá, užití pro superpozici integrál, jedná-li se o závislost diskrétní, přejde superpozice v sumaci. Z posledních vzorců mimo jiné vyplývá, že řešení dvojrozměrné Laplaceovy rovnice nemůže být současně periodické ve směru x i y .

Ukázka 4.8: Máme nalézt průběh skalárního magnetického potenciálu φ v obdélníkové drážce popsané v ukázce 3.15. Ze zadání vyplývá, že na horní straně obdélníka nabývá tento potenciál hodnot $\varphi = \varphi_0 \sin \kappa x$, na zbývajících třech stranách vymizí a uvnitř obdélníka vyhovuje Laplaceově rovnici. Vzhledem k sinusovému průběhu potenciálu na horní hranici, budeme řešení hledat ve tvaru $\varphi = \alpha \sin(\sqrt{-\lambda}x + \beta) \sinh(\sqrt{-\lambda}y + \delta)$, bez újmy na obecnosti jsme položili $\gamma \equiv 1$. V důsledku nulových hodnot potenciálu pro $x=0$ a $x=a$ musí platit $\lambda = -(\kappa n)^2$ a $\beta \equiv 0$. Veličina λ tedy může nabývat jen diskrétních hodnot. Vymizení potenciálu na dolní hranici implikuje $\delta \equiv 0$. Zbývá splnit ještě podmínku na horní hranici. Podle ní musí při $y=b$ platit $\alpha \sin(\kappa n x) \sinh(\kappa n b) = \varphi_0 \sin(\kappa x)$ pro všechna x , $0 \leq x \leq a$. To je možné jen tak, že $n=1$ a v důsledku toho $\alpha \sinh(\kappa b) = \varphi_0$. Výsledné rozložení potenciálu má tedy tvar $\varphi = \alpha \sin \kappa x \sinh \kappa y$, kde α je dáno předchozí relací. Průběh ekvipotenciál a siločar uvádí **Obrázek 3.6**.

4.4 Metoda konečných diferencí

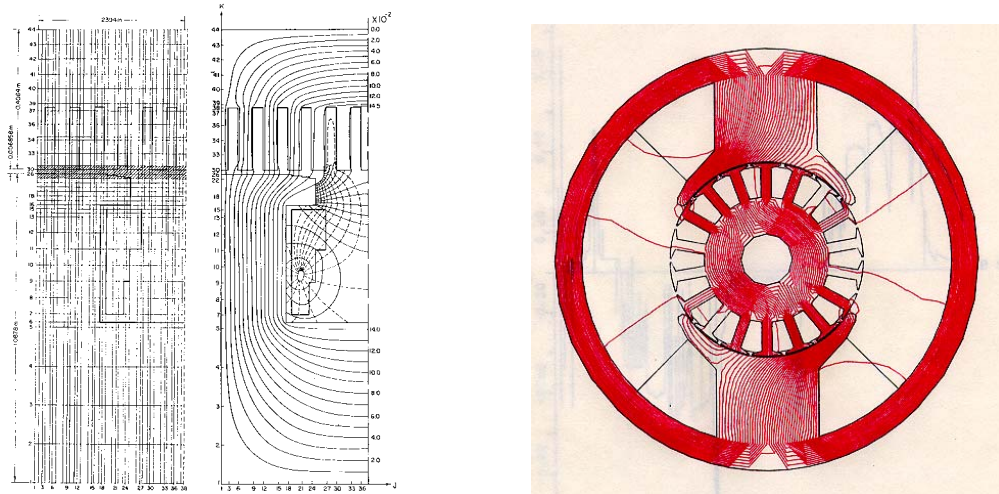
Metoda konečných diferencí náleží k numerickým metodám řešení diferenciálních rovnic. Lze ji samozřejmě užít i při řešení okrajových úloh obyčejných diferenciálních rovnic, ale její hlavní aplikace se týkají parciálních rovnic, zejména řešení fyzikálních polí. Hlavní myšlenka spočívá v následném: oblast řešení nejprve pokryjeme tzv. *diskretizační sítí*, což je konečná množina vhodně rozložených bodů, tzv. *uzlů*, v nichž budeme hledat hodnoty neznámého řešení. Zadanou diferenciální úlohu přepíšeme pro jednotlivé uzly, přičemž derivace vystupující v úloze, tedy v rovnici i ve vedlejších podmínkách, nahradíme přibližně konečnými diferencemi, v nichž vystupují funkční hodnoty hledaného řešení v některých sousedních uzlech. Tím vyjádříme vyšetřovanou úlohu soustavou obecně nelineárních, ale již ne diferenciálních, rovnic. Tento diskrétní model pak řešíme vhodnými numerickými metodami, např. Newtonovou metodou u nelineárních soustav, eliminačními či iteračními metodami u lineárních soustav apod. Metoda konečných diferencí je velice obecná, lze ji aplikovat na rovnice všech tří typů, na rovnice lineární či nelineární, na rovnice s nespojitými koeficienty (různá lineární a nelineární prostředí ve vyšetřované oblasti) a pro velice

komplikované tvary vyšetřované oblasti. Těž sítě, kterými pokrýváme definiční obor, mohou být různého druhu. Některé typy často používaných sítí včetně jejich řádu přesnosti uvádí **Obrázek 4.1**.



Obrázek 4.1: Typy výpočetních sítí

Kromě metody konečných diferencí existují pro numerické řešení parciálních rovnic ještě další obecné metody a to metoda konečných prvků, metoda hraničních prvků a metoda konečných objemů. Rozmanitost numerických metod při řešení nelineárních polí demonstruje **Obrázek 4.2**, kde je znázorněn průběh siločar nelineárního stacionárního magnetického pole v řezu dvou různých synchronních strojů, v prvním případě získaný metodou konečných diferencí a v druhém případě metodou konečných prvků.



Obrázek 4.2: Nelineární magnetické pole v synchronním stroji - MKD a MKP

4.5 Kontrolní otázky a příklady ke kapitole 4

5 Diferenciální počet v komplexním oboru

Cíle kapitoly: Kapitola obsahuje základy diferenciálního počtu komplexní funkce komplexní proměnné.

5.1 Úvod

Analýza komplexní funkce komplexní proměnné představuje mocný teoretický aparát, který lze s úspěchem aplikovat jak v matematice samotné, např. v diferenciálních a integrálních rovnicích, integrálních transformacích, funkcionální analýze apod., tak i v praktických aplikacích, jako je elektrotechnika, hydrodynamika, aerodynamika, vedení tepla, teoretická fyzika apod.

Prvním, kdo zavedl pojem ryze imaginárního čísla byl, a to již asi v polovině 16. století, Ital Raffael Bombelli. Základy teorie komplexní analýzy položil v první polovině 18. století Švýcar Leonhard Euler. Hlavní výsledky však byly formulovány až v průběhu 19. století a jsou spojeny se jmény význačných matematiků, jako je Francouz Augustin Louis Cauchy, Němci Carl Friedrich Gauss, Karl Weierstrass a Georg Friedrich Bernhard Riemann a Angličan sir William Rowan Hamilton.

Pro čtení dalších kapitol se předpokládá, že čtenář je dostatečně seznámen s pojmem komplexního čísla, s jeho geometrickým významem, s tvary jeho zápisu, se způsobem počítání s komplexními čísly a některými dalšími pojmy. Přesto bude užitečné, zopakujeme-li nejprve alespoň některé základní pojmy a sjednotíme terminologii.

5.2 Množiny komplexních čísel

Označme $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ reálné číslo, $z, c \in \mathbf{C}$ komplexní čísla a $M \subset \mathbf{C}$ množinu komplexních čísel. Při $|c| < \infty$ nazveme množinu $U(\delta, c) = \{z \in \mathbf{C} : |z - c| < \delta\}$ **δ -okolím** bodu c . Pro nekonečný bod $c = \infty$ definujeme δ -okolí vztahem $U(\delta, \infty) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{\delta}\}$. Vyjmeme-li z δ -okolí bod c , mluvíme o **prstencovém okolí**. Bod c nazveme **vnitřním bodem** množiny M , jestliže $\exists U(\delta, c) \subset M$. Bod c nazveme **izolovaným bodem** množiny M , když existuje prstencové okolí $U(\delta, c) \not\subset M$. Bod c nazveme **hromadným bodem** množiny M , když $\forall U(\delta, c)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M ; povšimněme si, že hromadný bod nemusí patřit do množiny M . Bod c nazveme **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro $\forall U(\delta, c) \quad \exists z_1 \in M \wedge \exists z_2 \notin M$, tedy každé okolí hraničního bodu obsahuje alespoň jeden bod, který do množiny M patří a alespoň jeden bod, který do množiny M nepatří. Také hraniční bod nemusí být prvkem množiny M . Množinu všech hraničních bodů množiny M nazveme její **hranicí**.

Ukázka 5.1: *Kružnice $|z - c| = r$ je hranicí jak uzavřeného kruhu $|z - c| \leq r$, a tedy do kruhu patří, tak i otevřeného kruhu $|z - c| < r$, kdy do kruhu nepatří.*

Množinu bodů $[x, y]$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ nazveme **rovinnou křivkou**. Bod $[x(a), y(a)]$ nazveme jejím **prvním bodem** a $[x(b), y(b)]$ jejím **posledním bodem**. Rovinná křivka je **spojitá**, jsou-li obě funkce $x(t)$, $y(t)$ spojité. Platí-li $x(a) = x(b)$ a $y(a) = y(b)$, jedná se o křivku **uzavřenou**. U uzavřené křivky tedy poslední bod splývá s prvním. Křivku nazveme **prostou** či **jednoduchou**, jestliže $t_1 \neq t_2$ implikuje $x(t_1) \neq x(t_2) \wedge y(t_1) \neq y(t_2)$, t.j. když sama sebe neprotíná. Prostou uzavřenou křivku nazveme **Jordanovou křivkou**. Křivka je **hladká**, jestliže je prostá a její tečna se spojitě mění, přičemž $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$. Křivka je **po částech hladká**, jestliže je sestavena z konečného počtu hladkých křivek.

Ukázka 5.2: *Kružnice, elipsa, obvod mnohoúhelníka a asteroida jsou uzavřené spojitě prosté křivky. Kružnice a elipsa jsou přitom hladké křivky, obvod mnohoúhelníka a asteroida jsou jen po částech hladké. Příkladem křivky, která není prostá je „osmička“ či „nekonečno“. Přímka, úsečka a kruhový oblouk jsou prosté hladké spojitě křivky, které nejsou uzavřené.*

Ukázka 5.3: *Vyjádřeme si nyní rovnici přímky $Bx + Cy + D = 0$ v komplexní Gaussově rovině. Za tím účelem vyřešme soustavu rovnic $z = x + jy$, $\bar{z} = x - jy$ pro neznámé x a y . Výsledné relace $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ a $y = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$ dosadíme do rovnice přímky. Po úpravě dostaneme $\bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$, kde $E = \frac{1}{2}(B + jC)$. Zdůrazněme, že koeficient D je reálný a povšimněme si charakteristického postavení komplexního koeficientu E .*

Ukázka 5.4: *Podobně nalezneme vyjádření kružnice $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, $A \neq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. Po jednoduchých úpravách dospějeme k $Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$, přičemž koeficient E je stejný jako v předchozí ukázce. Pro úplnost poznamenejme, že jiné vyjádření této kružnice je $|z - z_0| = r$, kde střed se určí z relace $z_0 = -\frac{E}{A}$ a pro poloměr platí $r = \frac{1}{|A|} \sqrt{E\bar{E} - AD}$.*

Vzhledem k velké podobě rovnice přímky a kružnice v komplexní rovině, zavedeme si pojem **zobecněné kružnice**

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad A, D \in \mathbf{R},$$

kteřá pro $A = 0$ přejde v klasickou přímku a pro $A \neq 0$ v klasickou kružnici.

Množinu M nazveme **otevřenou**, je-li každý její bod vnitřní. Množinu M doplněnou o všechny její hromadné body nazveme **uzávěrem** množiny M a označíme \bar{M} . Množina je **uzavřená**, platí-li $M = \bar{M}$. Množina M je **ohraničená**, existuje-li kruh konečného poloměru, který tuto množinu obsahuje. Otevřená množina M se nazývá **souvislá**, lze-li každé její dva body spojit lomenou čarou, která celá leží v M . Ohraničená oblast se nazývá **k-násobně souvislá**, je-li její hranice tvořena k uzavřenými křivkami. Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblastí**.

Ukázka 5.5: *Množina $M = \{z \in \mathbf{C} : 0 < r_1 < |z - c| < r_2\}$, tedy otevřené mezikružší, je otevřená, ohraničená a dvojnásobně souvislá. Množina $M = \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ je uzavřená, neohraničená a souvislá. Množina $M = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z^2 > 0\}$ je otevřená, neohraničená a nesouvislá. Povšimněme si též různého vyjádření množin komplexních čísel.*

5.3 Posloupnosti komplexních čísel

Protože existuje jistá analogie mezi posloupnostmi reálných čísel a posloupnostmi komplexních čísel, nebude čtení této kapitoly pro čtenáře obtížné.

Přiřadíme-li každému $n \in \mathbf{N}$ komplexní číslo $z_n = x_n + jy_n$ a tato čísla seřadíme podle vzrůstajícího indexu, řekneme, že jsme utvořili **posloupnost**. Obvykle ji značíme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo nemůže-li dojít k omylu $\{z_n\}$. Číslo z_n nazýváme ***n*-tým členem** posloupnosti. Posloupnost nazveme **ohraničenou**, jestliže $\exists r > 0$ tak, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí $|z_n| < r$. Ohraničená posloupnost tedy leží v nějakém okolí bodu nula. Posloupnost, která není ohraničená, je **neohraničená**.

Definice 5.1: Číslo $c \in \mathbf{C}$ nazýváme **limitou** posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tak, že $\forall n > N$ platí $|z_n - c| < \varepsilon$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$ nebo prostě $z_n \rightarrow c$ a říkáme, že posloupnost je **konvergentní**. V opačném případě je posloupnost **divergentní**.

Věta 5.1 Označme $z_n = x_n + jy_n$, $c = a + jb$. Pak $z_n \rightarrow c \Leftrightarrow x_n \rightarrow a \wedge y_n \rightarrow b$.

Věta 5.2 Označme $z_n = r_n \exp(j\varphi_n)$, $c = r \exp(j\varphi)$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$. Pak $z_n \rightarrow c \Leftrightarrow r_n \rightarrow r \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$.

Věty říkají, že místo výpočtu jedné limity komplexní posloupnosti, můžeme počítat limity dvou reálných posloupností. U druhé věty je nutné vhodně volit argumenty. Více vysvětlí následující ukázka.

Ukázka 5.6: Při volbě $0 \leq \arg z_n < 2\pi$ je posloupnost $z_n = 1 + (-1)^n \frac{j}{n}$ divergentní, neboť posloupnost argumentů členů se sudými indexy konverguje k nule, zatímco posloupnost argumentů členů s lichými indexy konverguje k 2π . Při volbě $-\pi \leq \arg z_n < \pi$ tatáž komplexní posloupnost konverguje, neboť obě zmíněné posloupnosti argumentů konvergují k nule.

Věta 5.3 Pro posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- a^o má nejvýše jednu limitu,
- b^o platí věty o součtu, rozdílu, součinu a podílu (kromě dělení nulou),
- c^o konverguje-li, je ohraničená,
- d^o konverguje právě tehdy, když konverguje posloupnost jejich modulů,
- e^o konverguje právě tehdy, když je cauchyovská.

Připomeňme, že posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **cauchyovská**, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tak, že $\forall m, n > N$ platí $|z_m - z_n| < \varepsilon$ (Bolzano-Cauchy). U posloupnosti komplexních čísel tedy pojmy konvergentní posloupnost a cauchyovská posloupnost splývají, přitom se snadněji ověřuje skutečnost, že posloupnost je cauchyovská, neboť nemusíme znát limitní bod.

5.4 Komplexní nekonečné řady

Také v této kapitole budeme též vycházet z jisté podobnosti s reálnými řadami. Mějme danu posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel. Pak symbol $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ nazýváme **řadou** komplexních čísel. Této řadě můžeme přiřadit **posloupnost částečných součtů** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž ***n*-tý částečný součet** definujeme relací $s_n = \sum_{i=1}^n z_i$.

Definice 5.2: Existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \neq \infty$, říkáme, že řada **konverguje** a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$. V opačném případě, tj. je-li $s = \infty$ nebo s neexistuje, řada **diverguje**.

Věta 5.4 Označme $z = x_n + jy_n$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje právě tehdy, když konvergují obě reálné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$, pak $z = x + jy$.

Věta 5.5 Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ komplexních čísel platí:

a° konverguje-li, pak $z_n \rightarrow 0$,

b° diverguje, pokud $z_n \rightarrow z \neq 0$,

c° konverguje-li absolutně, pak konverguje,

d° řídí se podílovým kriteriem (d'Alembert): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \begin{cases} < 1 & \text{řada konverguje} \\ > 1 & \text{řada diverguje} \end{cases}$

e° řídí se odmocninovým kriteriem (Cauchy): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \begin{cases} < 1 & \text{řada konverguje} \\ > 1 & \text{řada diverguje} \end{cases}$

Zdůrazněme, že uvedená kritéria konvergence nedávají žádnou odpověď v případě, když se uvedené limity rovnají jedné. V tom případě musíme rozhodnout podle některého z dalších kriterií, jako je Dirichletovo, Abelovo, Raabeovo, integrální apod., přičemž lze s výhodou využít i vlastnosti c°, viz např. [23], [24 str. 830].

Ukázka 5.7: Z vlastnosti a° a b° vyplývá, že existují konvergentní řady, které nekonvergují absolutně, nýbrž jen relativně. Příkladem je konvergentní Leibnizova řada

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = \ln \frac{1}{2}$, jejíž řada modulů $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, známá jako harmonická řada, nekonverguje.

Důležitým nástrojem pro vyšetřování funkcí jsou **mocninné řady**. Jsou to řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (5.1)$$

Věta 5.6: K řadě (5.1) existuje $R \geq 0$ tak, že pro $|z - z_0| < R$ řada konverguje a pro $|z - z_0| > R$ řada diverguje. Pro tzv. **poloměr konvergence** R platí $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Mocninná řada tedy konverguje uvnitř jistého kruhu a diverguje vně tohoto kruhu. V některých bodech hraniční kružnice může řada konvergovat a ve zbylých divergovat. To je nutné prošetřit zvlášť. Velice často se klade $z_0 = 0$. Mocninné řady mají některé zajímavé vlastnosti.

Věta 5.7 Pro řadu (5.1) platí:

a^o její poloměr lze počítat též pomocí relace $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$,

b^o konverguje v kruhu o poloměru $r < R$ stejnoměrně,

c^o řady vzniklé derivací či integrací člen po členu mají stejný obor konvergence jako (5.1).

Povšimněme si opačného pořadí indexů v bodě a^o než bylo u d'Alembertova kritéria.

Ukázka 5.8: Určete poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Podle bodu a^o předchozí věty platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \quad \text{a tedy řada konverguje v celé komplexní rovině.}$$

5.5 Komplexní funkce komplexní proměnné

Definice 5.3: Je-li $\forall z \in M \subset \bar{\mathbb{C}}$ přiřazeno alespoň jedno číslo $w \in N \subset \bar{\mathbb{C}}$, řekneme, že na množině M je definována **komplexní funkce komplexní proměnné** a píšeme $w = f(z)$. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a množinu N **oborem hodnot**. Je-li každému komplexnímu číslu z množiny M přiřazeno právě jedna hodnota z množiny N , mluvíme o funkci **jednoznačné**. Je-li některým číslům z množiny M přiřazeno více hodnot z množiny N , mluvíme o funkci **mnohoznačné**.

Ukázka 5.9: Např. funkce $w = z^2$ je jednoznačná, funkce $w = \sqrt{z}$ je dvojnásobná, funkce $w = \sqrt{z+j} - \sqrt{z-1}$ je čtyřznačná a funkce $w = \ln z$ je nekonečněmnohoznačná.

Ukázka 5.10: Komplexní funkce komplexní proměnné má v technické praxi, zvláště v elektrotechnice, široké využití. Např. v impedanci $z = R + j\omega L$ lze oddělit činný odpor a reaktanci, podobně lze u výkonu oddělit činný a jalový výkon, obecné kmity (i elektrické) lze vyjádřit pomocí relace $A(t) = A_0 \exp(j\omega t)$, podobně při šíření elektromagnetických vln se využívá relace $\bar{E} = \bar{E}_0 \exp(-jkx)$ a $\bar{H} = \bar{H}_0 \exp(-jkx)$ apod.

Komplexní funkci $w = u + jv$ komplexní proměnné $z = x + jy$ můžeme geometricky interpretovat jako zobrazení komplexní roviny (z) do komplexní roviny (w). Pomocí tohoto zobrazení lze vyšetřovat jak se rozličné bodové útvary roviny (z) znázorní do roviny (w).

Ukázka 5.11: Vyšetřete jaká křivka vznikne zobrazením přímky $6x - 8y + 1 = 0$ pomocí funkce $w = \frac{1}{z}$. Z definiční relace funkce potřebujeme nejprve vyjádřit x a y . Proto $x + jy = \frac{1}{u + jv} = \frac{u - jv}{u^2 + v^2}$, což implikuje $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$, $y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$. Dosazením těchto relací do výchozí rovnice přímky obdržíme $6u + 8v + u^2 + v^2 = 0$, takže zobrazením dané přímky je kružnice $(u + 3)^2 + (v + 4)^2 = 25$.

Ukázka 5.12: Jaká křivka vznikne zobrazením polokružnice $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ pomocí funkce $w = z^2$? Ze zadaného definičního vztahu funkce vyplývá relace $u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyj$. Proto $u = x^2 - y^2 = 4(\cos^2 t - \sin^2 t) = 4 \cos 2t$ a $v = 2xy = 8 \sin t \cos t = 4 \sin 2t$. Zobrazením zadané polokružnice tedy vznikne plná kružnice o dvojnásobném poloměru.

Stejně jako v reálném oboru je fundamentálním pojmem diferenciálního počtu pojem limity.

Definice 5.4: Řekneme, že funkce $w = f(z)$ má v bodě z_0 **limitu** c , jestliže $\forall U(\varepsilon, c) \exists$ prstencové $U(\delta, z_0)$ tak, že $\forall z \in U(\delta, z_0)$ platí $f(z) \in U(\varepsilon, c)$. Pišeme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$.

Věta 5.8 Označme $w = f(z) = u + jv$, $z_0 = x_0 + jy_0$, $c = a + jb$. Pak platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$ právě tehdy, když $\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} u(x,y) = a \wedge \lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} v(x,y) = b$.

Důsledek: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |c| \wedge \lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg c$.

Důsledek: Platí věty o součtu, rozdílu, součinu a podílu (kromě nulového jmenovatele).

S pojmem limity těsně souvisí pojem spojitosti funkce. Intuitivně lze říci, že funkce $f(z)$ je spojitá v bodě z_0 , jestliže pro body z blízké bodu z_0 jsou hodnoty $f(z)$ blízké hodnotě $f(z_0)$. Přesněji následující definice:

Definice 5.5: Řekneme, že funkce $w = f(z)$ je **spojitá v bodě** z_0 , je-li definována v některém jeho okolí a přitom platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Je-li funkce spojitá v každém bodě nějaké oblasti, řekneme, že je **spojitá v oblasti**.

Důsledek: Funkce je spojitá právě tehdy, je-li spojitá její reálná i imaginární složka.

5.6 Derivace funkce

Pojem derivace a diferenciálu patří ke stěžejním pojmům analýzy komplexní funkce komplexní proměnné. Formálně se derivace definuje stejně, jako u reálné funkce reálné proměnné.

Definice 5.6: Necht' je funkce $f(z)$ definována v nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Existuje-li $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, nazýváme ji **derivací** funkce $f(z)$ v bodě z_0 a značíme $f'(z_0)$. V tomto případě řekneme, že funkce $f(z)$ je v bodě z_0 **diferencovatelná**. Výraz $df = f'(z) dz$ nazveme **diferenciálem** funkce $f(z)$ v bodě z_0 .

Zdůrazněme, že uvedená limita musí existovat pro libovolnou cestu, po níž se bod z blíží k bodu z_0 . Proto diferencovatelnost funkce komplexní proměnné vymezuje mnohem užší třídu funkcí, než je tomu u reálných funkcí reálné proměnné. V důsledku toho i velice jednoduché funkce nemusí být diferencovatelné.

Ukázka 5.13: *Příkladem funkce, která je všude spojitá a nikde diferencovatelná je funkce $f(z) = \bar{z}$ definovaná v celé komplexní rovině. Zvolme libovolně $z_0 \in \mathbb{C}$ a počítejme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0 = f(z_0)$, tedy funkce $f(z)$ je v bodě z_0 spojitá. Pro další úvahy upravme nejprve $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$. Abychom ukázali, že naše funkce nemá v bodě z_0 derivaci, stačí zvolit dvě různé cesty, pro něž výše uvedená limita nabývá různých hodnot. Za tyto cesty zvolíme rovnoběžky se souřadnicovými osami, které procházejí bodem z_0 . Zvolme nejprve přímku rovnoběžnou s reálnou osou. Pro tuto přímku platí $z = x + jy_0$, tudíž $\overline{z - z_0} = x - x_0 = z - z_0$ a proto se výše uvedená limita rovná +1. Pro rovnoběžku s imaginární osou je $z = x_0 + jy$, proto $\overline{z - z_0} = \overline{j(y - y_0)} = y_0 - y = z_0 - z$, takže limita je rovna -1. Výše uvedená limita tedy neexistuje a funkce $f(z) = \bar{z}$ nemá v bodě z_0 derivaci. Protože bod z_0 byl zvolen libovolně, není tato všude spojitá funkce nikde diferencovatelná.*

Podobně jako u reálných funkcí, má-li funkce $f(z)$ v nějakém bodě derivaci, je v tomto bodě i spojitá. Platí též věty o součtu, rozdílu, součinu a podílu (kromě dělení nulou).

Pro praktické použití potřebujeme mít k dispozici nějaké kritérium, pomocí něhož bychom snadno zjistili, zda je daná funkce diferencovatelná. Podle předchozí ukázky spojitost funkce k tomu nestačí. Nutné a postačující podmínky pro existenci derivace komplexní funkce udávají **Cauchyovy-Riemannovy podmínky** definované v následující větě.

Věta 5.9 Funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě $z = x + jy$ derivaci právě tehdy, mají-li funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v tomto bodě totální diferenciál a splňují-li podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Abychom naznačili, jak lze podmínky (5.2) odvodit, vezměme v úvahu, že derivace nezávisí na cestě, podle níž se bod z bodu z_0 přibližuje a proto můžeme psát

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{a současně} \quad f'(z) = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dz} = \frac{df}{dy} \frac{1}{j} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek pak získáme (5.2).

Protože jak nezávisle proměnná z , tak i závisle proměnná $w = f(z)$ mohou být vyjádřeny v kartézském i exponenciálním tvaru, uveďme si Caychyovy-Riemannovy podmínky pro všechny čtyři možné alternativy:

$$\begin{aligned} w = u(x, y) + jv(x, y) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ w = u(r, \varphi) + jv(r, \varphi) &\Rightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, & r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ w = R(x, y) \cdot \exp(j\Phi(x, y)) &\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & R \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial R}{\partial y} \\ w = R(r, \varphi) \cdot \exp(j\Phi(r, \varphi)) &\Rightarrow r \frac{\partial R}{\partial r} = R \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, & rR \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Ukázka 5.14: *Abychom ukázali, jak se odvodí např. třetí řádek, kdy $u = R \cos \Phi$ a $v = R \sin \Phi$, dosadíme do (5.2). Po derivování složených funkcí a úpravě obdržíme*

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} \cos \Phi - R \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \Phi &= \frac{\partial R}{\partial y} \sin \Phi + R \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \Phi, \\ \frac{\partial R}{\partial y} \cos \Phi - R \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \Phi &= -\frac{\partial R}{\partial x} \sin \Phi - R \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \Phi. \end{aligned}$$

Tyto relace můžeme upravit následovně:

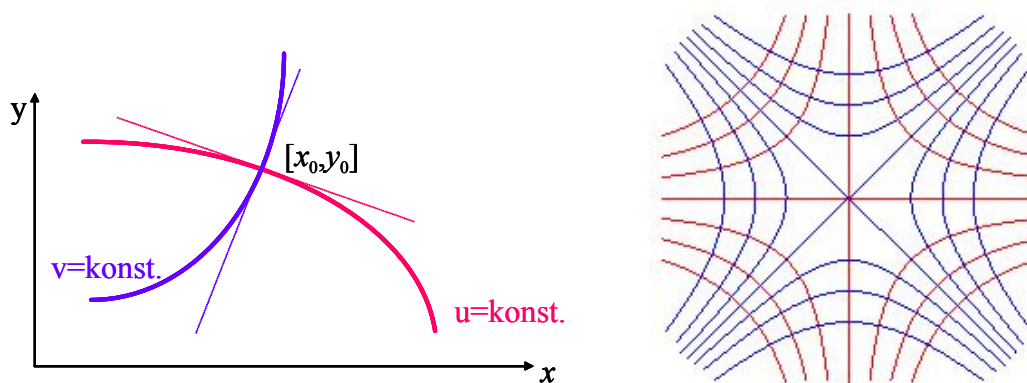
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \cos \Phi - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \sin \Phi &= 0, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \cos \Phi + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \sin \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Získali jsme tak homogenní soustavu dvou lineárních rovnic a ta má nenulové řešení jen tehdy, je-li determinant soustavy nulový. Musí tedy platit $\left(\frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 = 0$. To je možné jen tehdy, jsou-li oba sčítance nulové, což jsme měli v podstatě dokázat.

Povšimněme si geometrického významu C-R podmínek. Předpokládejme, že funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ derivaci a necht' křivky zadané implicitně rovnicemi $u(x, y) = c_1$ a $v(x, y) = c_2$ se v tomto bodě protínají, viz. **Obrázek 5.1**. Rovnice tečen vedených v tomto bodě k uvedeným křivkám mají tvar

$$\begin{aligned} u = \text{konst.} &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0 \\ v = \text{konst.} &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

Protože funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ splňují C-R podmínky, platí $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, což znamená, že se obě tečny, a tedy i obě křivky, protínají kolmo. Systémy křivek $u(x, y) = \text{konst.}$ a $v(x, y) = \text{konst.}$ jsou tedy navzájem ortogonální.



Obrázek 5.1: Geometrický význam C-R podmínek

Ukázka 5.15: Složky $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ funkce $f(z) = z^2$ splňují C-R podmínky, neboť $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$, $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$. Soustavy křivek $x^2 - y^2 = \text{konst.}$ (modré křivky) a $xy = \text{konst.}$ (červené křivky) znázorňuje **Obrázek 5.1**. Fyzikální interpretaci zadané funkce získáme tak, že se omezíme jen např. na první kvadrant komplexní roviny. Pak červené křivky představují ekvipotenciály a modré křivky siločáry elektrického pole dvou navzájem kolmých elektricky nabitých desek.

5.7 Holomorfní funkce

Definice 5.7: Jednoznačnou funkci $f(z)$ nazveme **holomorfní v bodě**, má-li v tomto bodě a v nějakém jeho okolí derivaci. Funkce je **holomorfní v oblasti**, je-li holomorfní v každém bodě této oblasti. Funkce je **holomorfní na křivce** či **na uzavřené oblasti**, je-li holomorfní na některé nadoblasti, která tyto útvary obsahuje.

Abychom vysvětlili geometrický význam holomorfní funkce, označme z_0 bod, v jehož okolí je funkce $w = f(z)$ holomorfní a předpokládejme, že $f'(z_0) \neq 0$. Z definice derivace vyplývá

$$\arg f'(z_0) = \arg \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) - \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0) = \Phi_0 - \varphi_0,$$

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overset{\cap}{w} \overset{\cup}{w_0}}{\overset{\cap}{z} \overset{\cup}{z_0}}.$$

V podstatě tedy můžeme říci, že argument derivace představuje úhel otočení tečny a modul derivace vyjadřuje koeficient deformace. Přitom v případě $|f'(z_0)| > 1$ mluvíme o **dilataci** a v případě $|f'(z_0)| < 1$ o **kontrakci**. Přesnější výsledek formuluje následující věta.

Věta 5.10 Nechť je funkce $w = f(z)$ holomorfní v bodě z_0 a necht' $f'(z_0) \neq 0$. Pak:

1° $\arg f'(z_0)$ je úhel, o který je nutno v kladném směru otočit tečnu ke křivce γ procházející bodem z_0 , abychom dostali směr tečny ke křivce $\Gamma = f(\gamma)$ procházející bodem $w_0 = f(z_0)$,

$2^\circ \quad |f'(z_0)|$ udává poměry délek nekonečně malých oblouků křivek $w \cap w_0$ a $z \cap z_0$.

Definice 5.8: Zobrazení se nazývá **konformním v bodě** z_0 , zachovává-li úhly mezi dvěma libovolným křivkami vycházejícími z bodu z_0 a zachovává-li poměry délek nekonečně malých oblouků. Zobrazení je **konformní na množině**, je-li konformní v každém jejím bodě.

Věta 5.11 Zobrazení realizované holomorfní funkcí je konformní v každém bodě, v němž je derivace nenulová.

Ukázka 5.16: Funkce $f(z) = z^2$ z ukázky 5.15 je zřejmě holomorfní, neboť má derivaci $f'(z) = 2z$ v celé komplexní rovině a proto zobrazení realizované touto funkcí je konformní v každém bodě $z \neq 0$, neboť $f'(0) = 0$. Poznamenejme ještě, že komplexně sdružená funkce $\overline{f(z)} = \overline{z^2}$, již holomorfní není, neboť nespĺňuje C-R podmínky.

Ukazuje se, že mezi holomorfními funkcemi a harmonickými funkcemi existuje těsná souvislost. Přitom harmonické funkce vykazují velice dobré vlastnosti a hrají důležitou roli v technických aplikacích, např. v teorii potenciálu.

Definice 5.9: Reálnou funkci $\Phi = \Phi(x, y)$ nazýváme **harmonickou** v oblasti M , jestliže zde má spojité druhé derivace a vyhovuje Laplaceovu rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Ukázka 5.17: Harmonickými funkcemi jsou např. funkce $\Phi = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i}$,
 $\Phi = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i+1} x^{n-2i-1} y^{2i+1}$, tj. $\Phi = x$, $\Phi = y$, $\Phi = xy$, $\Phi = x^2 - y^2$, $\Phi = x^3 - 3xy^2$,
 $\Phi = 3x^2y - y^3$ nebo nekonečná třída $\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sin(ix + \beta_i) \sinh(iy + \gamma_i)$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}$
 lineárních kombinací součinů trigonometrických a hyperbolických funkcí uvedená v ukázce 4.3 či funkce $\Phi = E(\exp(2x) - 1)$, $\Phi = 2E \exp(x) \sin y$, $E = 1/(\exp(2x) + 2\exp(x) \cos y + 1)$.

Věta 5.12 Je-li funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ holomorfní v oblast M , pak jsou obě její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v oblasti M harmonické.

Zdůrazněme, že obrácená věta neplatí, tj. považujeme-li dvě libovolně zvolené harmonické funkce za složky nějaké komplexní funkce komplexní proměnné, pak tato funkce nemusí být holomorfní, neboť vybrané harmonické funkce nemusejí splňovat C-R podmínky.

Ukázka 5.18: Jako příklad nám poslouží harmonické funkce $u = x^2 - y^2$ a $v = x$. Pak funkce $f(z) = x^2 - y^2 + jx = z\bar{z} + 2j\operatorname{Re} z$ není holomorfní, neboť $2x = \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ a $2y = -\frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 1$.

Definice 5.10: Dvě harmonické funkce, které splňují C-R podmínky, nazýváme **sdruženými (konjugovanými)**.

Věta 5.13 V jednoduše souvislé oblasti existuje k libovolné harmonické funkci sdružená harmonická funkce.

V důsledku poslední věty můžeme libovolnou harmonickou funkci považovat za reálnou či imaginární složku nějaké holomorfní funkce. Podle této věty druhá složka existuje, takže můžeme zkonstruovat celou holomorfní funkci. Jinými slovy, holomorfní funkce je až na aditivní integrační konstantu určena jednou ze svých složek. Metodika konstrukce holomorfní funkce na základně znalosti jedné z jejich složek je velice podobná určení kmenové funkce F při řešení exaktní obyčejné diferenciální rovnice, srovnej následující ukázkou s ukázkami 3.14 a 3.15.

Ukázka 5.19: Ze známé imaginární složky $v = v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ máme nalézt holomorfní funkci $f(z)$, pro níž $f(1) = 0$. Integrací první C-R podmínky $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ podle proměnné x získáme $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + c(y)$, přičemž integrační konstanta může záviset ještě na druhé nezávislé proměnné, podle níž jsme neintegrovali. Tuto veličinu určíme z druhé C-R podmínky. Dostaneme postupně $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c_0$. Reálná složka hledané holomorfní funkce je tedy až na aditivní integrační konstantu určena jednoznačně a má tvar $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + c_0$. Můžeme tedy psát $f(z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + j\arctan \frac{y}{x} + c_0$. Komplexní funkci $f(z)$ musíme ještě vyjádřit pomocí komplexní nezávislé proměnné z . Takže $f(z) = \ln|z| + j\arg z + c_0 = \ln z + c_0$. Integrační konstantu určíme z podmínky $f(1) = 0$. Hledaná holomorfní funkce má tedy konečný tvar $f(z) = \ln z$.

Ukázka 5.20: Provedme si nyní aplikaci holomorfních funkcí na rovinné elektrostatické pole bez volných nábojů. Elektrický potenciál tohoto pole vyhovuje Laplaceovu rovnici a proto jej můžeme považovat např. za imaginární složku $v = v(x, y)$ jisté holomorfní funkce $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Tuto funkci nazveme **komplexním potenciálem elektrostatického pole**. Reálná složka $u = u(x, y)$ komplexního potenciálu reprezentuje silovou (tokovou) funkci. Vektor intenzity elektrického pole vyjádřený pro komplexní rovinu pak dává postupně

$$\vec{E} = -\text{grad } v = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial x} = -j\frac{\partial}{\partial x}(u - jv) = -j\overline{f'(z)} = \overline{jf'(z)}.$$

Ze známého komplexního potenciálu $f(z)$ tedy můžeme určit všechny veličiny elektrostatického pole, tedy tokovou funkci jako jeho reálnou složku, elektrický potenciál jako jeho imaginární složku, vektor elektrické indukce z relace $\vec{E} = \overline{jf'(z)}$, eventuálně velikost elektrické intenzity $|\vec{E}| = |f'(z)|$ jako modul derivace komplexního potenciálu, či $\arg \vec{E} = -\arg f'(z) - \frac{\pi}{2}$.

Ukázka 5.21: Skalární magnetický potenciál stacionárního magnetického pole dlouhé obdélníkové drážky je dán, jak jsme uvedli v ukázce 3.15 či odvodili v ukázce 4.8, relací $v = U \sin\kappa x \sinh\kappa y$. Snadno se přesvědčíme, že sdružená harmonická funkce má tvar $u = -U \cos\kappa x \cosh\kappa y$, přičemž jsme zvolili nulovou integrační konstantu. Komplexní potenciál tohoto pole je tedy

$$f(z) = -U \cos\kappa x \cosh\kappa y + jU \sin\kappa x \sinh\kappa y = -U \cos\kappa(x + jy) = -U \cos\kappa z.$$

*Průběh siločar a ekvipotenciál vyšetřovaného pole uvádí **Obrázek 3.6**.*

5.8 Racionální funkce

V této kapitole uvedeme vlastnosti některých jednoduchých racionálních funkcí.

5.8.1 Lineární funkce

Je to funkce tvaru $w = az + b$, $a \neq 0, b \in \mathbb{C}$. Její základní vlastnosti jsou:

- 1° zobrazuje vzájemně jednoznačně \bar{C} na \bar{C} ,
- 2° lze ji nahradit stejnolehlostí, rotací a translací,
- 3° zobrazuje přímku na přímku,
- 4° zobrazuje kružnici na kružnici,
- 5° v případě $a \neq 1$ má pevný bod $z = \frac{b}{a-1}$, v případě $a = 1, b \neq 0$ pevný bod neexistuje a v případě $a = 1, b = 0$ je každý bod roviny jejím pevným bodem (identické zobrazení).

Ukázka 5.22: Funkci w lze přepsat do tvaru $w = |a| \exp(j \arg a) z + b$, takže zobrazení $z_1 = |a| z$ představuje stejnolehlost, $z_2 = z_1 \exp(j \arg a)$ reprezentuje rotaci a $w = z_2 + b$ vyjadřuje translaci.

Ukázka 5.23: V ukázce 5.3 a 5.4 jsme si uvedli rovnici přímky a kružnice v komplexní rovině a oba útvary jsme spojili v zobecněnou kružnici $Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$, $A, D \in \mathbb{R}$. Z rovnice vyšetřované lineární funkce spočteme $z = \frac{w-b}{a}$ a dosadíme do rovnice zobecněné kružnice. Po jednoduchých úpravách obdržíme $Aw\bar{w} + \bar{E}a - Ab\bar{w} + (Ea - Ab)\bar{w} + F = 0$, kde E má význam jako v ukázce 5.3 a $F = Ab\bar{b} - \bar{E}a\bar{b} - Ea\bar{b} + Da\bar{a}$. Tato rovnice vyjadřuje zobecněnou rovnici v rovině w , neboť koeficient F je reálný. Protože jak v původní tak i v transformované rovnici je u kvadratického členu reálný koeficient A , transformuje se přímka v přímku a klasická kružnice v klasickou kružnici.

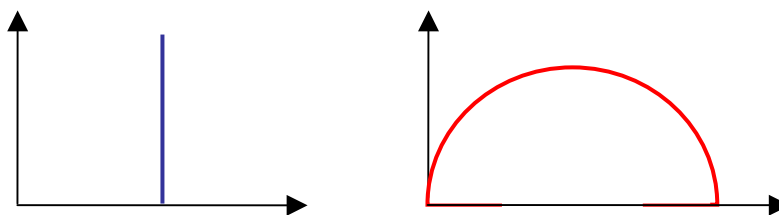
5.8.2 Kruhová inverze

Kruhová inverze je v komplexní rovině vyjádřena relací $w = \frac{R^2}{\bar{z}}$, $R > 0$. Připomeňme, že body A a B jsou symetrické vzhledem ke kružnici $k(S, R)$, když leží na společném paprsku vycházejícím ze středu S kružnice k a přitom platí $\overline{AS} \cdot \overline{BS} = R^2$. Proto je ve jmenovateli komplexně sdružená hodnota nezávisle proměnné, jinak by odpovídající si body neležely na společném paprsku. Kruhová inverze má tyto vlastnosti:

- 1° zobrazuje vzájemně jednoznačně \bar{C} na \bar{C} ,
- 2° zobrazí zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici,
- 3° zobrazí vnitřek kružnice $|z| < R$ na její vnějšek a naopak.

Ukázka 2.24: VRL obvodu je impedance jako funkce frekvence ω dána relací $Z = R + j\omega L$ a je tedy složena z činného odporu a reaktance. Admittance $Y = \frac{1}{Z}$ je pomocí kruhové inverze dána relací $Y = \frac{1}{R - j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$. Povšimněme si, že platí $Y\bar{Y} = \frac{Y + \bar{Y}}{2R}$, což je

rovnice kružnice $|Y - \frac{1}{2R}| = \frac{1}{2R}$ se středem v bodě $Y = \frac{1}{2R}$ a poloměrem $\frac{1}{2R}$, viz **Obrázek 5.2**. Polopřímka v komplexní rovině Z tak přechází v horní polokružnici v komplexní rovině Y .



Obrázek 5.2: Impedance a admittance

5.8.3 Lineární lomená funkce

Jednou z nejdůležitějších racionálních funkcí komplexní proměnné je lineární lomená funkce, tj. funkce tvaru $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad \neq bc$, $c \neq 0$. Tato funkce vykazuje velice zajímavé vlastnosti:

- 1° zobrazuje vzájemně jednoznačně \bar{C} na \bar{C} ,
- 2° lze nahradit translací, rotací, stejnolehlostí a inverzí,
- 3° zobrazí zobecněno kružnici na zobecněnou kružnici,
- 4° zobrazí tři zadané body z_1, z_2, z_3 na tři zadané body w_1, w_2, w_3 , přitom platí

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

- 5° necht' se kružnice K zobrazí na kružnici L , pak se buď vnitřek K zobrazí na vnitřek L (a tedy vnějšek K na vnějšek L) anebo se vnitřek K zobrazí na vnějšek L (a tedy i vnějšek K na vnitřek L),
- 6° body symetrické k zobecněné kružnici se zobrazí body symetrické k obrazu této kružnice

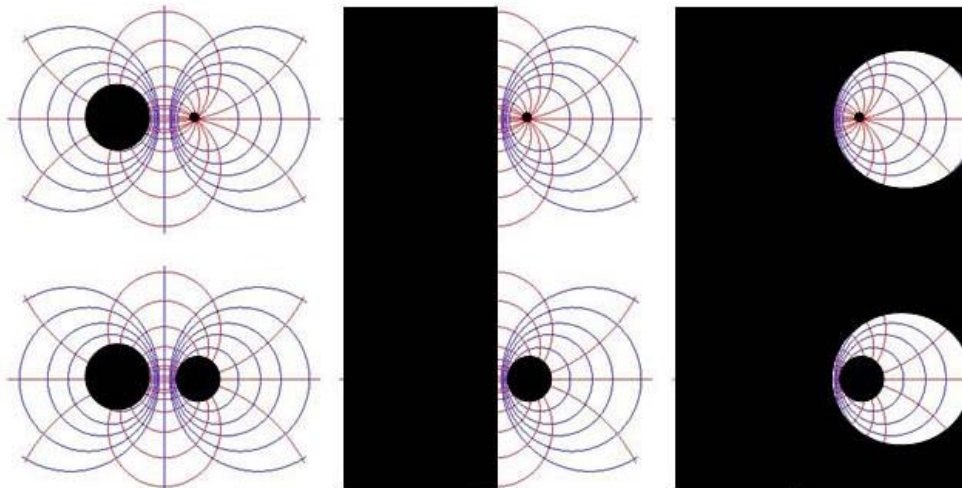
Ukázka 5.25: Pro rozklad na elementární zobrazení přepíšme lineární lomenou funkci do tvaru $w = \frac{a}{c} + \frac{\alpha}{z + \frac{d}{c}}$, $\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}$. Pak dekompozice $z_1 = z + \frac{d}{c}$, $z_2 = \frac{1}{z_1}$, $z_3 = |\alpha| z_2$, $z_4 = z_3 \exp(j \arg \alpha)$ a $w = z_4 + \frac{a}{c}$ reprezentuje postupně translaci, inverzi, stejnolehlost, rotaci a translaci.

Ukázka 5.26: Pomocí inverzní funkce $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ se zobecněná kružnice $Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$ transformuje na zobecněnou kružnici $Fz\bar{z} + \bar{G}z + G\bar{z} + H = 0$, přičemž $F = Ad\bar{d} - \bar{E}c\bar{d} - E\bar{c}d + Dc\bar{c}$, $G = -A\bar{b}d + \bar{E}b\bar{c} + E\bar{a}d - Da\bar{c}$, $H = Ab\bar{b} - \bar{E}\bar{a}b - E\bar{a}b + Da\bar{a}$, koeficienty F a H jsou reálné. Střed transformované kružnice leží v bodě $w_0 = -\frac{G}{F}$ a její poloměr je dán relací $r = \frac{1}{|F|} \sqrt{G\bar{G} - FH}$.

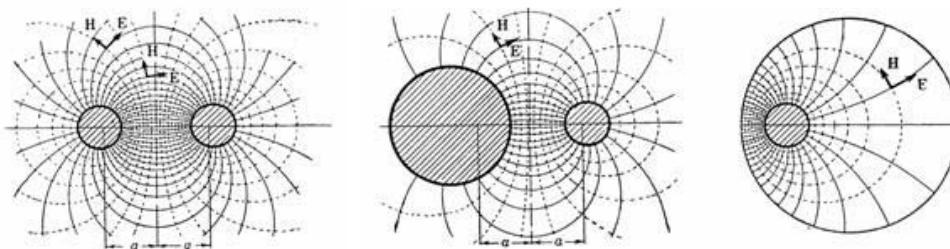
Ukázka 5.27: Pomocí lineární lomené funkce nalezněte zobrazení pravé poloroviny na vnitřek jednotkového kruhu k , přičemž se daný bod z_0 zobrazí na střed kruhu. Zdánlivě se zdá, že máme k dispozici málo údajů. Podle bodu 6° se však musí bod $-\bar{z}_0$ symetrický k bodu z_0 podle imaginární osy (hranice zobrazované poloroviny) zobrazit na bod $w = \infty$, který je symetrický ke středu kruhu vzhledem k jednotkové kružnici ohraničující tento kruh. Dosadíme-li tyto dvě podmínky do definiční relace lineární lomené funkce, obdržíme $b = -a z_0$, $d = c \bar{z}_0$ a, takže po

úpravě máme $w = \frac{a}{c} \frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}$. Pro určení poměru $\frac{a}{c}$ však máme k dispozici ještě třetí podmínku a sice, že body $z = jy$ ležící na imaginární ose se musí zobrazit na body $|w|=1$ ležící na jednotkové kružnici. Uplatnění této podmínky dává $|\frac{a}{c}|=1$, tj. $a = c \exp(j\varphi)$. Hledané zobrazení $w = \exp(j\varphi) \frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}$ je tedy jednoznačné až na otočení kolem středu kruhu. Podotkněme ještě, že podle vlastnosti 5° se levá polovina roviny z zobrazí na vnějšek jednotkového kruhu.

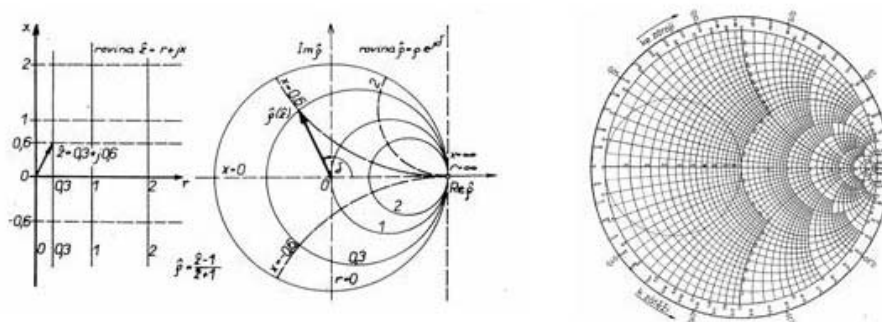
Ukázka 5.28: Lineární lomená funkce odvozená v předchozí ukázce má v elektrotechnické praxi velký význam. Uveďme si několik jejich fyzikálních interpretací. První interpretace elektrického pole dvou opačně nabitých rovnoběžných vláken uvádí již **Obrázek 3.6**. Vložíme-li nyní do tohoto pole elektrodu, jejíž povrch splývá s některou z ekvipotenciál, pak se pole vně elektrod nezmění, neboť povrch elektrody tvoří ekvipotenciální hladinu. Tím získáme dalších šest polí pro různá uskupení a to tenký a masivní vodič, tenký vodič a stěna, tenký koaxiální vodič, dva různé masivní vodiče, masivní vodič a stěna a konečně masivní koaxiální vodič. V podstatě stejné obrázky získáme pro elektromagnetické pole různých seskupení paralelních vlnovodů, viz **Obrázek 5.4**, kde je znázorněna dvojice stejných vlnovodů, dvojice různých vlnovodů a koaxiální vlnovod. Do stejné kategorie aplikací náleží ještě Smithův (kruhový) diagram, který dává do souvislosti činitel odrazu $w = \rho$ a poměrnou vlnovou impedanci $z = R + jX$, viz **Obrázek 5.5**.



Obrázek 5.3: Elektrické pole šesti různých seskupení



Obrázek 5.4: Elektromagnetické pole různých uskupení vlnovodů



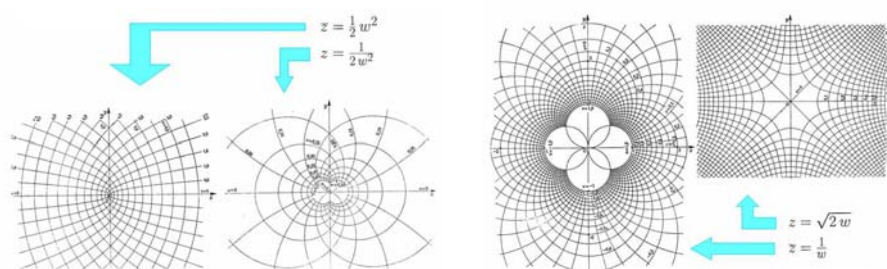
Obrázek 5.5: Smithův diagram

5.8.4 Mocinná funkce

Jedná se o funkci danou předpisem $w = z^n$, $n > 1$. Funkce má následující vlastnosti:

- 1° realizuje konformní zobrazení v celé komplexní rovině s výjimkou bodu $z = 0$,
- 2° zobrazuje kružnice se středem v počátku na kružnice se středem v počátku,
- 3° zobrazuje paprsky na paprsky,
- 4° zobrazuje úhel φ na úhel $\Phi = n\varphi$.

Ukázka 5.29: Elektrické pole dvou navzájem kolmých stejně nabitých stěn, vyšetřované již v ukázce 5.15, můžeme určit též tak, že první kvadrant transformujeme pomocí funkce $w = z^2$ na horní polorovinu. Povrch stěn tak přejde v reálnou osu, na níž je nyní předepsán konstantní potenciál. Pole v horní polorovině je tak zřejmě homogenní. Zpětnou transformací pak získáme pole, které znázorňuje **Obrázek 5.1**. Další ukázky použití mocinné funkce prezentuje **Obrázek 5.6**



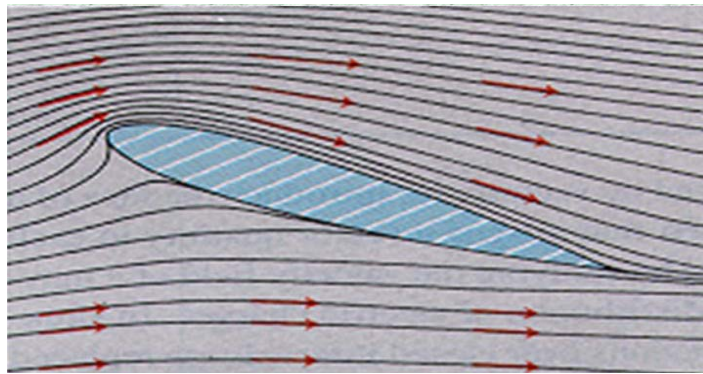
Obrázek 5.6: Zobrazení realizovaná některými mocninnými funkcemi

5.8.5 Funkce Žukovského

Funkce Žukovského hraje důležitou roli zejména v aerodynamice. Tato funkce je definována relací $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Má tyto vlastnosti:

- 1° je jednoznačná a holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou bodu $z = 0$,
- 2° její oblast jednoduštnosti je vnitřek (vnějšek) jednotkového kruhu,
- 3° realizuje konformní zobrazení s výjimkou bodů $z = \pm 1$,
- 4° zobrazuje vnitřek (vnějšek) kruhu na vnějšek úsečky $<-1, 1>$.

Ukázka 5.30: Obtékání profilu křídla letadla uvádí **Obrázek 5.7**



Obrázek 5.7: Obtékání profilu křídla

5.8.6 Obecná racionální funkce

Obecnou racionální funkci můžeme zapsat jako podíl dvou polynomů $w = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Tato funkce je spojitá a holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou kořenů jmenovatele. Při vyšetřování této funkce se zpravidla využívá rozkladu na parciální zlomky.

5.9 Základní transcendentní funkce

5.9.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkci definujeme pomocí nekonečné řady

$$e^z \equiv \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (5.3)$$

V ukázce 5.8 jsme dokázali, že tato řada konverguje v celé rovině, neboť pro její poloměr konvergence platí $R = \infty$. Tato funkce má následující vlastnosti:

- 1° je holomorfní v celé komplexní rovině,
- 2° lze ji určit předpisem $\exp(z) = \exp(x)(\cos y + j \sin y)$,
- 3° pro $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ platí $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$,
- 4° je periodická s periodou $2\pi j$,
- 5° její oblast jednoznačnosti je pás $-\infty < x < \infty$, $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbf{I}$,
- 6° realizuje konformní zobrazení v každém bodě komplexní roviny,
- 7° rovnoběžky s reálnou osou zobrazuje na paprsky procházející počátkem, viz **Obrázek 5.9**,
- 8° rovnoběžky s imaginární osou zobrazuje na soustředné kruhy se středem v počátku,
- 9° pás šířky $h = y_2 - y_1 < 2\pi$ rovnoběžný s reálnou osou zobrazuje na úhel s vrcholem v počátku a roztečí h , speciálně pás $y_1 = 0$, $y = \pi$ zobrazí na horní polorovinu a pás $y_1 = 0$, $y = 2\pi$ na celou rovinu.

5.9.2 Trigonometrické funkce

Trigonometrické funkce jsou definovány relacemi

$$\sin z = \frac{\exp(jz) - \exp(-jz)}{2j}, \quad \cos z = \frac{\exp(jz) + \exp(-jz)}{2}.$$

Pomocí (5.3) je můžeme vyjádřit i pomocí konvergentních řad

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mají tyto vlastnosti:

- 1° jsou holomorfní v celé komplexní rovině,
- 2° lze je určit pomocí $\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$, $\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$,
- 3° jsou periodické s periodou 2π ,
- 4° platí pro ně známé vztahy, např. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$,
 $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$,
- 5° realizují konformní zobrazení pro $z \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, eventuelně pro $z \neq k\pi$, $k \in \mathbf{I}$,
- 6° lze je vyjádřit jako kompozici známých zobrazení a to otočení, exponenciální funkce a Žukovského funkce,
- 7° rovnoběžky s reálnou osou zobrazují na konfokální elipsy,
- 8° rovnoběžky s imaginární osou zobrazují na konfokální hyperboly.

5.9.3 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce jsou definovány relacemi

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad \cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

Pomocí (5.3) je můžeme vyjádřit ve tvaru konvergentních řad

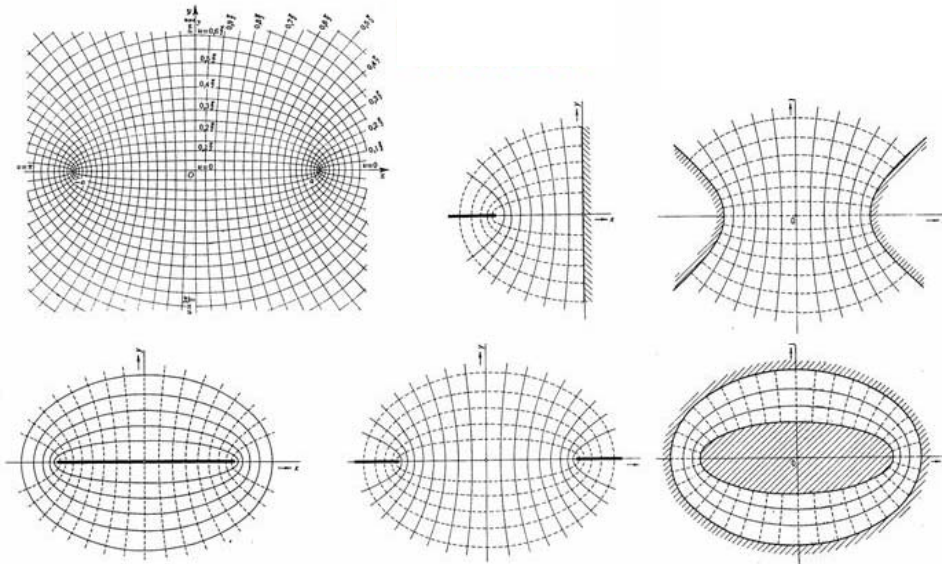
$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mají tyto vlastnosti:

- 1° jsou holomorfní v celé komplexní rovině,
- 2° lze je určit pomocí $\sinh z = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y$, $\cosh z = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y$,
- 3° jsou periodické s periodou $2\pi j$,
- 4° platí pro ně známé vztahy, např. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$, $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$,
 $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$, $\sinh' z = \cosh z$, $\cosh' z = \sinh z$,
- 5° realizují konformní zobrazení pro $z \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi j$, eventuelně pro $z \neq 2k\pi j$, $k \in \mathbf{I}$,
- 6° lze je složit z jednodušších funkcí exponenciála a Žukovského funkce,
- 7° rovnoběžky s reálnou osou zobrazuje na konfokální hyperboly,
- 8° rovnoběžku s imaginární osou zobrazuje na konfokální elipsy,
- 9° souvisí s trigonometrickými funkcemi pomocí vztahů

$$\sinh jz = j \sin z, \quad \cosh jz = \cos z, \quad \sin jz = j \sinh z, \quad \cos jz = \cos z.$$

Ukázka 5.31: Průběh konfokálních elips a konfokálních hyperbol zobrazení $w = \cosh z$ znázorňuje **Obrázek 5.8**. Na témže obrázku jsou uvedeny též některé elektrotechnické interpretace tohoto zobrazení, zejména elektrické pole dvou navzájem kolmých deskových elektrod, dvou hyperbolických elektrod, jedné deskové elektrody, dvojice deskových elektrod ležících v jedné rovině a dvojice eliptických koaxiálních elektrod.



Obrázek 5.8: Zobrazení $w = \cosh z$ a jeho fyzikální interpretace

5.9.4 Logaritmičká funkce

Logaritmičká funkce je definována jako inverzní funkce k exponenciální funkci, tedy

$$w = \ln z \quad \Leftrightarrow \quad z = \exp(w).$$

Jako inverzní funkce k periodické funkci je logaritmus nekonečněmnohoznačnou funkcí. Abychom to dokázali, položíme $z = r \exp(j\varphi)$ a $w = u + jv$. Dosazením do definičního vztahu a úpravou získáme $r = \exp(u)$ a $v = \varphi + 2k\pi j$. Takže

$$w = \text{Ln } z = \ln z + 2k\pi j = \ln r + j\varphi + 2k\pi j, \quad k \in \mathbf{I}.$$

Veličina $\ln z$ označuje **hlavní hodnotu** logaritmu, veličina $\text{Ln } z$ reprezentuje **množinu všech hodnot** logaritmu a těch je nekonečně mnoho, neboť k je libovolné celé číslo. Vlastnosti:

- 1° je spojitá v pro všechna $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 2° je holomorfní pro všechna $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 3° platí pro ní známá pravidla, totiž $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$, $\text{Ln}' z = \frac{1}{z}$.

5.9.5 Obecná mocnina

Obecná mocnina je definována relací

$$w = z^c = \exp(c \text{Ln } z), \quad c \in \mathbf{C}.$$

Jedná se o kompozici exponenciální a logaritmické funkce, tedy o kompozici periodické a nekonečněmnohoznačné funkce. Veličina $\exp(c \ln z)$ představuje její hlavní hodnotu. Vlastnosti:

- 1° je spojitá pro $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 2° je holomorfní pro $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,
- 3° platí pro ni známá relace $(z^c)' = c z^{c-1}$,
- 4° je obecně mnohoznačná, v případě $c \in \mathbf{N}$ je jednoznačná, v případě $z \in \mathbf{Q}$ je konečněmnohoznačná a ve zbývajících případech je nekonečněmnohoznačná.

5.9.6 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou definovány jako inverzní funkce k funkcím trigonometrickým. Jsou tedy definovány relacemi

$$w = \arcsin z \iff z = \sin w, \quad \text{apod.}$$

Vlastnosti:

- 1° jsou mnohoznačné, neboť jsou inverzní k periodickým funkcím,
- 2° platí pro ně relace

$$\arcsin z = -j \operatorname{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \arctan z = \frac{1}{2} j \operatorname{Ln} \frac{j+z}{j-z},$$

$$\arccos z = -j \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{arc cot} z = \frac{1}{2} j \operatorname{Ln} \frac{z-j}{z+j}.$$

5.9.7 Hyperbolometrické funkce

Hyperbolometrické funkce jsou definovány jako inverzní funkce k funkcím hyperbolickým. Platí tedy

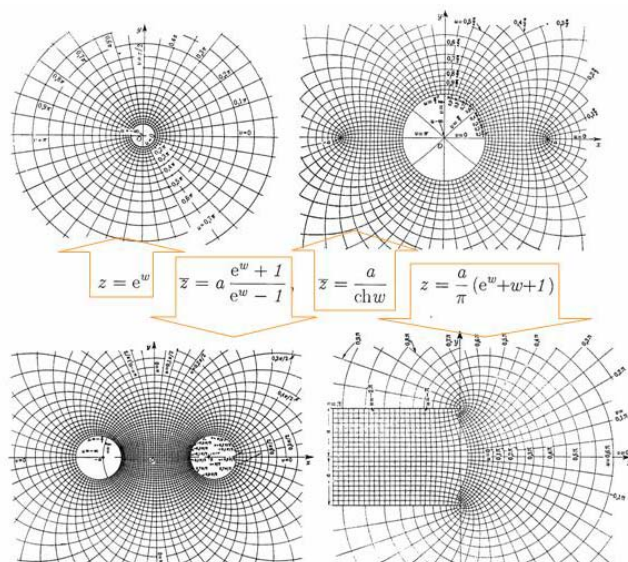
$$w = \operatorname{arg sinh} z \iff z = \sinh w, \quad \text{apod.}$$

Vlastnosti:

- 1° jsou mnohoznačné, neboť jsou inverzní k periodickým funkcím,
- 2° platí pro ně relace

$$\operatorname{arg sinh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{arg tanh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

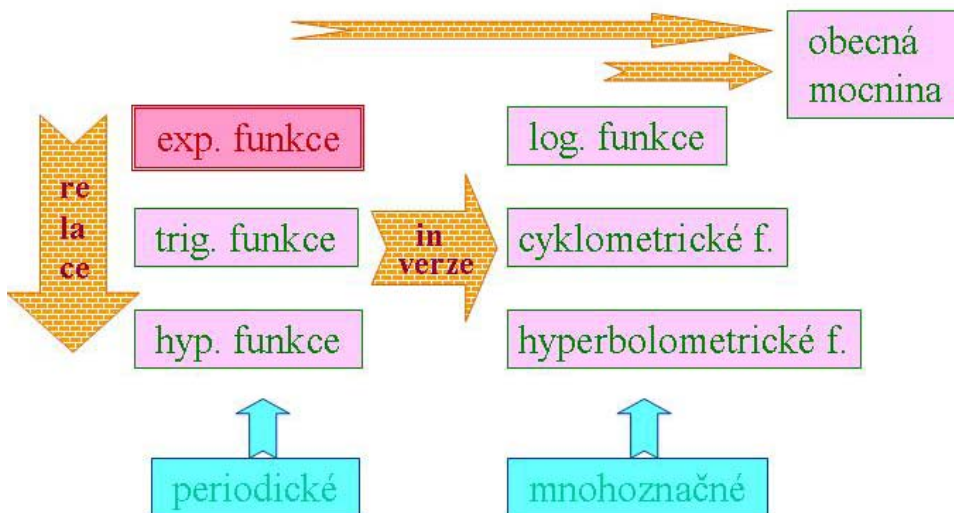
$$\operatorname{arg cosh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{arg coth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$



Obrázek 5.9: Některá další interpretace holomorfních funkcí

5.9.8 Přehled základních transcendentních funkcí

V tomto odstavci jako rekapitulaci probrané látky uvedeme jen přehledné schéma vytváření základních transcendentních funkcí. Výchozí funkcí je funkce exponenciální, kterou jsme jako jedinou definovali pomocí konvergentní nekonečné řady. Ostatní funkce jsme obdrželi buď pomocí vhodné relace či inverze nebo pomocí kompozice obou postupů. Více napoví **Obrázek 5.10**.



Obrázek 5.10: Konstrukce základních transcendentních funkcí

5.10 Kontrolní otázky a příklady ke kapitole 5

6 Integrální počet v komplexním oboru

Cíle kapitoly: Kapitola obsahuje základy integrálního počtu komplexní funkce komplexní proměnné. Ke stěžejním poznatkům bude patřit Cauchyova věta, která má řadu závažných důsledků, a její zobecnění tzv. reziduová věta.

6.1 Úvod

Jedním z fundamentálních pojmů analýzy funkcí komplexní proměnné je pojem křivkového integrálu. Tento integrál úzce souvisí s křivkovým integrálem druhého druhu studovaným v analýze reálných funkcí a má s ním řadu podobných vlastností. Proto budeme při výkladu látky postupovat analogickým způsobem. Omezíme se přitom jen na třídu křivek, které jsou pro praktické aplikace dostatečně obecné, tj. na třídu po částech hladkých křivek. Výhodou tohoto omezení je skutečnost, že po částech hladké křivky jsou rektifikace schopné, tj. můžeme určit jejich délku. Druhá výhoda spočívá v tom, že výpočet křivkového integrálu komplexní funkce komplexní proměnné převedeme v podstatě na výpočet určitého integrálu komplexní funkce reálné proměnné. Uvedeme si několik způsobů praktického výpočtu integrálu komplexní proměnné, neboť tyto metody nám usnadní práci při studiu následných kapitol o integrálních transformacích.

6.2 Integrál

V celé kapitole budeme předpokládat, nebude-li řečeno jinak, že Γ je po částech hladká křivka s počátečním bodem $z = a$ a koncovým bodem $z = b$. Na křivce Γ zvolme nějaké dělení $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b$ a předpokládejme, že dělicí body jsou na křivce uspořádány podle rostoucího indexu. Za normu zvoleného dělení považujeme nezáporné číslo $\Delta = \max_{k=1, \dots, n} |z_k - z_{k-1}|$. V každém oblouku $\Gamma_k \subset \Gamma$, $k = 1, \dots, n$ s počátečním bodem z_{k-1} a koncovým bodem z_k zvolme libovolně bod ζ_k , tzv. reprezentanta. Předpokládejme, že na křivce Γ je definována spojitá funkce $w = f(z)$, tedy $f(z) \in C(\Gamma)$. Existuje-li níže uvedená limita nezávisle na výběru dělení i výběru reprezentantů, pak **integrál komplexní funkce $f(z)$ po křivce Γ** definujeme jako

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad (6.1)$$

Ukázka 6.1: Pomocí definice spočítáme integrál $\int_{\Gamma} dz$ podél libovolné křivky s koncovými body a a b . V tomto případě postupně platí

$$\int_{\Gamma} dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} (z_n - z_0) = b - a.$$

Povšimněme si, že pro uzavřenou křivku je vyšetřovaný integrál nulový.

Ukázka 6.2: Spočtěme nyní $\int_{\Gamma} |dz|$. Tentokrát máme $\int_{\Gamma} |dz| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| = \text{meas} \Gamma$,

takže vyšetřovaný integrál udává délku křivky.

Ukázka 6.3: Určeme nyní

$$\int_{\Gamma} z dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (z_k + z_{k-1}) (z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} (z_k^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

I v tomto případě je integrál po uzavřené křivce nulový.

Věta 6.1 Nechť je Γ po částech hladká křivka a nechť $f(z) \in C(\Gamma)$. Pak $\int_{\Gamma} f(z) dz$ existuje a platí $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u + jv) (dx + jdy) = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + j \int_{\Gamma} (v dx + u dy)$.

Věta tedy umožňuje počítat jeden integrál v komplexní rovině pomocí dvou křivkových integrálů v reálné rovině.

Nechť je křivka Γ zadána parametricky pomocí funkcí $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Pak $z = x(t) + jy(t) = z(t)$, $dz = z'(t) dt$ a proto

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt.$$

Tedy křivkový integrál komplexní funkce komplexní proměnné se transformuje na určitý integrál komplexní funkce reálné proměnné.

Ukázka 6.4: Spočítejme $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ podél kružnice $|z - z_0| = r > 0$, přičemž z_0 je libovolně, ale pevně zvolený bod komplexní roviny. Zavedme parametrické vyjádření kružnice $z = z_0 + r \exp(j\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Pak $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{j r \exp(j\varphi)}{r \exp(j\varphi)} d\varphi = j \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi j$. Toto je velice důležitý výsledek, který se promítne do našich dalších úvah. Pověsimně si, že integrand není v bodě z_0 holomorfní.

Protože křivkový integrál v komplexním oboru se v mnohém podobá, křivkovému integrálu v reálném oboru, připomeňme si proto souhrnně alespoň některé z jeho vlastností.

Věta 6.2 Za výše uvedených předpokladů a označení platí:

$$1^{\circ} \int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz,$$

$$2^{\circ} \int_{\Gamma} c f(z) dz = c \int_{\Gamma} f(z) dz,$$

$$3^{\circ} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

$$4^{\circ} \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$5^{\circ} |f(z)| \leq M, \quad l = \text{meas} \Gamma \implies \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M l.$$

6.3 Cauchyova věta

Nyní přicházíme k základní větě integrálního počtu komplexní proměnné. V ukázkách 6.1 a 6.3 jsme obdrželi nulovou hodnotu integrálu podél uzavřené křivky. V obou případech byl integrand holomorfní funkcí. V ukázce 6.4 jsme dospěli k nenulové hodnotě integrálu, ale integrand nebyl holomorfní funkcí. Ukazuje se, že tento výsledek je velice obecný a že holomorfnost integrandu je pro výpočet integrálu velice podstatná. Přesné tvrzení formuluje tzv. fundamentální **Cauchyova věta**. Sám Augustin Louis Cauchy formuloval a dokázal toto tvrzení již v roce 1814, avšak za silnějšího předpokladu (spojitost derivace integrandu). Dnešní tvar věty, kdy předpoklad o integrandu je slabší (holomorfnost), dokázal v roce 1900 E Goursat.

Věta 6.3: Bud' Ω jednoduše souvislá oblast a $\Gamma \subset \Omega$ uzavřená po částech hladká křivka. Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní v Ω . Pak $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Ukázka 6.5: Nechť Γ je Jordanova křivka, z_0 bod ležící vně této křivky a $n = 0, 1, 2, \dots$. Pak přímým důsledkem Cauchyovy věty je, že $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$.

Cauchyovu větu lze zobecnit i na vícenásobně souvislou oblast. Nechť je oblast ohraničena po částech hladkými a stejně orientovanými křivkami $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Pak

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f(z) dz.$$

Důležitou roli hraje případ $n = 1$, kdy $\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz$. Tomuto případu říkáme **deformace integrační cesty**. Význam uvedené relace spočívá v tom, že integrál po komplikované křivce Γ_0 můžeme převést na integrál po jednoduché křivce Γ_1 , např. po kružnici, a to nám většinou usnadní výpočet.

Ukázka 6.6: Nechť $\Gamma \subset \mathbb{C}$ je po částech hladká křivka a $z_0 \in \mathbb{C}$ je pevný bod. Pak

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 2\pi j & \text{je-li } z_0 \text{ uvnitř } \Gamma \\ 0 & \text{je-li } z_0 \text{ vně } \Gamma \end{cases}.$$

První tvrzení je důsledkem ukázky 6.4 a použití deformace integrační cesty a druhé tvrzení je přímým důsledkem Cauchyovy věty.

Nechť jsou body $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ spojeny dvěma stejně orientovanými křivkami Γ_1 a Γ_2 . Označme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Pak Γ je uzavřená křivka a podle Cauchyovy věty je integrál holomorfní funkce podél křivky Γ nulový. Tento výsledek ovšem implikuje

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz.$$

Jinými slovy, křivkový integrál funkce holomorfní na oblasti nezávisí na tvaru integrační cesty, nýbrž jen na jejích koncových bodech.

Definice 6.1: Nechť je $f(z)$ holomorfní v oblasti Ω a nechť je $z_0 \in \Omega$ pevný bod. Označme Γ křivku s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem z . Pak

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

nazýváme **neurčitým integrálem (primitivní funkcí)** funkce $f(z)$.

Věta 6.4: Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní na jednoduše souvislé oblasti Ω . Označme $F(z)$ funkci primitivní k $f(z)$. Pak $F(z)$ je v Ω též holomorfní a platí

$$F'(z) = f(z), \quad \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0).$$

Ukázka 6.7: Protože funkce $f(z) = z$ je holomorfní v celé komplexní rovině, můžeme integrál z ukázky 6.3 jednoduše určit takto: $\int_{\Gamma} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$.

Ke Cauchyově větě platí v jistém smyslu i obrácená věta – věta Morerova.

Věta 6.5 Bud' Ω jednoduše souvislá oblast. Nechť pro $f(z) \in C(\Omega)$ a pro každou uzavřenou křivku Γ platí $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Pak je funkce $f(z)$ holomorfní v Ω .

6.4 Cauchyův vzorec

V důsledku platnosti Cauchyovy věty se ukazuje, že hodnoty holomorfní funkce uvnitř oblasti nelze volit zcela libovolně, ale že jsou za jistých předpokladů již dány jejími hodnotami na hranici oblasti.

Věta 6.6 Nechť je jednoduše souvislá oblast Ω ohraničena Jordánovou křivkou Γ . Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní v $\bar{\Omega}$. Pak pro $\forall z \in \Omega$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.2)$$

Poslední rovnost, tzv. **Cauchyův vzorec**, ukazuje, že ze znalosti funkčních hodnot holomorfní funkce na hranici oblasti můžeme jednoznačně určit i její hodnoty v každém bodě oblasti. Derivováním relace (6.2) podle parametru z dostaneme existenci derivací všech řádů holomorfní funkce.

Věta 6.7 Za předpokladů věty (6.2) má funkce $f(z)$ uvnitř Ω derivace všech řádů a platí

$$f(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (6.3)$$

Obdobný výsledek u reálných funkcí nenajdeme. Větu lze zobecnit i na vícenásobně souvislou oblast. V tom případě musíme položit $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ a určit správně orientaci jednotlivých křivek.

Ukázka 6.8: Máme spočítat integrál $I = \int \frac{\sin(\pi\zeta/4)}{\zeta^2 - 1} d\zeta$ podél kružnice $x^2 + y^2 - 2x = 0$, neboli $|z-1|=1$. Abychom mohli použít formuli (6.2), položíme $f(\zeta) = \frac{\sin(\pi\zeta/4)}{\zeta+1}$. Jelikož je funkce $f(z)$ v kruhu $|z-1| \leq 1$ holomorfní a bod $z=1$ leží uvnitř vyšetřované kružnice, máme

$I = 2\pi j f(1) = 2\pi j \frac{\sin(\pi/4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi j$. *Spočtěme ještě tentýž integrál podél kružnice $x^2 + y^2 - 2y = 0$, tj. $|z - j| = 1$. Oba body $z = \pm 1$ leží vně této kružnice, takže integrand je v kruhu $|z - 1| \leq 1$ holomorfní funkcí a proto podle Cauchyovy věty $I = 0$.*

Ukázka 6.9: *Spočtěme ještě $I = \int \frac{\sin(\pi\zeta/4)}{(\zeta^2-1)(\zeta-1)} d\zeta$ podél kružnice $|z-1|=1$. Funkci $f(\zeta)$ zvolme stejně, jako v předchozí ukázce, neboť již víme, že je uvnitř kružnice holomorfní. Nyní použijeme relaci (6.3) při $n=1$. Proto $I = 2\pi j f'(1) = \frac{1}{8} \sqrt{2} \pi (\pi - 2) j$, neboť krátkým výpočtem zjistíme, že $f'(\zeta) = \frac{\pi \cos(\pi\zeta/4) - 4f(\zeta)}{4(\zeta+1)}$.*

Aplikujeme-li nyní (6.2) na kruh $|\zeta - z| = R$ a zavedeme parametrické vyjádření $\zeta = z + R \cdot \exp(j\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, dostaneme tzv. Gaussovu **větu o střední hodnotě**.

Věta 6.8 Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní na uzavřeném kruhu $|\zeta - z| = R$. Pak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + R \cdot \exp(j\varphi)) d\varphi.$$

6.5 Taylorova a Laurentova řada

V kapitole 5.4 jsme uvedli, že mocninná řada konverguje uvnitř konvergenčního kruhu stejnoměrně a že ji zde lze proto derivovat i integrovat člen po členu, aniž by se změnil obor konvergence. Tedy součet řady je uvnitř konvergenčního kruhu holomorfní funkcí. Platí však i obrácené tvrzení: Je-li funkce holomorfní v nějakém bodě, pak ji lze v jistém okolí tohoto bodu vyjádřit ve tvaru konvergentní mocninné řady.

Věta 6.9 Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní v kruhu $K: |z - z_0| < R$, pak $\forall z \in K$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta) dz}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (6.4)$$

Tato řada se nazývá **Taylorovou řadou (Taylorovým rozvojem)** funkce $f(z)$ v bodě z_0 . Platí však i obrácené tvrzení o jednoznačnosti Taylorova rozvoje.

Věta 6.10 Lze-li funkci $f(z)$ rozložit v řadu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, pak je to řada Taylorova, tj. pro koeficienty c_n platí relace (6.4).

Ukázka 6.10: *Taylorovými rozvoji funkcí $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ jsou řady uvedené v odstavcích 5.9.1, 5.9.2 a 5.9.3. Jak se můžeme přesvědčit pomocí podílového kritéria, všechny tyto řady konvergují v celé komplexní rovině.*

V praxi se však setkáváme i s funkcemi, které nejsou ve všech bodech oblasti holomorfní. Abychom mohli i tyto funkce rozvést v řadu, musíme si pojem mocninné řady zobecnit.

Věta 6.11 Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní na mezikruží $0 < R_1 < |z - z_0| < R_2$. Pak $\forall z$ tohoto mezikruží lze funkci $f(z)$ rozvést v řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta) dz}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbf{I}, \quad (6.5)$$

kde K je kružnice $|z - z_0| = R$, $R_1 < R < R_2$. Tato řada konverguje v mezikruží stejnoměrně.

Definice 6.2: Řadu (6.5) nazýváme **Laurentovou řadou** funkce $f(z)$ v bodě z_0 . Částečná řada při $-\infty < n \leq -1$ (tedy členy se zápornými mocninami) vytváří **hlavní část** Laurentova rozvoje, částečná řada při $0 \leq n < \infty$ (tedy členy s nezápornými mocninami) představuje **regulární část** Laurentova rozvoje.

Je-li funkce $f(z)$ v bodě z_0 holomorfní, pak Laurentova řada se redukuje na řadu Taylorovu, tj. její hlavní část vymizí. Podobně jako v případě Taylorovy řady i v případě Laurentovy řady platí věta o jednoznačnosti rozvoje v řadu, kterou využíváme hlavně v případech, kdy se nám podaří nalézt součet řady prostřednictvím geometrické řady nebo derivací či integrací jiná řada člen po členu.

Věta 6.12 Je-li možné v mezikruží $0 < R_1 < |z - z_0| < R_2$ rozložit funkci $f(z)$ v řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ pak je to řada Laurentova, tj. pro její koeficienty platí (6.5).}$$

Ukázka 6.11: V bodě $z_0 = 0$ máme rozvést funkci $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ v Laurentovu řadu. Budeme přitom využívat známého výsledku o součtu **geometrické řady**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \equiv 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}, \quad q \in \mathbf{C}, \quad |q| < 1. \quad (6.6)$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické řady. Danou funkci rozložíme nejprve v parciální zlomky $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Z tohoto rozložení vidíme, že rozvoj v Laurentovu řadu musíme provádět odděleně ve třech oblastech, jejíž hraniční čáry tvoří kružnice $|z|=1$ a $|z|=2$.

a° Necht' $|z| < 1$ a tedy tím spíše $|\frac{z}{2}| < 1$. Abychom mohli užít (6.6), upravíme danou funkci na tvar $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2}$. Pak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n-1}) z^n$. Laurentova řada se mění v Taylorovu, neboť zadaná funkce je ve vyšetřované oblasti holomorfní.

b° Necht' nyní $1 < |z| < 2$. Pak $|\frac{z}{2}| < 1$ a $|\frac{1}{z}| < 1$. V tomto případě upraví zadanou funkci takto $f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2}$, takže $f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^m} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n$. Laurentův rozvoj má tedy nenulovou hlavní i regulární část.

c° Necht' konečně $2 < |z|$. Protože nyní $|\frac{1}{z}| < 1$, $|\frac{2}{z}| < 1$, použijeme úpravu $f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z}$ a proto $f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^m} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{z})^n = \sum_{n=-2}^{\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n$. Tedy Laurentův rozvoj má jen hlavní část.

6.6 Izolované singulární body

Definice 6.3: Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **izolovaným singulárním bodem** jednoznačné funkce $f(z)$, jestliže $\exists R > 0$ tak, že v oblasti $0 < |z - z_0| < R$ je funkce $f(z)$ holomorfní, ale v samotném bodě z_0 holomorfní není.

Ukázka 6.12: Mějme funkci $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$. Body $z_k = \pm \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$ jsou izolované singulární body a proto budou předmětem našich dalších úvah. Singulární bod $z_0 = 0$ však již izolovaný není, neboť je hromadným bodem posloupnosti singulárních bodů.

Singularitami, které jsou hromadnými body dalších singularit, se v dalším zabývat nebudeme. Stejně tak se nebudeme zabývat singularitami mnohoznačných funkcí, jako je např. izolovaná singularita $z_0 = 0$ funkce $f(z) = \ln z$.

Věta 6.13 V okolí izolovaného singulárního bodu z_0 funkce $f(z)$ můžeme zkonstruovat Laurentovu řadu, která konverguje v oblasti $0 < |z - z_0| < R$.

Definice 6.3: Izolovaná singularita z_0 jednoznačné funkce $f(z)$ se nazývá **odstranitelnou singularitou** (pólem či **podstatnou singularitou**), jestliže hlavní část Laurentova rozvoje této funkce v okolí bodu z_0 má nulový (konečný či nekonečný) počet členů. Index posledního členu hlavní části Laurentova rozvoje udává **řád pólu**.

Protože určování typu singularity pomocí Laurentova rozvoje je velice pracné, uvedeme si větu, která umožňuje klasifikovat singularitu pomocí limity.

Věta 6.14 Buď $f(z)$ jednoznačná funkce a z_0 její izolovaný singulární bod. Pak z_0 je

$$1^\circ \text{ odstranitelnou singularitou} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) < \infty,$$

$$2^\circ \text{ pólem} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

$$3^\circ \text{ podstatnou singularitou} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ neexistuje.}$$

Věnujme se nyní jednotlivým typům odstranitelných singularit podrobněji.

Odstranitelná singularita. Představuje-li bod z_0 odstranitelnou singularitu funkce $f(z)$, pak buď není tato funkce v bodě z_0 definována nebo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq c_0$, přičemž c_0 je koeficient z Laurentova rozvoje. V tomto případě lze singularitu odstranit v tom smyslu, že funkci $f(z)$ nahradíme funkcí $g(z)$, která ve všech bodech $z \neq z_0$ nabývá stejných hodnot jako funkce $f(z)$ a v bodě z_0 nabývá hodnoty $g(z_0) = c_0$. Nová funkce $g(z)$ již v bodě z_0 holomorfní je. V dalších úvahách budeme předpokládat, že tato singularita je již odstraněna dodefinováním vyšetřované funkce pomocí relace $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Ukázka 6.13: Vyšetřeme singularitu funkce $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ v bodě $z_0 = 0$. Tato funkce není v bodě $z_0 = 0$ definována. Přitom platí

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{120} z^4 - \dots, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Hlavní část Laurentova rozvoje chybí a proto se jedná o odstranitelnou singularitu. Protože existuje konečná limita vyšetřované funkce v bodě $z_0 = 0$, můžeme singularitu odstranit, tj. funkci $f(z)$ nahradíme funkcí $g(z)$, pro níž $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ při $z \neq 0$ a $g(0) = 1$. Tato nová funkce se od původní funkce liší jen v bodě $z = 0$, je však v bodě $z = 0$ holomorfní.

Pól. Tato singularita se v praxi vyskytuje velice často. Funkce, které nemají jiné singularity než póly, se nazývají **meromorfní funkce**. Hodnoty vyšetřované funkce rostou v pólu nade všechny meze a hlavní část příslušného Laurentova rozvoje obsahuje konečný počet členů, přičemž index posledního členu udává řád pólu. Abychom snadno zjistili řád tohoto pólu, zabývejme se nejprve řádem nulového bodu funkce.

Definice 6.4: Číslo k nazveme **řádem nulového bodu** z_0 dané funkce $f(z)$, platí-li $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. V tomto případě můžeme psát

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0.$$

Věta 6.15 Je-li z_0 nulovým bodem k -tého řádu holomorfní funkce $f(z)$, pak je též pólem k -tého řádu funkce $1/f(z)$ a naopak.

Ukázka 6.14: Určeme řád pólu funkce $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ v bodě $z_0 = 0$. Vyšetřujme proto řád nulového bodu funkce $g(z) = z - \sin z$. Zřejmě $g(0) = 0$. Dále platí $g'(z) = 1 - \cos z$, $g'(0) = 0$, $g''(z) = \sin z$, $g''(0) = 0$ a $g'''(z) = \cos z$, $g'''(0) = 1 \neq 0$. Pól zadané funkce je tedy třetího řádu.

Podstatná singularita. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce v podstatné singularitě má nekonečný počet členů a limita vyšetřované funkce v tomto bodě neexistuje. Chování funkce v okolí podstatné singularity může být velice složité. V podstatě lze říci, že se zde daná funkce může přibližovat k libovolné předem zadané komplexní hodnotě. O složitosti chování funkce v okolí podstatné singularity vypovídá přesněji následující věta.

Věta 6.16 Necht' je bod z_0 podstatnou singularitou jednoznačné funkce $f(z)$. Zvolme libovolně $c \in \mathbb{C}$. Pak existuje posloupnost $\{z_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, pro níž $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c$.

Ukázka 6.15: Vyšetřeme funkci $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ v bodě $z_0 = 0$. Platí zřejmě $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$.

Hlavní část Laurentova rozvoje má tedy nekonečný počet členů. Spočtěme ještě limitu podél kladné reálné poloosy $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(\frac{1}{x}) = \infty$ a také limitu podél záporné reálné poloosy

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp(\frac{1}{x}) = 0$, takže $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje, neboť limity podél dvou různých cest se liší. Jedná se tedy o podstatnou singularitu. Zvolme nyní libovolně číslo $c \in \mathbb{C}$ a

definujme posloupnost $z_k = \frac{1}{\text{Ln } c} = \frac{1}{\ln|c| + j \arg c + 2k\pi j}$. Zřejmě $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$ a proto také

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{z_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(\operatorname{Ln} c) = \lim_{k \rightarrow \infty} c = c.$$

Definice 6.5: Nekonečně vzdálený bod nazveme *izolovaným singulárním bodem* funkce $f(z)$, jestliže existuje $R > 0$ tak, že vně kruhu $|z| > R$ nemá funkce $f(z)$ žádné další singulární body. Nekonečně vzdálený bod je *odstranitelnou singularitou (pólem či podstatnou singularitou)* funkce $f(z)$, jestliže její Laurentův rozvoj v tomto bodě obsahuje nulový (konečný či nekonečný) počet členů s *kladnou* mocninou.

Ukázka 6.16: Vyšetřeme funkci $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ v bodě $z = \infty$. Podle předchozí ukázky je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. Laurentův rozvoj tedy neobsahuje kladné mocniny a proto se jedná o *odstranitelnou singularitu*. Platí $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1$.

6.7 Teorie reziduí

K důležitým pojmům komplexní analýzy náleží pojem rezidua funkce v bodě. Pojem rezidua a zvláště pak reziduová věta jsou velice užitečné, a to jak z teoretického tak i z praktického hlediska. Užívají se např. při výpočtu integrálů, při realizaci integrálních transformací, při sčítání řad apod.

Definice 6.6: Buď Γ Jordanova křivka, $f(z)$ funkce holomorfní uvnitř Γ s eventuální výjimkou izolované singularity v bodě z_0 . *Reziduem* funkce $f(z)$ v bodě z_0 nazveme integrál $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$.

Z definice bezprostředně vyplývá, že reziduum nezávisí na integrační cestě. Není-li z_0 singulárním bodem, je podle Cauchyovy věty $\operatorname{res} f(z_0) = 0$. Abychom nemuseli rezidua počítat přímo z definice, musíme nalézt nějaká jednodušší pravidla pro jejich určování. Porovnáme-li definiční integrál rezidua s koeficienty Laurentova rozvoje (6.5), vidíme, že pro $n = -1$ dostáváme stejný integrál. Můžeme tak formulovat obecnou větu, která je vhodná k určení rezidua pro libovolný singulární bod, tedy i pro podstatnou singularitu.

Věta 6.17 Reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0 se rovná koeficientu c_{-1} v Laurentově rozvoji vyšetřované funkce v bodě z_0 .

Ukázka 6.17: Nalezněme reziduum funkce $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ v bodě $z_0 = 0$, kde podle ukázky 6.15 nastává podstatná singularita. Protože $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$, je $\operatorname{res} f(0) = 1$.

Další pravidla pro výpočet reziduí se týkají jen meromorfních funkcí. Uvažme nejprve, že meromorfní funkce $f(z)$ má v bodě z_0 jednoduchý pól. Pak Laurentův rozvoj zadané funkce má tvar $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$. Vynásobíme-li celou rovnost dvojčlenem $z-z_0$, dostaneme $(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots$. Přejdeme-li

v této relaci k limitě pro $z \rightarrow z_0$, získáme koeficient c_{-1} a též první pravidlo pro určení rezidua.

Věta 6.18 Bud' z_0 prostým pólem funkce $f(z)$. Pak $\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.

Ukázka 6.18: *Vypočtěte reziduum funkce $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)^2}$ v bodě $z_0 = 1$. Zřejmě platí*
 $\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z-3)^2} = \frac{1}{4}$.

Podobným způsobem se odvodí pravidlo pro výpočet rezidua, je-li z_0 pól řádu k .

Věta 6.19 Bud' z_0 pólem k -tého řádu funkce $f(z)$. Pak

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)].$$

Ukázka 6.19: *Vypočtěte reziduum funkce z předchozí ukázky v bodě $z_0 = 3$. V tomto případě se jedná o pól druhého řádu, takže platí* $\operatorname{res} f(3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = -\lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}$.

Vyjádřeme nyní funkci $f(z)$ ve tvaru zlomku $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ a předpokládejme, že z_0 je jejím prostým pólem. Tedy musí platit $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. **Věta 6.18** pak implikuje $\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Věta 6.20 Necht' je z_0 prostým pólem funkce $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Pak $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Ukázka 6.20: *Určeme reziduum funkce $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ v bodě $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Platí $\varphi(z) = 1$, $\psi(z) = \cos z$, $\psi'(z) = -\sin z$. Proto $\operatorname{res} f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = -1$.*

Reziduová věta, kterou nyní zformulujeme, má pro své četné aplikace zcela mimořádné postavení mezi ostatními výsledky. Je v jistém smyslu zobecněním Cauchyovy věty. Je vlastně důsledkem rozšíření Cauchyovy věty na vícenásobně souvislou oblast.

Věta 6.21 Necht' je oblast Ω ohraničena Jordánovou křivkou Γ . Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní na $\overline{\Omega}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit $z_1, \dots, z_n \in \Omega$. Pak

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i). \quad (6.7)$$

Podle reziduové věty závisí hodnota integrálu jen na singularitních bodech uvnitř křivky Γ . Tato hodnota se rovná $2\pi j$ násobku součtu reziduí od všech zmíněných singularitních bodů.

Ukázka 6.21: Určeme hodnotu integrálu $I = \int \frac{dz}{z^3+z^2}$ podél kružnice $|z - \frac{j}{2}| = \frac{2}{3}$. Integrand má dvě singularity a to pól druhého řádu v bodě $z_0 = 0$, který leží uvnitř zadané kružnice, a jednoduchý pól v bodě $z_0 = -1$, který leží vně této kružnice. Proto

$$I = 2\pi j \operatorname{res} f(0) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z+1} = -2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+1)^2} = -2\pi j .$$

Ukázka 6.22: Spočtěme integrál z předchozí ukázky podél kružnice $|z - \frac{j}{2}| = 2$. V tomto případě jsou oba singulární body uvnitř integrační cesty, takže

$$I = 2\pi j (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)) = 2\pi j (-1 + \lim_{z \rightarrow -1} ((z+1) f(z))) = 2\pi j (-1 + \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z^2}) = 0 .$$

Definice 6.7: Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní v okolí bodu $z = \infty$. Bud' Γ kladně orientovaná uzavřená po částech hladká křivka obsahující uvnitř všechny konečné singulární body funkce $f(z)$. Pak **reziduem funkce $f(z)$ v nekonečnu** rozumíme integrál

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz .$$

Ukázka 6.23: Určeme reziduum funkce $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ v nekonečnu. Za křivku Γ zvolme kružnici $|z| = R > 0$. Podle definice platí

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (1 + \frac{1}{z}) dz = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} dz - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = -1 .$$

První integrál je nulový podle Cauchyovy věty, druhý se rovná $2\pi j$ podle ukázky 6.4. Povšimněme si, že platí $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{z}) = 1$. Bod $z_0 = \infty$ není singulárním bodem zadané funkce a přesto je reziduum v tomto bodě nenulové. Toto je odchylka od případu $|z_0| < \infty$, kdy je reziduum v nesingulárním bodě vždy nulové.

Věta 6.22 Necht' je funkce $f(z)$ holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou konečného počtu singularit z_1, \dots, z_n . Pak $\sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$.

Ukázka 6.24: Užitečnost poslední věty si ilustrujeme na výpočtu integrálu

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z^{17} dz}{(z^4 - 1)^2 (z^2 - 4)^5}$$

podél kružnice $\Gamma: |z| = 3$. Integrand má šest pólů v bodech $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = j, z_4 = -j, z_5 = 2$ a $z_6 = -2$, přitom první čtyři póly jsou druhého řádu a poslední dva pátého řádu. Protože všechny póly leží uvnitř kružnice Γ , platí podle reziduové věty $I = 2\pi j \sum_{i=1}^6 \operatorname{res} f(z_i)$. Výpočet těchto reziduí je poměrně pracný. Proto s výhodou využijeme poslední věty, takže $I = -2\pi j \operatorname{res} f(\infty)$. Stačí tedy určit

$$-\operatorname{res} f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{18}}{(z^2 - 4)^5 (z^4 - 1)^2} = 1 .$$

Zadaný integrál tedy nabývá hodnoty $I = 2\pi j$.

6.8 Aplikace teorie reziduí

Jednou z aplikací teorie reziduí je výpočet reálných integrálů, zvláště nevlastních, jejichž určení pomocí klasických metod je obtížné nebo nemožné. Teorii reziduí je možno s úspěchem využít i při sčítání nekonečných řad, při definování některých speciálních funkcí, při odvozování asymptotických vzorců apod. V této kapitole se zaměříme jen na určení integrálů dvou typů. Další možnosti výpočtu integrálů nalezne čtenář např. v [8], [17], [25].

a° **Výpočet integrálů typu** $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$

V integrálu předpokládáme, že R je racionální funkce dvou proměnných. Pro určení tohoto integrálu zavedeme substituci $z = \exp(jx)$. Pak z definičních vztahů trigonometrických funkcí vyplývají po jednoduché úpravě relace

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2jz}, \quad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad dx = \frac{dz}{jz}.$$

Po provedení substituce se uvedený integrál změní na integrál

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx = \int_{\Gamma} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) \frac{dz}{jz}$$

z racionální funkce komplexní proměnné podél jednotkové kružnice $|z| = 1$.

Ukázka 6.25: Spočtíme integrál $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b \cos x}$, přičemž $a > b > 0$. Po zavedení substituce $z = \exp(jx)$ a jednoduché úpravě obdržíme $I = \frac{2}{j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b} = \frac{2}{jb} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$, přičemž $z_1 = \frac{1}{b}(-a + \sqrt{a^2 - b^2})$, $z_2 = \frac{1}{b}(-a - \sqrt{a^2 - b^2})$. Integrand má tedy dva jednoduché póly. Pól z_2 leží vně jednotkové kružnice, protože $z_2 < -\frac{a}{b} < -1$, pól z_1 leží uvnitř kružnice, neboť $-1 < z_1 < 1$. Podle reziduové věty je

$$I = \frac{2}{jb} 2\pi j \operatorname{res} f(z_1) = \frac{4\pi}{b} \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi}{b} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Ukázka 6.26: Spočtíme nyní $J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos x)^2}$, $a > b > 0$. Integrál můžeme spočítat dvěma způsoby. Jednak analogicky jako u předchozí ukázky pomocí substituce $z = \exp(jx)$ a jednak na základě výsledku z předchozí ukázky. Integrál $I = I(a, b)$ můžeme totiž chápat jako funkci parametrů a a b . Protože integrand tohoto integrálu je vzhledem k proměnné a spojitý a diferencovatelný, můžeme integrál derivovat podle parametru a . Dostaneme $J = -\frac{\partial I}{\partial a}$ a proto na základě předchozího výsledku $J = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^q}$, $q = \frac{3}{2}$.

Ukázka 6.27: Nakonec určíme integrál $K = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{(a+b \cos x)^2}$, $a > b > 0$. Abychom demonstrovali rozmanitost přístupů k řešení některých problémů, naznačíme si tři způsoby určení tohoto integrálu. První způsob spočívá v již předvedeném zavedení substituce $z = \exp(jx)$. Druhý způsob využívá derivování integrálu $I = I(a, b)$ podle parametru b ,

tedy $K = -\frac{\partial I}{\partial b}$. A konečně třetí způsob je založen na platnosti identity $aJ + bK = I$. Tedy $K = \frac{1}{b}(I - aJ)$ a proto $K = -\frac{2\pi b}{(a^2 - b^2)^q}$, $q = \frac{3}{2}$.

b° Výpočet integrálů typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$.

Funkce $f(z)$ musí být holomorfní v horní polorovině komplexní roviny s výjimkou konečného počtu pólů z_1, \dots, z_n a funkce $z f(z)$ musí k nule konvergovat stejnoměrně. Pak platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res } f(z_i).$$

Ukázka 6.28: Vyhodnoňme integrál $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$, $a, b > 0$. Funkce $f(z) = \frac{\exp(jaz)}{z^2 + b^2}$ je v celé komplexní rovině holomorfní s výjimkou dvou prostých pólů $z_1 = jb$ a $z_2 = -jb$. Ověřme nejprve uvedený předpoklad o stejnoměrné konvergenci. =Upravami dostaneme

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \exp(j\varphi) \exp(ja R \exp(j\varphi))}{R^2 \exp(2j\varphi) + b^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \exp(ja R \cos \varphi - j\varphi) \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \exp(-aR \sin \varphi)}{R^2 + b^2 \exp(-2j\varphi)}$$

V poslední relaci je první limita ohraničená, neboť modul exponenciály z ryze imaginárního čísla je roven jedné. Druhá limita konverguje při $R \rightarrow \infty$ k nule nezávisle na proměnné φ , neboť v horní komplexní polorovině je $\sin \varphi \geq 0$. Protože $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ konverguje

stejně, můžeme psát $I = 2\pi j \text{res } f(jb) = 2\pi j \frac{\exp(ja \cdot jb)}{2jb} = \frac{\pi}{b} \exp(-ab)$, neboť druhý pól v horní polorovině neleží. Pro tzv. Laplaceův integrál speciálně platí

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} \exp(-b).$$

Ukázka 6.29: Nyní zkoumejme integrál $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx$, $a, b > 0$. I tento integrál můžeme počítat buď pomocí reziduí způsobem popsáním v předchozí ukázce nebo derivací integrálu I podle parametru b . V druhém případě máme $J = -\frac{1}{2b} \frac{\partial I}{\partial b} = \pi \frac{1+ab}{2b^3} \exp(-ab)$.

Ukázka 6.30: Nakonec ještě vypočítáme integrál $K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx$. Opět můžeme postupovat dvojitým způsobem, buď pomocí reziduí, kdy vezmeme do úvahy komplexní funkci $f(z) = -jz \frac{\exp(jaz)}{z^2 + b^2}$, nebo pomocí derivace integrálu I podle parametru a . V tomto případě $K = -\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\pi}{2} \exp(-ab)$.

7 Laplaceova transformace

Cíle kapitoly: V této kapitole se budeme zabývat Laplaceovu transformací a některými jejími aplikacemi. Současně se zmíníme i o zobecněných funkcích.

7.1 O transformacích obecně

K řešení některých obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, zvláště rovnic s konstantními koeficienty, integrálních rovnic, integrálů apod. se s výhodou využívají transformační metody. Setkáme se s nimi např. při řešení elektrických obvodů, při vyšetřování lineárních systémů, při sledování vedení tepla, při studování kmitání struny či membrány, při výpočtu vlastních i nevlastních integrálů apod. Klasický přístup řešení spočívá v tom, že nejprve nalezneme obecné řešení dané rovnice a hodnoty integračních konstant určíme z vedlejších podmínek tak, jak jsme to prováděli v kapitolách 3 a 4. Obecný postup transformačních metod je založen na tom, že nejprve zadanou rovnici pomocí zvolené transformace zobrazíme. Transformovaná rovnice obsahující jako neznámou funkci obraz hledaného řešení je zpravidla jednodušší. Tento obraz z transformované rovnice vypočítáme a pomocí zpětné transformace získáme hledané řešení původního problému. Výhodou tohoto postupu je, že odpadá určování integračních konstant, že lze základní zákonitosti formulovat v obrazovém tvaru, čímž se vyhneme přímé transformaci a že na základě obrazových rovnic lze provádět některé závěry o řešené úloze, takže zpětná transformace, která reprezentuje nejtěžší krok, není vždy nutná.

Ukázka 7.1: *Obecný postup transformačních metod si můžeme přiblížit porovnáním s logaritmováním. Máme-li vypočítat součin dvou čísel, pak tento součin nejprve zlogaritmujeme (přímá transformace), provedeme součet logaritmů obou součinitelů (řešení transformované rovnice) a odlogaritmováním získáme hodnotu hledaného součinu (zpětná transformace).*

Integrální transformace mají většinou tvar

$$F(p) = \int_a^{\infty} f(t) K(t, p) dt,$$

kde funkce dvou proměnných $K(t, p)$, tzv. **jádro**, charakterizuje jednotlivé transformace. Uvedme si přehledně alespoň některé z nich:

| a | $K(t, p)$ | transformace |
|-----------|---------------|------------------------|
| 0 | $\exp(-pt)$ | Laplaceova |
| 0 | $p \exp(-pt)$ | Laplaceova-Carsonova |
| $-\infty$ | $\exp(-pt)$ | dvoustranná Laplaceova |
| $-\infty$ | $\exp(-jpt)$ | Fourierova |
| 0 | $\cos pt$ | Fourierova kosinová |
| 0 | $\sin pt$ | Fourierova sinová |

Kromě uvedených transformací existují ještě transformace Mellinova, Hilbertova, Besselova, Meierova, Eulerova, Lagrangeova, Stieltjesova, Weylova, Riemannova-Liouvilleova, Kontorovičova-Lebeděvova, Millerova-Fokova apod.

Povšimněme si Laplaceovy-Carsonovy transformace, která se pro své nesporné výhody (jako je stejný fyzikální rozměr originálu i obrazu, zobrazení konstanty na konstantu, jednoduchost vztahů pro $t = 0$ a $t = \infty$ a formální shoda s Heavisideovým pojetím) nabízí zvláště k řešení elektrických obvodů. Vzhledem ke všeobecné tendenci, která se prosazuje v mezinárodní technické literatuře, se přikloníme ke studiu Laplaceovy transformace. Laplaceova transformace je vhodnější pro obecnější úvahy, umožňuje snadnější přechod k Fourierově transformaci a hlavně je v různých technických oblastech (obvody, signály, regulace,...) již dostatečně zavedena.

7.2 Přímá Laplaceova transformace

Definice 7.1: Funkci $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt$, $p \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$ nazýváme **Laplaceovou transformací (Laplaceovým obrazem)** funkce $f(t)$ a značíme buď $f(t) \leftrightarrow F(p)$ nebo $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$. Funkce $f(t)$ je reálnou funkcí reálné proměnné a funkce $F(p)$ je komplexní funkcí komplexní proměnné.

Uvedený integrál ovšem nemusí existovat. Pomocí Laplaceovy transformace nemůžeme zobrazit každou funkci. Třidu zobrazitelných funkcí musíme nějak omezit.

Definice 7.2: Funkci $f(t)$ nazveme **předmětem (originálem)** Laplaceovu transformace, jestliže splňuje následující tři podmínky:

- 1° $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojitě,
- 2° $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
- 3° $f(t)$ je funkcí ohraničeného růstu s indexem s .

K definici poznamenejme, že funkce $f(t)$ je funkcí **ohraničeného růstu s indexem s** , existují-li kladné konstanty M, s tak, že $\forall t \in \mathbf{R}$ platí $|f(t)| \leq M \exp(st)$. Zdůrazněme, že stačí zaručit existenci takových konstant, není třeba je číselně vyhodnocovat.

Podmínka 2° říká, že se soustředíme na budoucnost děje, jeho minulost nás nezajímá. Abychom tuto podmínku mohli při výpočtech snadno akceptovat, zavádíme tzv. **Heavisideovou funkci (jednotkový skok)** pomocí relace (viz **Obrázek 7.1** - první případ)

$$\eta(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}.$$

I když to v dalším nebude explicitně uvedeno, budeme apriori předpokládat, že předmět Laplaceovy transformace podmínku 2° splňuje.

V některých aplikacích budeme též výhodou využívat tzv. **identickou funkci**, definovanou vztahem (viz **Obrázek 7.1** - druhý případ)

$$\psi(t) = t \eta(t) = \max(t, 0) = \frac{1}{2}(|t| + t).$$

Ukázka 7.1: *Prověřme, zda funkce $f(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}$ je předmětem Laplaceovu transformace. Připomeňme, že fakticky vyšetřujeme funkci $f(t) = t^n \eta(t) = (\max(t, 0))^n$, takže druhá podmínka je splněna. První podmínka je též splněna, neboť se jedná o mocninou*

funkci, která má všechny derivace. Abychom ověřili, že je splněna i třetí podmínka, uvažme, že platí

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots \geq \frac{1}{n!}t^n, \quad \text{neboť } t > 0.$$

Tedy $t^n \leq n! \exp(t)$, odkud vyplývá, že daná funkce je předmětem Laplaceovu transformace s koeficientem růstu $s=1$ a multiplikativní konstantou $M=n!$. Grafy dvou speciálních případů vyšetřované funkce pro $n=1$ a $n=2$ uvádí **Obrázek 7.1** - druhý a třetí případ.

Ukázka 7.2: Prošetřeme, zda je funkce $f(t) = \exp(t^2)$ předmětem Laplaceovu transformace. Ve skutečnosti tedy $f(t) = \exp(t^2) \eta(t)$. První dvě podmínky jsou zřejmě splněny. Ukážeme, že třetí podmínka splněna není. Zvolme proto libovolně kladné konstanty M, s a počítejme postupně

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{M \exp(st)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(t^2)}{M \exp(st)} = \frac{1}{M} \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(t^2 - st) = \infty,$$

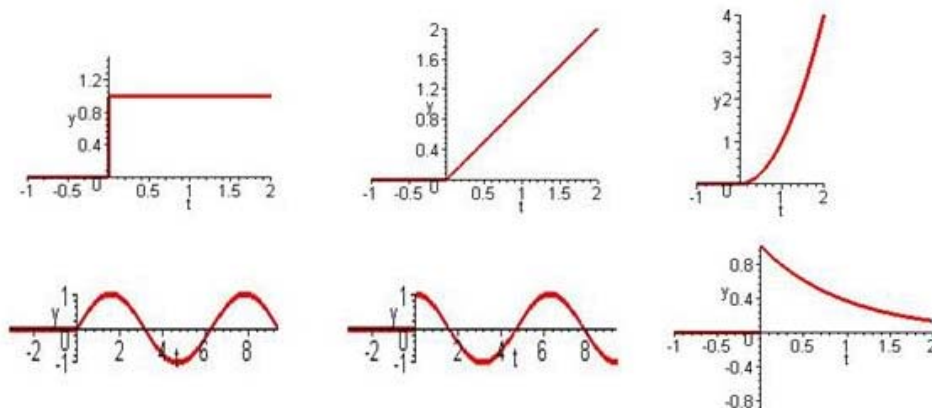
neboť pro dostatečně velká t bude pro jakýkoliv index růstu s platit $t > s$. Protože tato relace platí pro libovolné M, s , třetí podmínka splněna není a funkce $f(t) = \exp(t^2)$ není předmětem Laplaceovu transformace.

Ukázka 7.3: Průběhy funkcí $1, t, t^2, \sin t, \cos t$ a $\exp(-t)$ chápané jako předměty Laplaceovy transformace prezentuje **Obrázek 7.1**. První z funkcí je Heavisideova funkce čili jednotkový skok, druhá je identická funkce.

Ukázka 7.4: Nalezneme Laplaceův obraz funkce $f(t) = 1$, tj. vlastně $f(t) = \eta(t)$. Podle definice přímé Laplaceovu transformace máme

$$F(p) = \int_0^{\infty} \eta(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} (1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-pt)) = \frac{1}{p}$$

v případě, že $\operatorname{Re} p > 0$. Vidíme, že se zadaná funkce nezobrazuje na konstantu, neboť ve smyslu Laplaceovu transformace platí $1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$.



Obrázek 7.1: Předměty Laplaceovy transformace

Věta 7.1: Označme s index růstu funkce $f(t)$. Pak v polorovině $\operatorname{Re} p > s$ konverguje Laplaceův integrál absolutně a obraz $F(p)$ je zde holomorfní funkcí.

Věta vyjadřuje jen postačující podmínku. Funkce $F(p)$ může být definována i pro jiná p .

Definice 7.3: *Konvolucí* dvou reálných funkcí $f(t)$ a $g(t)$ rozumíme funkci

$$\varphi(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau .$$

Snadno se prověří, že konvoluce má následující vlastnosti:

- 1° je komutativní, tj. $f * g = g * f$,
- 2° je asociativní, tj. $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- 3° je distributivní, tj. $f * (g + h) = f * g + f * h$,
- 4° jsou-li f a g po částech spojité, je funkce φ spojitá.

Jsou-li funkce $f(t)$ a $g(t)$ předměty Laplaceovy transformace, můžeme konvoluci definovat i pomocí ekvivalentního nevlastního integrálu

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau .$$

Ukázka 7.5: Určete konvoluci $\varphi(t) = a^2 t * \exp(at)$, kde $a \in \mathbf{R}$. Na základě definice platí

$$\varphi(t) = a^2 \int_0^t (t - \tau) \exp(a\tau) d\tau = (a(t - \tau) + 1) \exp(a\tau) \Big|_0^t = \exp(at) - at - 1$$

Ukázka 7.6: Určete konvoluci $\varphi(t) = \exp(at) * \exp(bt)$, přičemž $a \neq b \in \mathbf{R}$. Platí

$$\varphi(t) = \int_0^t \exp(a\tau) \exp(b(t - \tau)) d\tau = \exp(bt) \int_0^t \exp((a-b)\tau) d\tau = \exp(bt) \frac{\exp((a-b)t) - 1}{a-b} \Big|_0^t$$

Po vyhodnocení dostaneme konečný výsledek $\varphi(t) = \frac{\exp(at) - \exp(bt)}{a - b}$, který můžeme limitním přechodem a užitím l'Hospitalova pravidla rozšířit i na případ $a = b$, kdy $\varphi(t) = t \exp(at)$.

Definice 7.4: Necht' $f(t) \leftrightarrow F(p)$ a $g(t) \leftrightarrow G(t)$ v polorovině $\operatorname{Re} p > 0$. Necht' oba Laplaceovy integrály absolutně konvergují. *Konvolucí obrazů* nazýváme integrál

$$F(p) * G(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(\zeta) G(p - \zeta) d\zeta ,$$

přičemž $\operatorname{Re} p > \gamma + s$, $\gamma > s$. Integrál nutno chápat v následujícím smyslu $\int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - jR}^{\gamma + jR}$.

Integrační cestou křivkového integrálu je tedy rovnoběžka s imaginární osou, která leží napravo od imaginární osy ve vzdálenosti $\gamma > s$. Konvoluce je komutativní, tj. $F * G = G * F$.

Abychom mohli Laplaceovu transformaci při řešení praktických úloh efektivně využívat, uvedeme si některá obecná pravidla, jimiž se tato transformace řídí. Soubor těchto pravidel nazýváme gramatikou Laplaceovu transformace. Pro užití v praxi byly po vzoru jazykových slovníků vypracovány i slovníky Laplaceovu transformace, které kromě gramatiky obsahují také řadu hesel, tj. dvojic vzájemně si korespondujících funkcí. Různě obsáhlé slovníky možno nalézt např. v [1], [4], [7], [18]. Kratší slovník je uveden i v [8]. Existuje 12 zmíněných pravidel. V učebnicích jsou obvykle formulována ve tvaru samostatných vět. V tomto textu si všechna pravidla shrneme do jedné věty. Pro každé pravidlo uvedeme název příslušné věty, tvar předmětu i obrazu a eventuálně konkretizující poznámku.

Věta 7.2 Necht' $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $a, b, p \in \mathbf{C}$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$. Pak

| věta o | předmět | obraz | poznámka |
|-----------------------------|---|--|---|
| 1° linearitě | $a f(t) + b g(t)$ | $a F(p) + b G(p)$ | $\operatorname{Re} p \geq \max(s_f, s_g)$ |
| 2° podobnosti | $f(rt)$ | $\frac{1}{r} F\left(\frac{p}{r}\right)$ | |
| 3° posunutí předmětu | $f(t-r)$ | $\exp(-rp) F(p)$ | $f(t) = 0, \quad t \leq r$ |
| 4° posunutí obrazu | $\exp(at) f(t)$ | $F(p-a)$ | |
| 5° derivaci předmětu | $f'(t)$ | $p F(p) - f(0)$ | |
| 6° derivaci obrazu | $-t f(t)$ | $F'(p)$ | |
| 7° derivaci podle parametru | $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$ | $\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda)$ | $\exists \frac{\partial}{\partial \lambda}$ |
| 8° integraci předmětu | $\int_0^t f(\tau) d\tau$ | $\frac{1}{p} F(p)$ | |
| 9° integraci obrazu | $\frac{1}{t} f(t)$ | $\int_p^\infty F(\zeta) d\zeta$ | $\exists \int_p^\infty$ |
| 10° konvoluci předmětu | $f(t) * g(t)$ | $F(p) G(p)$ | násobení obrazů |
| 11° konvoluci obrazu | $f(t) g(t)$ | $F(p) * G(p)$ | násobení předmětů |
| 12° Duhamelův vzorec | $f(t) g(0) + f(t) * g'(t)$ | $p F(p) G(p)$ | |
| $\underline{5}^\circ$ | $f^{(n)}(t)$ | $p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$ | |
| $\underline{8}^\circ$ | $\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \dots dt_1$ | $\frac{1}{p^n} F(p)$ | |

Odvození některých pravidel je poměrně snadné. Např. u věty o podobnosti vystačíme se substitucí $\tau = rt$. Pak postupně platí

$$\int_0^\infty f(rt) \exp(-pt) dt = \frac{1}{r} \int_0^\infty f(\tau) \exp\left(-\frac{p}{r}\tau\right) d\tau = \frac{1}{r} F\left(\frac{p}{r}\right).$$

U věty o derivaci předmětu nám pomůže integrace per partes. Pak

$$\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt) dt = f(t) \exp(-pt) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt = p F(p) - f(0).$$

Ukázka 7.7: Nalezněme obraz funkce $f(t) = t^n$. Zřejmě platí $f(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = n!$. Podle věty $\underline{5}^\circ$ je $p^n F = \frac{n!}{p}$ a proto $F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$. Celkem tedy $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Ukázka 7.8: Určeme obraz funkce $f(t) = \exp(at)$, $a \in \mathbf{C}$. Podle věty o posunutí obrazu a předchozí ukázky při $n=0$ máme ihned $\exp(at) \leftrightarrow \frac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$. Tento výsledek můžeme ovšem také získat přímo z definice, což vede na integraci exponenciální funkce.

Ukázka 7.9: Spočtěme obraz funkce $f(t) = \sin \omega t$. Z Eulerova definičního vztahu vyplývá $f(t) = \frac{1}{2j} \exp(j\omega t) - \frac{1}{2j} \exp(-j\omega t)$. Podle věty o linearitě a výsledku předchozí ukázky platí

$F(p) = \frac{1}{2j} \frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{p+j\omega}$. To po převedení na společného jmenovatele dává $\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.
Obdobným způsobem lze určit i obrazy funkcí $\cos \omega t$, $\sinh \omega t$, $\cosh \omega t$, $\sin(\omega t + \varphi)$ apod.

Ukázka 7.10: K určení obrazu funkce $f(t) = \exp(at) \sin \omega t$ stačí aplikovat větu o posunutí obrazu a výsledek předchozí ukázky. Bezprostředně obdržíme $\exp(at) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$.

Ukázka 7.11: Nalezení obrazu funkce $f(t) = \frac{1}{t} \sin \omega t$ provedeme pomocí věty o integraci obrazu a výsledku ukázky 7.9. Při zavedení substituce $\zeta = \omega \eta$ postupně platí

$$F(p) = \int_p^\infty \frac{\omega}{\zeta^2 + \omega^2} d\zeta = \int_{\frac{p}{\omega}}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + 1} = \arctan \eta \Big|_{\frac{p}{\omega}}^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\omega} = \operatorname{arccot} \frac{p}{\omega}.$$

Celkem tedy $\frac{1}{t} \sin \omega t \leftrightarrow \operatorname{arccot} \frac{p}{\omega}$.

Ukázka 7.12: Gramatika Laplaceovu transformace nám dovoluje již nyní k zadanému obrazu $F(p) = \frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$ nalézt příslušný předmět. Zřejmě platí $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ a proto podle věty o konvoluci předmětu máme $f(t) = \sin \omega t * \cos \omega t$. Tuto konvoluci musíme ovšem ještě spočítat. Postupně obdržíme

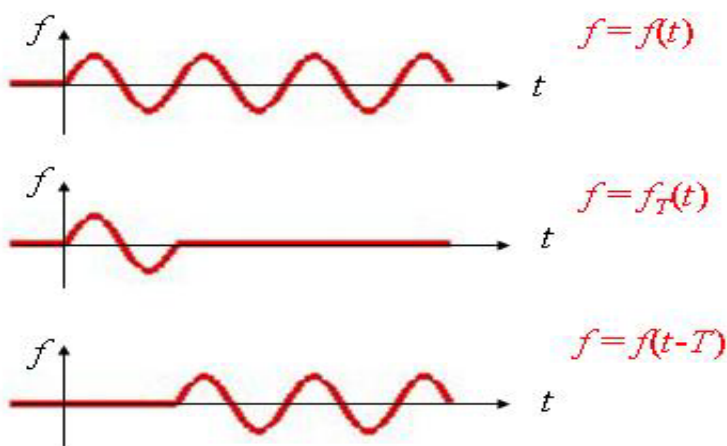
$$f(t) = \int_0^t \sin \omega \tau \cos(\omega t - \omega \tau) d\tau = \cos \omega t \int_0^t \sin \omega \tau \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_0^t \sin^2 \omega \tau d\tau = \frac{t}{2} \sin \omega t.$$

Celkem tedy $\frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \leftrightarrow \frac{t}{2} \sin \omega t$.

Abychom se vyhnuli výpočtu nevlastního integrálu, můžeme při určování obrazu periodické funkce $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$ postupovat též následujícím způsobem: Definujme si pomocnou funkci

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in \langle 0, T \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, T \rangle \end{cases}$$

Pak zadanou funkci můžeme vyjádřit ve tvaru součtu $f(t) = f_T(t) + f(t-T)$, viz **Obrázek 7.2**. Přechodem k obrazové relaci dostaneme $F(p) = F_T(p) + F(p) \exp(-pT)$, přičemž $F_T(p) = \int_0^T f_T(t) \exp(-pt) dt$ integrujeme přes konečný interval. Z obrazové relace již můžeme určit $F(p)$. Přesněji tento závěr formuluje věta.



Obrázek 7.2: Zobrazení periodické funkce

Věta 7.3 Necht' je funkce $f(t)$ periodická s periodou T . Necht' existuje $F_T(p)$. Pak

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-pT)}.$$

Ukázka 7.13: Pomocí poslední věty si nyní určíme obraz funkce $f(t) = \sin \omega t$, který jsme spočítali již v ukázce 7.9. V tomto případě je $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Funkci

$$F_T(p) = \int_0^T \sin \omega t \exp(-pt) dt$$

vypočítáme pomocí dvojí integrace per partes a vyřešením vzniklé lineární rovnice. Po úpravách získáme $F_T(p) = \omega \frac{1 - \exp(-pT)}{p^2 + \omega^2}$, takže $\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ jako v ukázce 7.9.

7.3 Zpětná Laplaceova transformace

Z předchozí kapitoly vyplývá, že k danému předmětu lze na základě integrálu z definice 7.1 jednoznačně nalézt příslušný obraz. Po eventuálním vyřešení transformovaného problému musíme provést poslední a zpravidla nejobtížnější fázi transformace, tj. přechod od obrazu k předmětu, tedy zpětnou transformaci. Přitom nevíme, za jakých podmínek tato zpětná transformace existuje, zda je jednoznačná a hlavně jak se prakticky určí. Těmito otázkami se budeme postupně zabývat.

Má-li k funkci $F(p)$ existovat předmět, pak funkce $F(p)$ musí mít vlastnosti, které splňuje Laplaceův obraz předmětu, např. holomorfnost zmíněná ve větě 7.1. Přesnější znění udává následující věta:

Věta 7.4 Necht' je $F(p)$ obrazem nějakého předmětu. Pak

a° $\exists s \in \mathbf{R}$ tak, že $F(p)$ je holomorfní pro $\operatorname{Re} p > s$, (věta o regularitě obrazu)

b° $\operatorname{Re} p \geq s_0 > s$, $s_0 = \text{konst.} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, (1. věta o limitě)

c° $k > 1 \Rightarrow \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ |p| < k \operatorname{Re} p}} p F(p)$ je konečná.

Předpokládejme nyní, že $f(t) \leftrightarrow F(p)$ a že též $f'(t)$ je předmět. Na základě věty o derivaci předmětu musí platit $f'(t) \leftrightarrow p F(p) - f(0)$. Užijeme-li nyní 1. limitní větu, dostaneme $\lim_{p \rightarrow \infty} (p F(p) - f(0)) = 0$, což vede k důsledku 7.1. Podobně dokážeme i důsledek 7.2.

Důsledek 7.1: Necht' $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $f'(t)$ je předmětem a $F(p)$ je holomorfní funkcí v bodě $p = \infty$. Pak $\lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$. (2. věta o limitě)

Důsledek 7.2: Necht' $f(t) \leftrightarrow F(p)$, necht' $f'(t)$ je předmětem a necht' navíc existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. Pak $\lim_{p \rightarrow 0} p F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. (3. věta o limitě)

Ukázka 7.14: Podmínky uvedené v poslední větě jsou nutné, ne však postačující. Existují tedy funkce, které nejsou obrazem žádného předmětu. Příkladem mohou být známé funkce $\exp(ap)$, $\sin p$, $\cos p$, $\sinh p$, $\cos kp$, $\ln p$ apod.

Ukázka 7.15: Prověřme platnost limitních vět na případu $\cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$. Zřejmě platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p^2 + \omega^2} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = 1 = \cos 0$$

a tedy první dvě limitní věty jsou splněny. Třetí limitní větu nemůžeme aplikovat, neboť neexistuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \omega t$.

Přejdeme nyní k otázce jednoznačnosti zpětné transformace. Nejprve si povšimněme, že vezmeme-li dva předměty, které jsou skoro všude stejné, tj. které se liší nanejvýš v bodech množiny míry nula, pak tento rozdíl nemá vliv na hodnotu integrálu definujícího přímou transformaci a oba předměty tak mají stejný obraz. Naskytá se otázka, zda i předměty, které se liší podstatněji, nemohou mít stejný Laplaceův obraz. Podle následující věty, kterou dokázal český matematik Matyáš Lerch, však tato alternativa nemůže nastat.

Věta 7.5 Necht' funkce $f_1(t)$ a $f_2(t)$ mají stejný Laplaceův obraz. Pak jejich rozdíl skoro všude nulový, tj. $\int_0^\infty |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0$.

Abychom se vyhnuli uvedené poměrně nepodstatné nejednoznačnosti, budeme brát v úvahu jen ty předměty, jejichž hodnota v bodech nespojitosti je dána aritmetickým průměrem limity zleva a limity zprava, tj. budeme klást $f(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$. Touto úmluvou můžeme problém jednoznačnosti zpětné transformace považovat pro technické aplikace za vyřešen.

Nyní již můžeme přistoupit k vlastní technice určení zpětné Laplaceovy transformace. Některé ze způsobů, jak k zadanému obrazu přiřadit příslušný předmět již známe. V případě mnoha jednodušších a v praxi se vyskytujících obrazů můžeme s výhodou využít vhodný slovník Laplaceovy transformace, případně aplikovat některé z pravidel gramatiky. Pro případ, že tento postup selže, uvedeme si nejprve tzv. **Bromwichův integrál**, který reprezentuje obecný tvar zpětné transformace a poté formulujeme několik praktických vět využívajících převážně metodiku výpočtu reziduí.

Věta 7.6 Necht' je funkce $F(p)$ obrazem nějakého předmětu $f(t)$. Pak v bodě spojitosti funkce $f(t)$ platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(\zeta) \exp(\zeta t) d\zeta, \quad (7.1)$$

přičemž uvedený integrál je nutno chápat ve smyslu definice 7.4.

V bodech nespojitosti prvního druhu můžeme levou stranu rovnice (7.1) nahradit aritmetickým průměrem $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$. V četných praktických aplikacích nalézáme obraz ve tvaru nekonečné řady. K určení příslušného předmětu pak slouží tzv. **1.**

Heavisideova věta o rozkladu, založená v podstatě na výsledku ukázky 7.7, tj. na relaci $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Věta 7.7 Necht' je obraz $F(p)$ zadán ve tvaru níže uvedené řady, která konverguje pro $|p| > R \geq 0$. Pak

$$F(p) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{p^i} \quad \leftrightarrow \quad f(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{(i-1)!} t^{i-1}.$$

Ukázka 7.16: Platnost 1. Heavisideovy věty ověříme na případě funkce $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Pomocí vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem $q = -(\frac{\omega}{p})^2$ dostaneme postupně

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2(1 + (\frac{\omega}{p})^2)} = \frac{\omega}{p^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\omega^{2i+1}}{p^{2i+1}}.$$

V tomto případě tedy $c_i = (-1)^i \omega^{2i+1}$, takže $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \omega^{2i+1} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin \omega t$.

Věta 7.8 Necht' je funkce $F(p)$ holomorfní všude vyjma izolovaných singularit p_1, \dots, p_n ležících v polorovině $\operatorname{Re} p < \gamma$. Necht' funkce $F(p)$ konverguje stejnoměrně k nule na libovolné posloupnosti kružnic $|p| = R_n$, $R_n \rightarrow \infty$. Pak

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(\zeta) \exp(\zeta t) d\zeta = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p=p_i} (F(p) \exp(pt)) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}.$$

Za předpokladů věty platí pro $F(p) \leftrightarrow f(t)$ relace $f(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p=p_i} (F(p) \exp(pt))$.

Věta 7.9 Necht' je $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ ryze lomená racionální funkce, která má póly p_1, \dots, p_n s násobnostmi k_1, \dots, k_n . Pak

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} ((p-p_i)^{k_i t} \frac{M(p) \exp(pt)}{N(p)}).$$

Poslední věta je důsledkem věty předposlední. Speciálním případem této poslední věty pro jednoduché póly je **2. Heavisideova věta o rozkladu**, která zní:

Věta 7.10 Necht' je $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ ryze lomená racionální funkce s jednoduchými póly p_1, \dots, p_n . Pak $f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i) \exp(p_i t)}{N'(p_i)}$.

Ukázka 7.17: Funkci $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)}$ přiřaďme předmět. V tomto případě máme $M(p) = 1$, $N(p) = p(p-1)(p-2)$, $N'(p) = 3p^2 - 6p + 2$. Aplikací 2. Heavisideovy věty dostaneme

$$f(t) = \frac{\exp(0)}{N'(0)} + \frac{\exp(t)}{N'(1)} + \frac{\exp(2t)}{N'(2)} = \frac{1}{2} - \exp(t) + \frac{1}{2} \exp(2t) = \frac{1}{2} (1 - \exp(t))^2.$$

8 Výsledky testů

Vstupní test

Příklad 2.2 Označme první výrok jako p a druhý výrok jako q . Pak platí $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$. To znamená, že hledaná negace našeho složeného výroku je $(\forall x \in R : x^2 \neq -2) \wedge (\exists a, b, c \in R, \forall x \in R : ax^2 + bx + c \neq 0)$. Pravdivost tohoto výroku je zřejmá.

Příklad 2.4 Hledáme všechny hodnoty $z_k = \sqrt[6]{1}$. Protože $1 = 1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0))$, vzorec pro z_k má tvar:

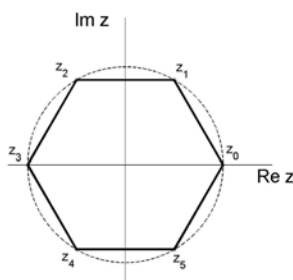
$$z_k = \sqrt[6]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Dostáváme tedy $z_0 = 1$, $z_1 = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} = -1,$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{6} + i \sin \frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = \cos \frac{10\pi}{6} + i \sin \frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Grafickým znázorněním těchto řešení pak vznikne pravidelný šestiúhelník:



Příklad 2.5 Je třeba řešit následující rovnici:

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2)(3 - \lambda) + 4(\lambda + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

Tedy vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$.

Příklad 2.6 Matice kvadratické formy K je rovna $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Postačující podmínkou pro

pozitivní definitnost je kladnost všech hlavních minorů. Dostáváme tedy:

$$|1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-\alpha^2 + \alpha).$$

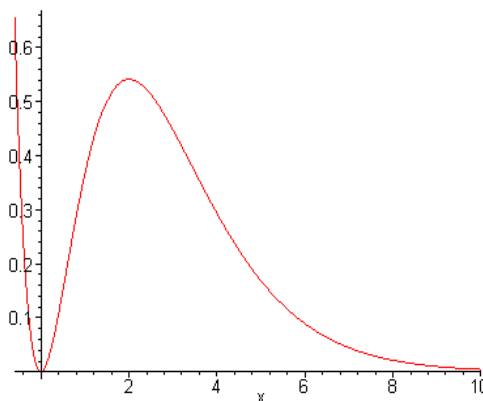
Z podmínky kladnosti i třetího minoru dostáváme nerovnici $2(-\alpha^2 + \alpha) > 0$. Jejím řešením jsou $\alpha \in (0,1)$. Tedy kvadratická forma K je pozitivně definitní právě pro $\alpha \in (0,1)$.

Příklad 2.7 Z rovnice přímky p vyjádříme $y = 2x + c$ a dosadíme do středového tvaru rovnice kružnice k : $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$. Po dosazení a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici $5x^2 + (4c-2)x + c^2 + 2c + 6 = 0$ s parametrem c . Diskriminant této rovnice je $D = -4(c^2 + 14c + 29)$. Přímka p je tedy tečnou kružnice k , je-li $D = 0$, její sečnou, je-li $D > 0$ a její vnější přímkou, je-li $D < 0$. Přitom $D = 0$ právě když bude splněna kvadratická rovnice pro $c^2 + 14c + 29 = 0$, jejíž diskriminant je $D_1 = 80$. Rovnice má tedy dva reálné kořeny $c_{1,2} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{5}}{2}$ neboli $c_1 = \frac{-14 + 4\sqrt{5}}{2}$, $c_2 = \frac{14 - 4\sqrt{5}}{2}$. Celkem jsme tedy dospěli k tvrzení: Přímka p je tečnou kružnice k pro $c \in \{-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5}\}$, sečnou pro $c \in (-7 - 2\sqrt{5}, -7 + 2\sqrt{5})$ a vnější přímkou pro $c \in (-\infty, -7 - 2\sqrt{5}) \cup (-7 + 2\sqrt{5}, +\infty)$.

Příklad 2.9 Funkce $f(x)$ má jeden nulový bod v $x = 0$ a je kladná pro všechna ostatní $x \in \mathbb{R}$. První derivace je rovna $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$. Má dva nulové body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Je kladná na intervalu $(0,2)$ a záporná na intervalech $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$. Funkce $f(x)$ je tedy na prvním intervalu rostoucí, na druhém a třetím je klesající. Dále je vidět, že v bodě x_1 nastává lokální minimum a v bodě x_2 lokální maximum. Druhá derivace je rovna $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Má opět dva nulové body $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ a $x_4 = 2 + \sqrt{2}$. Je kladná na intervalu $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$, a záporná na $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Naše funkce je tudíž na prvním a druhém intervalu konvexní, na třetím je konkávní. Body x_3 a x_4 jsou body inflexe. Asymptota bez směrnice neexistuje. Pokusíme se tedy najít asymptotu se směrnicí:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

Tedy asymptota se směrnicí tvaru $y = ax + b$ je v našem případě rovna: $y = 0$ pro $x \rightarrow \infty$. Pro $x \rightarrow -\infty$ asymptota neexistuje.



Příklad 2.10 Podle definice je $f'_s(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial \bar{s}} = g'_s(0)$, kde $g_s(x) = f(A + x\bar{s})$.

$$\begin{aligned} \text{Tj. } g_s(x) &= f\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \\ &= 2\left(1 + \sqrt{2}x + \frac{x^2}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{2}x + x^2. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} g'_s(x) &= 2\sqrt{2} + 2x, \\ g'_s(0) &= 2\sqrt{2} = f'_s(A). \end{aligned}$$

Protože je funkce f v bodě A diferencovatelná, lze postupovat i následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} f'_s(A) &= \text{grad } f(A) \cdot \bar{s}, \\ \text{grad } f(A) &= (2x + 2y, 2x - 2y)|_A = (4, 0), \\ f'_s(A) &= (4, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Příklad 2.11 Funkce má parciální derivace

$$f'_x(x, y) = 6x^2 + y^2 + 10x, \quad f'_y(x, y) = 2xy + 2y$$

definované rovněž na E_2 . Může tedy mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech. Pro jejich určení dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 6x^2 + y^2 + 10x &= 0 \\ 2xy + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Druhá rovnice je splněna, právě když

$$y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = -1.$$

Odsud snadno získáme stacionární body:

$$A = [0, 0], \quad B = \left[-\frac{5}{3}, 0\right], \quad C = [-1, 2], \quad D = [-1, -2].$$

Druhé parciální derivace naší funkce jsou:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x + 10, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 2y, \quad f''_{yy}(x, y) = 2x + 2;$$

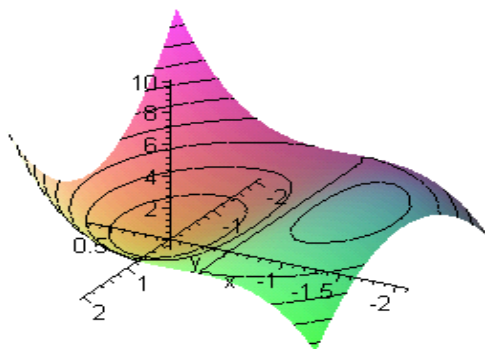
jsou spojité na E_2 , takže funkce f je dvakrát diferencovatelná v každém bodě roviny, zejména tedy v bodech A , B , C , D .

Protože $D_1(A) = 10 > 0$, $D_2(A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0$, má funkce v počátku lokální minimum $f(A) = 0$.

Protože $D_1(B) = -10 < 0$, $D_2(B) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$, má funkce v bodě B lokální maximum $f(B) = \frac{125}{27}$.

Protože $D_1(C) = -2 < 0$, $D_2(C) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, nemá funkce v bodě C lokální extrém.

A protože $D_1(D) = -2 < 0$, $D_2(D) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, nemá naše funkce lokální extrém ani v bodě D .



Příklad 2.12

$$\int x^3 e^{3x} dx = \begin{vmatrix} u = x^3, & u' = 3x^2 \\ v' = e^{3x}, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \int 3x^2 \frac{1}{3}e^{3x} dx =$$

$$\frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \int x^2 e^{3x} dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & u' = 2x \\ v' = e^{3x}, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 e^{3x} + \int \frac{2}{3}x e^{3x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^{3x}, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 e^{3x} + \frac{2}{3} \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{2}{3} \int \frac{1}{3}e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{27}(9x^3 - 9x^2 + 6x - 2).$$

Příklad 2.13 Nejprve je třeba rozložit zadanou funkci na parciální zlomky:

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{5}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 2x + 5}$$

$$5 = ax^2 + bx^2 + 2ax + cx + 5a$$

tj. $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.

Dostáváme tedy

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{1}{x} - \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 5}.$$

Po úpravě

$$\frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x+4}{x^2 + 2x + 5} - \frac{1}{(x+1)^2 + 4}.$$

Nyní můžeme integrovat:

$$\int \frac{5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Příklad 2.14 $\int_0^{\infty} (4+5t)e^{-bt} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c (4+5t)e^{-bt} dt = Q_1 + Q_2 = Q.$

$$Q_1 = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{-4}{b} e^{-bt} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-4}{b} e^{-bc} + \frac{4}{b} \right) = \frac{4}{b},$$

$$Q_2 = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{-5}{b} t e^{-bt} - \frac{5}{b^2} e^{-bt} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-5}{b} c e^{-bc} - \frac{5}{b^2} e^{-bc} + \frac{5}{b^2} \right) = \frac{5}{b^2},$$

$$Q = \frac{4}{b} + \frac{5}{b^2}.$$

Příklad 2.15 Protože průsečíky přímky a paraboly jsou body $A = [1, -1]$ a $B = [4, 2]$, lze psát $M = \{[x, y] \in E_2; -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2\}$. Dále tedy

$$\begin{aligned} \iint_M y e^x dx dy &= \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} y e^x dx \right) dy = \int_{-1}^2 [y e^x]_{y^2}^{y+2} dy = \int_{-1}^2 (y e^{y+2} - y e^{y^2}) dy = \\ &= \left[y e^{y+2} - e^{y+2} - \frac{1}{2} e^{y^2} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{2} e^4 + \frac{5}{2} e \cong 34.09478. \end{aligned}$$

Příklad 2.16 Transformace do cylindrických souřadnic má tvar:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = w.$$

Množina T se tudíž transformuje na :

$$T^* = \left\{ [\rho, \varphi, w] \in E_3; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq w \leq 2 \right\}.$$

Vlastní integrál je pak roven:

$$\begin{aligned} \iiint_T z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{T^*} w \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho d\varphi dw = \\ &= \iiint_{T^*} w \rho^2 d\rho d\varphi dw = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 w \rho^2 dw \right) d\varphi \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{w^2 \rho^2}{2} \right]_0^2 d\varphi \right) d\rho = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi \right) d\rho = 2 \int_0^1 [\rho^2 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \pi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 2.17 Hmotnost skořepiny je rovna hodnotě plošného integrálu $\int_{\sigma} \gamma d\sigma$, kde σ označuje plochu skořepiny a γ značí hustotu. Je zřejmé, že $\gamma = kz$, kde k je konstanta. Použijeme parametrizaci zadaného paraboloidu do cylindrických souřadnic:

$$\begin{aligned}x &= u \cos v \\y &= u \sin v \\z &= u, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Potom

$$r'_u \times r'_v = -u \cos v \vec{i} - u \sin v \vec{j} + u \vec{k}$$

Plošný element je pak roven

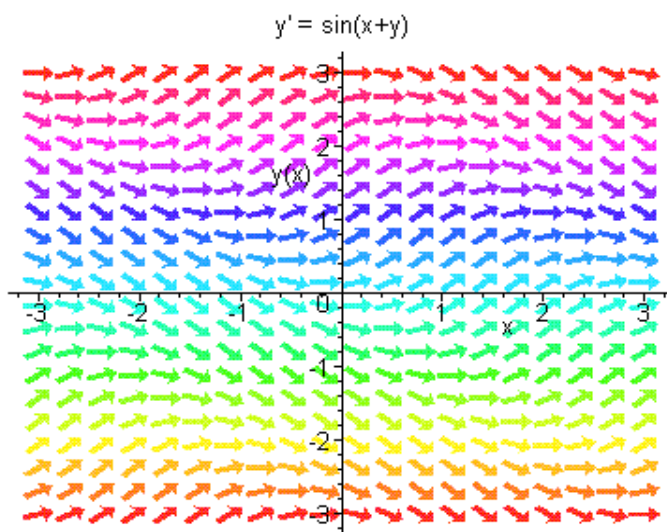
$$d\sigma = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} = u\sqrt{2}.$$

Hmotnost skořepiny je tedy rovna

$$m = \int_{\sigma} \gamma d\sigma = k \int_{\sigma} z d\sigma = k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u \cdot \frac{1}{2} u^2 du = k\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4} k\pi.$$

Kontrolní příklady ke kapitole 3.5

Příklad 3.1 Pravá strana rovnice je definovaná a spojitá na oblasti E_2 . Směrové pole přiřazuje každému bodu $[x, y] \in E_2$ vektor $(1, \sin(x+y))$. To znamená:



Příklad 3.2 Derivováním první rovnice podle x dostaneme:

$$\frac{1}{1 + \frac{u^2}{x^2}} \cdot \frac{xu' - u}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x + uu')}{\sqrt{x^2 + u^2}} = 0, x \neq 0.$$

Po úpravě je

$$\frac{u'(x-u) - (u+x)}{x^2 + u^2} = 0$$

a odtud $u' = \frac{x+u}{x-u}$.

Diferenciální rovnici můžeme upravit na tvar

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y \neq x.$$

Funkce u tedy vyhovuje zadané diferenciální rovnici.

Příklad 3.3 Nejprve určíme všechna řešení diferenciální rovnice a z nich vybereme řešení splňující počáteční podmínku. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. To znamená, že všechna řešení u dostaneme integrací zadané rovnice. Dostaneme:

$$u(x) = \int \cos^2 x \, dx + C,$$

kde C je libovolná konstanta a $x \in \mathbb{R}$. Platí

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) \, dx$$

a tedy

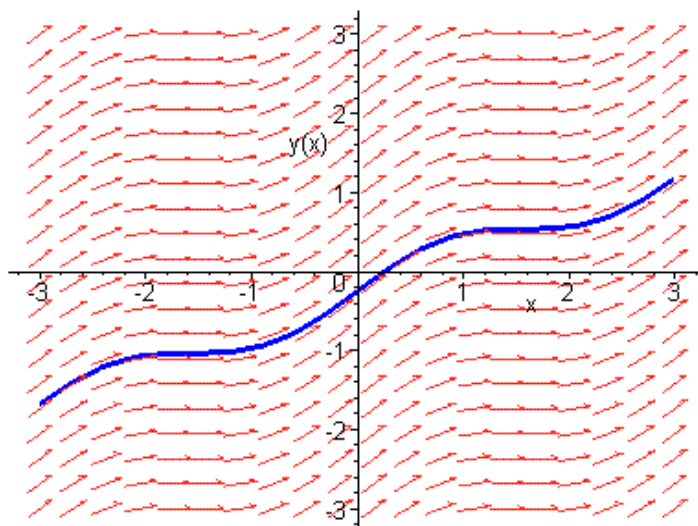
$$u(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aby byla splněna počáteční podmínka, musí platit

$$u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + C = \frac{\pi}{8}.$$

To znamená $C = -\frac{1}{4}$. Řešením dané Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$u(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) - \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Na obrázku je znázorněno směrové pole (červené šipky) a řešení $u(x)$ (modrá křivka).

Příklad 3.4 Jde o tzv. homogenní rovnici. Dělíme-li čitatele i jmenovatele dané rovnice výrazem x , dostaneme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1}.$$

Pomocí transformace $y = zx$, $y' = z'x + z$ převedeme tuto rovnici na rovnici

$$z'x + z = \frac{1+z}{z-1}$$

a po separaci proměnných dostaneme za předpokladu, že $1 + 2z - z^2 \neq 0$, $x \neq 0$, rovnici

$$\frac{1-z}{1+2z-z^2} dz = -\frac{dx}{x}.$$

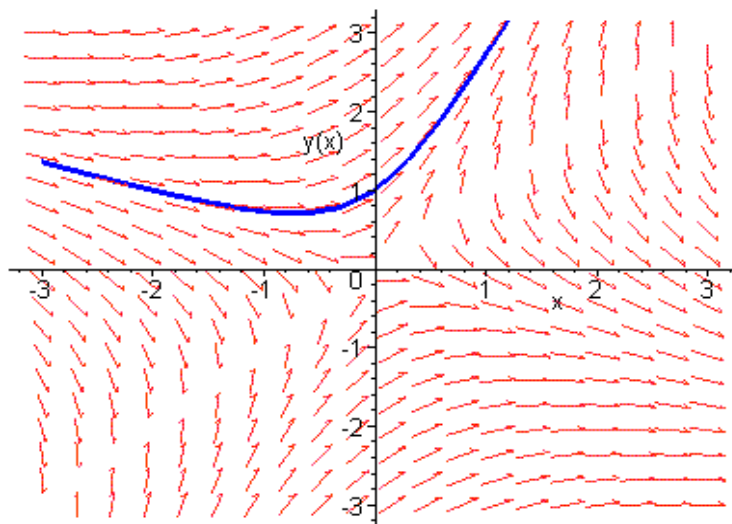
Integrací této rovnice dostaneme $\frac{1}{2} \ln|1+2z-z^2| + \ln|x| = \ln C$, kde C je kladná konstanta, neboli $x^2(1+2z-z^2) = C_1$, kde C_1 je libovolná nenulová konstanta.

Dosadíme-li $z = \frac{y}{x}$, dostaneme implicitní řešení $y(x)$ určené rovnicí

$$x^2 + 2xy - y^2 = C_1.$$

Připusťme navíc podmínku $y(0) = 1$. Ihned dostáváme jediné řešení

$$x^2 + 2xy - y^2 + 1 = 0.$$



Příklad 3.5 Jde o lineární rovnici. Nejprve nalezneme řešení homogenní rovnice

$$y' - 2xy = 0.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, tj.

$$\frac{dy}{y} = 2x dx.$$

Řešením je funkce

$$y(x) = Ce^{x^2}.$$

Řešení nehomogenní (zadané) rovnice najdeme metodou variace konstanty. Hledáme jej tedy ve tvaru $y(x) = C(x)e^{x^2}$. Derivováním podle x dostaneme

$$y'(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2}.$$

Dosazením do zadané rovnice máme

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

tj.

$$C'(x) = 2x$$

$$C(x) = x^2 + K,$$

kde K je libovolná reálná konstanta.

Řešením jsou tedy funkce

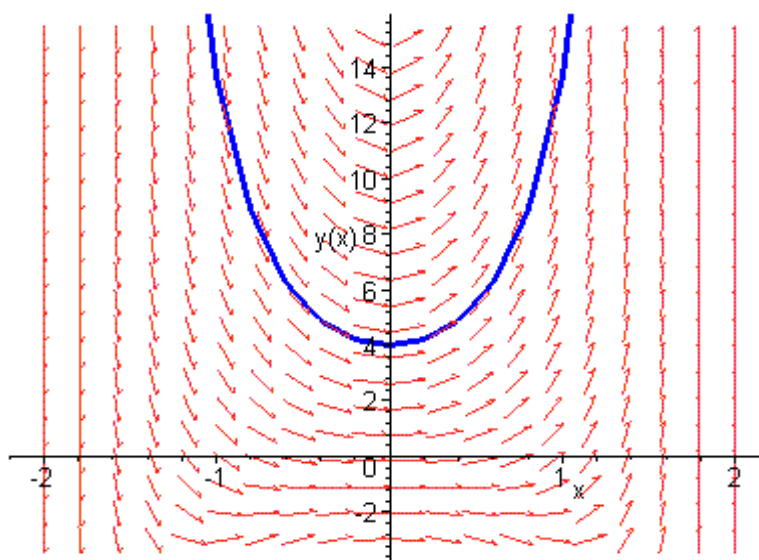
$$y(x) = (x^2 + K)e^{x^2}.$$

Z počáteční podmínky $y(0) = 4$ ihned dostaneme $K = 4$.

Hledané řešení má potom tvar

$$y(x) = (x^2 + 4)e^{x^2}.$$

Graf řešení (společně se směrovým polem rovnice) pak vypadá takto:



Příklad 3.6 Jde o rovnici typu $y' = f(ax + by + c)$. Zavedeme tedy substituci $u = x + y - 2$, tj. $u' = 1 + y'$, odkud máme $y' = u' - 1$. Po dosazení vyjde

$$u' - 1 = \frac{1}{u}, \text{ tj. } u' = \frac{1+u}{u}, \quad u \neq 0.$$

Tato rovnice má separované proměnné, takže postupně dostáváme

$$\frac{u}{1+u} du = dx, \quad u + 1 \neq 0,$$

a po integraci

$$\int \frac{u}{1+u} du = \int dx.$$

Dále

$$\int \frac{u}{1+u} du = \int \frac{u+1-1}{1+u} du = \int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = u - \ln|1+u|.$$

Tedy

$$u - \ln|1+u| = x + C$$

a po návratu k původní neznámé dostáváme

$$x + y - 2 - \ln|x + y - 2| = x + C.$$

Označíme-li $C + 2 = K$, vyjde

$$y - K = \ln|x + y - 1|$$

a po odlogaritmování a přeznačení $e^{-K} = L$ máme

$$e^y L = x + y - 1.$$

Vyloučili jsme případ $u + 1 = 0$. Ovšem $u = -1$ je také řešením a tedy pro původní neznámou dostáváme

$$x + y - 2 = -1, \text{ tj. } y = 1 - x,$$

což je, jak se snadno přesvědčíme, rovněž řešení, které je zahrnuto v předchozím vzorci pro $L = 0$. Obecné řešení (v implicitním tvaru) je tedy

$$Le^y = x + y - 1, L \in R.$$

Příklad 3.7 Zřejmě musí být $y \neq 0$. Tím nám z celé roviny zůstanou dvě otevřené poloroviny $y > 0$ a $y < 0$, které jsou očividně jednoduše souvislé; rovnici uvažujeme v každé polorovině zvlášť. Ověříme nyní, že jde o tzv. exaktní rovnici.

Máme

$$P(x, y) = \frac{1}{y} + 2x \Rightarrow P_y = -\frac{1}{y^2},$$

$$Q(x, y) = -\frac{x}{y^2} - 1 \Rightarrow Q_x = -\frac{1}{y^2}.$$

Protože $P_y = Q_x$, je rovnice exaktní. Nyní určíme tzv. kmenovou funkci $F(x, y)$.

Musí platit:

$$F_x = \frac{1}{y} + 2x$$

$$F_y = -\frac{x}{y^2} - 1$$

Z první rovnice dostaneme postupně

$$F(x, y) = \int \left(\frac{1}{y} + 2x \right) dx = \frac{x}{y} + x^2 + C(y).$$

Tedy z dílčího výsledku vychází

$$F_y = -\frac{x}{y^2} + C'(y)$$

a po dosazení do druhé podmínky na funkci F dostáváme

$$-\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} - 1 \Rightarrow C'(y) = -1 \Rightarrow C(y) = -\int dy = -y,$$

kde v posledním integrálu jsme volili nulovou integrační konstantu. Celkově je

$$F(x, y) = \frac{x}{y} + x^2 - y$$

a obecné řešení naší rovnice má tvar

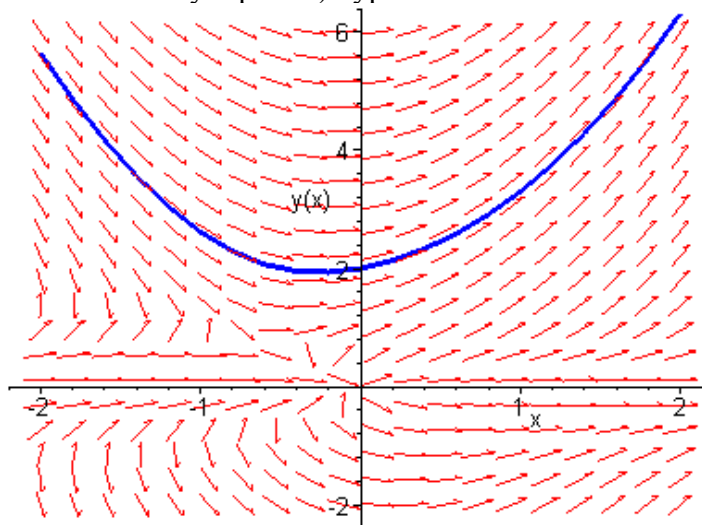
$$\frac{x}{y} + x^2 - y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínka $y(0) = 2$ ihned dává $c = -2$.

Hledané řešení má tedy tvar

$$\frac{x}{y} + x^2 - y + 2 = 0$$

a graficky (společně se směrovým polem) vypadá takto:



Příklad 3.8 I. Homogenní rovnice je

$$y''' + 2y'' + y' = 0,$$

charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$. Tudíž obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}.$$

II. K určení partikulárního řešení nehomogenní rovnice použijeme princip superpozice. Položme $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sin(x)$.

První část pravé strany $f_1(x) = x^2$ je typu $f(x) = P_n(x)$, kde $n = 2$. Protože navíc má charakteristická rovnice jednoduchý kořen 0, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1(x) = x^1(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Odtud

$$y_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y_1'' = 6ax + 2b \Rightarrow y_1''' = 6a$$

a po dosazení máme

$$6a + 12ax + 4b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2,$$

tj.

$$3ax^2 + (12a + 2b)x + 6a + 4b + c = x^2.$$

Porovnáním koeficientů vyjde

$$x^2: 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$x^1: 12a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$x^0: 6a + 4b + c = 0 \Rightarrow c = 6.$$

Partikulární řešení je

$$y_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x.$$

Druhá část pravé strany $f_2(x) = \sin(x)$ je typu

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

kde $P(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 1$, $n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Protože navíc číslo $0 + 1i = i$ není kořenem charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_2(x) = x^0(a \cos x + b \sin x) = a \cos x + b \sin x.$$

Odtud

$$y_2'(x) = -a \sin x + b \cos x \Rightarrow y_2'' = -a \cos x - b \sin x \Rightarrow y_2''' = a \sin x - b \cos x$$

a po dosazení vyjde

$$a \sin x - b \cos x - 2a \cos x - 2b \sin x - a \sin x + b \cos x = \sin x,$$

tj.

$$-2a \cos x - 2b \sin x = \sin x.$$

Porovnáním vyjde:

$$\cos x: -2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\sin x: -2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

Partikulární řešení je

$$y_2(x) = -\frac{1}{2} \sin x.$$

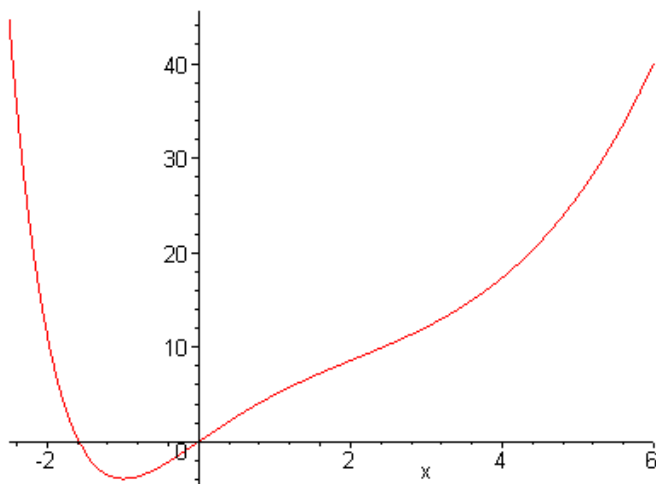
Partikulární řešení celé naší rovnice je pak

$$y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2} \sin x$$

a obecné řešení je

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2} \sin x.$$

Například pro $c_1 = 4$, $c_2 = -4$, $c_3 = -4$ vypadá řešení takto:



Příklad 3.9 Eulerova metoda pro numerické řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ má pro ekvidistantní uzly $(x_{i+1} - x_i = h, \forall i)$ tvar

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

V našem případě to znamená

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = 2 \\ x_1 = 2 & y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 1 \cdot 2 = 4 \\ x_2 = 3 & y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 4 + 2 \cdot 2 = 8 \\ x_3 = 4 & y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 8 + 2 \cdot 3 = 14 \\ x_4 = 5 & y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 14 + 2 \cdot 4 = 22. \end{array}$$

Příklad 3.10 Nejprve je třeba určit vlastní čísla matice systému $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešíme tedy

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Nyní nalezneme vlastní vektory příslušné k vlastním číslům:

$$\lambda_1 = 2 \quad :$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 2 & -2 \\ 1 & 1 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením je vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektory \vec{v}_1 a \vec{v}_2 jsou lineárně nezávislé, řešením daného systému je tudíž vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}.$$

Seznam použité literatury

- [1] Abramowitz M., Stegun I.A.: Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, 1964 (též ruský překlad z roku 1979).
- [2] Čermák J., Ženíšek A.: Matematika III. Skriptum VUT v Brně, 2001.
- [3] Diblík J., Baštinec J.: Matematika III. Skriptum VUT v Brně, 1991.
- [4] Ditkin V.A., Kuzněcov P.T.: Příručka operátorového počtu. NČSAV Praha 1954.
- [5] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 3. Alfa Bratislava 1971.
- [6] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 4. Alfa Bratislava 1972.
- [7] Erdelyi A et al.: Tables of Integral Transforms. McGraw-Hill, New York 1954.
- [8] Frank L.: Matematika. SNTL Praha, 1973.
- [9] Hlávka J., Klátil J., Kubík S.: Komplexní proměnná v elektrotechnice. SNTL Praha 1990.
- [10] Horová I.: Numerické metody. Skriptum MU v Brně, 1999.
- [11] Jirásek F., Čipera S., Vacek M.: Sbíрка řešených příkladů z matematiky II. SNTL Praha, 1989.
- [12] Jirásek F., Benda J., Čipera S., Vacek M.: Sbíрка řešených příkladů z matematiky III. SNTL Praha, 1989.
- [13] Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Skriptum MU Brno, 1995.
- [14] Kamke E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. AVG Leipzig, 1961 (též rusky Nauka Moskva, 1965).
- [15] Kuben J.: Obyčejné diferenciální rovnice. Skriptum VA v Brně, 1991.
- [16] Kurzweil J.: Obyčejné diferenciální rovnice. SNTL Praha, 1978.
- [17] Lavrentěv M.A., Šabat B.V.: Metody teorii funkcij komplexnogo peremennogo. Izdatel'stvo F-M literatury Moskva, 1958 (rusky).
- [18] Mayer D.: Úvod do teorie obvodů. SNTL Praha 1978.
- [19] Moon P., Spenser D.E.: Teoria pola. Państwowe wydawnictwo naukowe Warszawa, 1966 (polsky).
- [20] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J.: Úvod do numerické matematiky. SNTL Praha 1976.
- [21] Přikryl P.: Numerické metody matematické analýzy. SNTL Praha, 1985.
- [22] Pták P.: Calculus II, A Course for Engineers. Skriptum ČVUT Praha, 1997.
- [23] Rektorys K.: Přehled užití matematiky. SNTL Praha 1963.
- [24] Škrášek J., Tichý Z.: Základy aplikované matematiky II. SNTL Praha 1986.
- [25] Šulista M.: Základy analýzy v komplexním oboru. SNTL Praha, 1981.
- [26] Valsa J., Dědek L., Čermák P.: Teoretická elektrotechnika II. Skriptum VUT v Brně, 1991.
- [27] Veit J.: Integrální transformace. SNTL Praha, 1979.

[28] Vitásek E.: Numerické metody. SNTL Praha, 1987.