# VOLNÉ KROUCENÍ

Jednoduché řešení úlohy ***prostého kroucení*** lze získat v případě namáhání přímého prutu rotačně symetrického průřezu (kruhový, mezikruhový), který je namáhán pouze kroutícím momentem $M_x$.

Pro ***prosté kroucení*** platí následující vztahy

$$N = 0 \qquad V_y = 0 \qquad V_z = 0 \qquad M_x \neq 0 \qquad M_y = 0 \qquad M_z = 0\,.$$

Při výpočtu napjatosti a deformace v případě prostého kroucení se vychází z následujících předpokladů:

1. ***střednice prutu před i po deformaci zůstává přímá,***
2. ***průřezy prutu zůstávají rovinné i po deformaci a vzájemně se od sebe nevzdálí,***
3. ***jednotlivé průřezy se otáčejí jako tuhé celky tzn. nedochází ke zkřivení průvodičů.***

## Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

Při platnosti výše uvedených předpokladů nevznikají v průřezech prutu poměrné osové deformace $\varepsilon_x$ resp. normálová napětí $\sigma_x$ ($\varepsilon_x = 0$; $\sigma_x = 0$). Ze třetího předpokladu lze určit velikost zkosení libovolného úseku délky ***dx*** resp. úseku mezi body ***AB*** ležícího na podélném vláknu ve vzdálenosti $\rho$ od střednice (úsek ***dx*** leží uvnitř prutu ne na jeho povrchu). Při pootočení průřezu ***x*** o obecný úhel $\varphi_x$ se průřez ***x+dx*** pootočí o úhel $\varphi_x + d\varphi_x$ resp. body ***A*** a ***B*** se posunou do nových poloh ***A'*** a ***B'***, a tak dojde ke zkosení původně pravoúhlého prvku ***ABCD***. Velikost zkosení lze vyjádřit pomocí poměrného úhlu zkroucení $\theta$ ve tvaru

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi_x}{dx} = \rho\theta\,, \qquad \theta = \frac{d\varphi_x}{dx}\,.$$

Dosazením zkosení do Hookeova zákona ve smyku lze určit smykové napětí $\tau$. Toto napětí má vždy směr kolmý k průvodiči *tj. směr odpovídá rovině zkosení*.

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta$$

Ke stanovení poměrného úhlu zkroucení $\theta$ je možné použít podmínku statické ekvivalence, kde $I_p$ je polární moment setrvačnosti ke středu kruhu resp. $I_t$ je moment tuhosti v kroucení, který je v případě kruhového průřezu totožný s polárním momentem setrvačnosti ($I_t = I_p$).

(*) $$M_x = \int_O \rho\tau dA = \int_O \rho(G\rho\theta)dA = G\theta\int_O \rho^2 dA = G\theta I_p\,, \qquad \theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_x}{GI_t}\,.$$

Po dosazení vztahu pro výpočet poměrného úhlu zkroucení $\theta$ do vztahu pro výpočet smykového napětí se získá vztah, který vyjadřuje úměrnost smykového napětí vzdálenosti od středu kruhu. Potom platí, že maximální smykové napětí je na okraji průřezu.

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho\,, \qquad \tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p}r$$

Deformaci krouceného prutu tj. pootočení průřezu $\varphi_x$ v obecném místě prutu lze získat integrací podmínku statické ekvivalence (*) pro výpočet poměrného úhlu zkroucení $\theta$, která je **diferenciální rovnicí kroucení přímého prutu**

$$\varphi_x = \int \frac{M_x}{GI_t} dx + C \, .$$

Neznámou integrační konstantu $C$ lze určit z podmínky uložení, kde pootočení musí být nulové. Má-li počátek prutu $x$-ovou souřadnici rovnou nule, potom konstanta $C$ je také rovna nule.

Deformaci krouceného prutu $\varphi_x$ v obecném místě prutu lze pro základní případ přímého prutu stálého průřezu ($I_t = konst.$) zatíženého koncovým kroutícím momentem určit pomocí vztahu

$$\varphi_x(x) = \int \frac{M_x}{GI_t} dx = \frac{M_x}{GI_t} \int x dx = \frac{M_x}{GI_t} x$$

Vzájemné pootočení koncových průřezů (úhel zkroucení) se zjistí dosazením $x = l$

$$\varphi_l = \frac{M_x l}{GI_t} \, .$$

Vztah pro výpočet úhlu zkroucení lze pokládat za **Hookeův zákon pro základní případ kroucení prutu**. Je-li prut složen z několika úseků, ve kterých je konstantní: kroutící moment $M_{xi}$, moment tuhosti v kroucení $I_{ti}$ a modul pružnosti ve smyku $G_i$, pak lze vzájemné pootočení konců prutu definovat pomocí délek příslušných úseků $l_i$ ve tvaru

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xi} l_i}{G_i I_{ti}}$$

## Kroucení prutů obecného průřezu

Vztahy odvozené pro kroucení kruhového popř. mezikruhového průřezu neplatí pro případy kroucení obecných průřezů, protože neplatí předpoklad o zachování rovinnosti průřezů – dochází k jejich ***deplanaci*** tj. ***porušení rovinnosti***. Z hlediska bránění deplanaci průřezu lze rozdělit kroucení na:

- ***kroucení volné***: deplanaci průřezů není zabráněno, normálová napětí $\sigma_x = 0$,
- ***kroucení vázané***: deplanaci průřezů je zabráněno, normálová napětí $\sigma_x \neq 0$.

### Volné kroucení

Řešení volného kroucení vychází z předpokladů:

1. ***příčný tvar průřezů se nemění,***
2. ***každý průřez se otáčí okolo střednice prutu jako tuhý celek,***
3. ***z důvodu nezabránění deplanace nevznikají v průřezu normálová napětí,***
4. ***deplanace je shodná ve všech průřezech prutu.***

Při odvozování se vychází z rovnic prostorové napjatosti tělesa. Odvození vede ke stanovení ***Prandlovy funkce napětí F(y,z)***, která má na okraji průřezů nulovou hodnotu. Pomocí této funkce lze vyjádřit složky smykových napětí

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} \, , \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \, .$$

Prandlova funkce napětí ***F(y,z)*** představuje plochu, která je umístěna nad průřezem. Sklon této plochy v libovolném místě udává velikost smykových napětí v kolmém směru. Vlastní tvar plochy lze získat experimentálně nebo pomocí numerických metod (MKP). Vrstevnice této plochy se nazývají ***smykovými čárami***. Mezi dvěma sousedními čarami je ***smykový tok*** (tj. výsledná smyková síla na jednotku délky) konstantní.

Pomocí Prandlovy funkce napětí ***F(y,z)*** lze stanovit moment tuhosti v kroucení $I_t$ tj. objem vrchlíku popř. průřezový modul v kroucení $W_t$ pomocí kterého lze určit extrémní smykové napětí v průřezu

$$I_t = \frac{2}{G\theta}\int_O F(y,z)dA, \qquad \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t}.$$

## Volné kroucení prutů tenkostěnných otevřených průřezů

Tenkostěnné průřezy jsou průřezy, jejichž tloušťka $t$ (stojiny $t_w$, pásnice $t_f$) vzhledem k ostatním rozměrům průřezu je značně menší → $t, t_w, t_f \ll b, h$. (V literatuře se uvádí limitní poměr 1:10.) Při výpočtu tenkostěnných otevřených průřezů se předpokládá, že se příčný řez skládá z konečného počtu obdélníkových částí. Moment tuhosti v kroucení $I_t$ a průřezový modul v kroucení $W_t$ lze vyjádřit ve tvaru

$$I_t = \frac{1}{3}t^3 h, \qquad W_t = \frac{1}{3}t^2 h = \frac{I_t}{t}.$$

Moment tuhosti v kroucení $I_t$ lze také vyjádřit ve tvaru

$$I_t = \eta\sum_{i=1}^{n} I_{ti} = \frac{\eta}{3}\sum_{i=1}^{n} t_i^3 h_i,$$

kde $n$ je počet dílčích obdélníků, na které lze průřez rozdělit a $\eta$ je korekční součinitel charakterizující vliv skutečného poměru $t/h$, zaoblení průřezů v místě styku stojiny s pásnicí atd.

K nalezení extrémní hodnoty smykového napětí lze použít průřezový modul v kroucení $W_t$. Extrémní napětí vznikne v části, která má největší tlošťku resp. průřezový modul v kroucení je minimální.

$$W_t = W_{t,\min} = \frac{I_t}{t_{\min}}$$

## Volné kroucení prutů tenkostěnných uzavřených průřezů

Rozložení smykových napětí u tenkostěnných uzavřených průřezů je značně odlišné od rozložení v případě tenkostěnných otevřených průřezů. Je-li tloušťka stěn $t$ uzavřených průřezů malá, ve srovnání s ostatními rozměry, lze předpokládat konstantní rozdělení napětí po tloušťce stěn. Směr působení smykových napětí je tečný k obrysu průřezů.

Výslednice smykových napětí v libovolném řezu tzv. ***smykový tok Q*** je konstantní podél střednice uzavřeného tenkostěnného průřezu. Hodnotu smykového toku $Q$ lze určit z podmínky rovnováhy

$$\tau_2 t_2 dx - \tau_1 t_1 dx = 0, \qquad Q = \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_{xs}(s)\cdot t(s) = konst.$$

Mezi kroutícím momentem $\boldsymbol{M_x}$ a smykovým tokem $\boldsymbol{Q}$ existuje vztah, který lze získat integrací momentových silových účinků podél uzavřené střednice průřezu.

$$M_x = \oint_s dM_x = \oint_s Qrds = Qr\oint_s ds = Q \cdot 2A_k$$

Ve vztahu je $\boldsymbol{r}$ kolmá vzdálenost těžiště a tečny ke střednici v libovolném bodě a $\boldsymbol{A_k}$ je plocha průřezu ohraničená střednicí průřezu. Pomocí plochy $\boldsymbol{A_k}$ lze vztah pro výpočet smykového napětí vyjádřit ve tvaru

$$\tau_{xs} = \tau_{xs}(s) = \frac{Q}{t(s)} = \frac{Q}{2A_k t(s)}.$$

Z rovnice vyplývá, že maximální smykové napětí vznikne v průřezu s minimální tloušťkou $\boldsymbol{t(s)} = \boldsymbol{t_{min}}$. Potom lze průřezový modul v kroucení uzavřeného průřezu $\boldsymbol{W_t}$ zapsat ve tvaru:

$$W_t = 2A_k t_{\min} \quad \text{… první Bredtův vzorec.}$$

Moment setrvačnosti průřezu v kroucení $\boldsymbol{I_t}$ (Bredtova tuhost v kroucení) lze odvodit pomocí posunů bodů ležících na střednici průřezu a má tvar

$$I_t = \frac{M_x}{G\theta} = \frac{4A_k^2}{\oint_s \frac{ds}{t(s)}} \quad \text{… druhý Bredtův vzorec.}$$

Při výpočtech se velmi často používá upravený vztah, ve kterém se integrál po křivce $\boldsymbol{s}$ nahrazuje součtem podílů délek resp. výšek obdélníků $\boldsymbol{h_i}$ na které je příčný řez rozdělen a jejich tlouštěk $\boldsymbol{t_i}$.

$$I_t = \frac{M_x}{G\theta} = \frac{4A_k^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{t_i}}.$$

# VZPĚRNÁ PEVNOST A STABILITA TLAČENÝCH PRUTŮ

## Eulerovo řešení stability ideálního přímého pružného prutu

K *selhání štíhlých přímých prutů namáhaných tlakem* dochází ve většině případů *vybočením z původního přímého tvaru* (dochází k ohybu). V takových případech se nejedná o prostý tlak, ale o ***vzpěrný tlak*** a odolnost proti vybočení se označuje jako ***vzpěrná pevnost***.

Vzpěrný tlak je ovlivněn řadou faktorů např. materiálových, geometrických, silových, počáteční napjatosti apod. Nejjednodušším modelem pro analýzu vzpěrného tlaku je ***ideální pružný přímý prut*** dokonale centricky zatížený. V tomto případě se jedná o problém ***ztráty stability prutu*** při dosažení kritické hodnoty tlakové síly.

Pojem stability lze dokumentovat na příkladu kuličky v prohlubni. Mohou nastat tři případy:

1. Kulička se po vychýlení vrátí do původní polohy, je tedy ve ***stabilním stavu rovnováhy***.
2. Kulička se po vychýlení nevrátí do původní polohy, nachází se ve vrcholové poloze a při nepatrném vychýlení pokračuje v pohybu déle. Zde se jedná o ***nestabilní stav rovnováhy***.
3. Mezi stabilní a nestabilním stavem existuje tzv. ***indiferentní stav rovnováhy***, při kterém je rovnováha možná jak v původním, tak i v soumezném vychýleném stavu.

Potom lze ***stabilitu*** definovat jako ***schopnost nepatrně vychýlené soustavy z počátečního tvaru vracet se do původního stavu, jakmile pomine příčina, která vychýlení vyvolala***.

Otázku stability tlačeného ideálního prutu lze formulovat: K prutu osově tlačenému silou $F$ je přiložena příčná síla $Q$ (vlivem příčné síly dojde k vychýlení prutu) a po působení je síla odstraněna. ***Stav*** se označí za ***stabilní***, jestliže se prut po pominutí dočasného impulsu vrátí do původního stavu (opět se napřímí). ***Stav*** se označí za ***nestabilní***, jestliže dochází k dalšímu samovolnému nárůstu deformací prutu. Mezilehlý stav tzv. ***indiferentní stav*** nastane tehdy, když po odstranění příčné síly $Q$ zůstane prut deformován, ale deformace nadále neprobíhají. Tomuto případu odpovídá ***kritická síly*** $F_{cr}$.

Při výpočtu kritické síly $F_{cr}$ lze vycházet z energetických metod popř. lze použít „klasický" postup odvození podle *Eulera* 1744, který vychází z diferenciální rovnice ohybové čáry. Tento postup lze doplnit o *teorii II.* řádu, při které se statické účinky vyšetřují na deformovaném prutu (dojde tak k zahrnutí vlivu ohybových momentů vyvolaných tlakovou silou působící na rameni, které je závislé na velikosti průhybu do výpočtu). I v tomto případě se předpokládá, že deformace jsou velmi malé. V důsledku použití teorie II. řádu dochází ke geometrické nelinearizaci úlohy, čímž se omezuje použití principu superpozice.

### Příklad oboustranně kloubově podepřeného prutu

V případě oboustranně kloubově připojeného centricky zatíženého prutu tlakovou silou lze z momentových podmínek určit jak vodorovné podporové reakce $H$ (nulové; $H = 0$), tak také ohybový moment v obecném průřezu, počítaný podle *teorie II. řádu* na deformovaném prutu.

$$M = M(x) = Fw$$

Po dosazení rovnice pro výpočet ohybového momentu v obecném průřezu do diferenciální rovnice ohybové čáry druhého řádu, substituci a úpravě lze psát

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y} = -\frac{F}{EI_y} w \quad \rightarrow \quad \text{(sub): } \alpha^2 = \frac{F}{EI_y} \quad \rightarrow w'' + \alpha^2 w = 0 \rightarrow$$

Obecné řešení rovnice musí splňovat okrajové podmínky – průhyb ***w*** v ***x = 0 = l*** musí být roven nule. Toto řešení lze zapsat ve tvaru

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad \rightarrow \quad C_2 = 0\,, \quad C_1 \sin \alpha l = 0\,.$$

Konstanta $C_2$ je apriory rovna nule. Pokud konstanta $C_1$ je rovna nule, znamená to, že prut je přímý ***w(x) = 0***. Aby byly průhyby nenulové musí platit $\sin \alpha l = 0$ což je splněno v případě (*) $\alpha l = k\pi$ pro $k = 1,2,3...$

Dosazením vztahu (*) do upravené rovnice ohybové čáry a substituce (sub) lze zapsat rovnici ohybové čáry ***w(x)*** a kritické síly $F_{cr,k}$ ve tvaru

$$w = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l}\,, \qquad F_{cr,k} = F_k = k^2 \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}\,.$$

V výše popsaného způsobu řešení je zřejmé, že prut může vybočit ve tvaru sinusovky. Význam má nejnižší hodnota (***k = 1***), která se nazývá ***Eulerova kritická síla*** $F_{cr}$ při níž prut vybočí ve tvaru jedné sinusové půlvlny. Pomocí této síly lze určit stav rovnováhy:

- ***F < Fcr … stav stabilní*** – prut zůstává přímý,
- ***F > Fcr … stav nestabilní***,
- ***F = Fcr … stav indiferentní*** – prut zůstává přímý (bod ***R***) popř. se může prohnout o libovolnou hodnotu (bod ***V***).

*Úloha stanovení kritické síly představuje z matematického hlediska problém vlastních čísel: pro homogenní diferenciální rovnici je nutné určit její koeficient $\alpha^2$ tak, aby existovalo netriviální, tj nenulové řešení. To vede na podmínku nulového determinantu soustavy okrajových podmínek.*

## Eulerovy předpoklady, kritická síla, kritická délka, kritické napětí, štíhlost prutu

Obecně lze kritickou sílu $F_{cr}$ pružného prutu stálého průřezu vyjádřit pomocí tzv. ***vzpěrné*** (volné, kritické) ***délky*** $L_{cr}$, kterou se převádí všechny způsoby uložení prutu na základní případ tj. oboustranné kloubové uložení, ve tvaru

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2}\,, \qquad L_{cr} = \beta l\,.$$

***Vzpěrná délka*** $L_{cr}$ je délka kloubově uloženého prutu stejné ohybové tuhosti $EI_y$, který ztratí stabilitu při působení stejné kritické síly $F_{cr}$. Vzpěrná délka $L_{cr}$ je rovna délce půlvlny sinusové křivky ohybové čáry po vybočení prutu. Vyjadřuje tedy vzdálenost ***inflexních bodů***.

Pomocí kritické síly $F_{cr}$ lze určit kritické napětí $\sigma_{cr}$. Jedná se o tlakové napětí vyvolané působením kritické síly v okamžiku těsně před vybočením prutu.

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{AL_{cr}^2} = \pi^2 E \frac{i^2}{L_{cr}^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}\,, \qquad \lambda = \frac{L_{cr}}{i}\,.$$

Součinitel $\lambda$ vyjadřuje tzv. ***štíhlost*** (štíhlostní poměr) ***prutu***. Štíhlost prutu vyjadřuje geometrické parametry prutu a způsob jeho podepření. Je dána poměrem kritické délky $L_{cr}$ a poloměru setrvačnosti ***i*** k některé z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu ($i_y$, $i_z$).

+++ ***Informativní témata*** +++

# Pevnostní pojetí vzpěru, posouzení prutů na vzpěr

K posouzení spolehlivosti tlačených štíhlých prutů lze použít:

- ***stabilitní pojetí vzpěru***: vychází z řešení stability *ideálního* tj. přímého, centricky zatíženého *prutu*
- ***pevnostní pojetí vzpěru***: vychází se z modelu *reálného prutu*, u kterého se předpokládají imperfekce (nedokonalosti), např. zakřivení nebo vychýlení, nahodilé excetricity v působení tlakových sil atd. Tyto imperfekce se zavedou do výpočtu a respektují se přitom účinky podle teorie II. řádu.

## Ocelové konstrukce

Postup stanovení vzpěrné pevnosti u ocelových konstrukcí:

1. nahrazení předpokládaných imperfekcí jedinou ekvivalentní imperfekcí tj. výchylkou počátečně zakřiveného prutu,
2. určení konečné hodnoty celkové výchylky ovlivněnou tlakovou silou,
3. uvažování hodnoty napětí v extrémně tlačených vláknech rovné mezi kluzu.

Potom lze maximální napětí vyjádřit ve tvaru *(normálová tlaková síla se uvažuje kladně)*

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{A} + \frac{F\sigma}{W} = \frac{F}{A} + \frac{F\delta_0}{(1 - F/F_{cr})W} = f_y .$$

Vyjádřením napětí $\boldsymbol{\sigma = F/A}$ se získají křivky znázorněné čárkovaně na obrázku. Při pevnostním pojetí jsou u středních štíhlostí rozhodující napětí $\boldsymbol{F/A}$ vždy nižší než kritická napětí odpovídající stabilitnímu pojetí; při vyšších hodnotách štíhlostí se odpovídající velikosti napětí sbližují.

Vydělením hodnot vzpěrné pevnosti mezí kluzu vzniknou bezrozměrná čísla, která klesají od jedničky při zvětšující se štíhlosti. Jedná se o ***součinitele vzpěrnosti*** $\boldsymbol{\chi}$, které vyjadřují snížení přípustného napětí vzhledem k účinkům II. řádu. Pro běžné profily používané ve stavební praxi lze vyjádřit vzpěrnou únosnost centricky tlačeného prutu vztahem

$$N_{Rd} = \chi A f_d = \chi \frac{A f_y}{\gamma_M} .$$

Posouzení na mezní stav únosnosti spočívá v tom porovnání hodnoty výpočtová normálová síla $\boldsymbol{N_{Sd}}$, která v prutu vznikne a normálové síly na mezi vzpěrné únosnosti $\boldsymbol{N_{Rd}}$.

$$N_{Sd} \le N_{Rd}$$

Vlastní postup posouzení ocelového prutu lze shrnout do následujících bodů:

1. určení geometrických charakteristik průřezu ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I_y}$, $\boldsymbol{I_z}$, $\boldsymbol{i_y}$, $\boldsymbol{i_z}$),
2. stanovení vzpěrné délky podle způsobu uložení (*v obou rovinách uložení může být rozdílná*),
3. určení štíhlosti v obou rovinách a určení rozhodující z obou štíhlostí tj. větší štíhlost,
4. stanovení součinitele vzpěrnosti $\chi$,
5. posouzení $\boldsymbol{N_{Sd} \le N_{Rd}}$.

## Dřevěné konstrukce

Postup posouzení dřevěných tlačených prutů na vzpěr je obdobný jako v případě ocelových prutů. Součinitele vzpěrnosti se určují podle normy a jsou dány rovnicemi

$$\lambda \leq 75 : \varphi = 1 - 0{,}8\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2, \qquad \lambda > 75 : \varphi = \frac{3100}{\lambda^2}.$$

U dřevěných konstrukcí je nutné respektovat poddajnost spojů –s plným vetknutím nelze počítat, což ovlivňuje vzpěrné délky:

- oboustranně vetknutý prut $\beta$ ***= 0,60 + 0,70*** místo ***0,50***,
- jednostranně vetknutý prut $\beta$ ***= 0, 75 + 0,90*** místo ***0,70***.

## Betonové konstrukce

Při posuzování betonových konstrukcí se nepoužívají vzpěrnostní součinitele. Imperfekce tlačených prvků se do výpočtů zavádí pomocí nahodilé výstřednosti s případnou opravou podle teorie II. řádu.