PROSTOROVÝ A ŠIKMÝ OHYB, MIMOSTŘEDNÝ TAH A TLAK

Složené případy namáhání prutu

Z hlediska působení složek vnitřních sil v průřezu prutu lze namáhání rozdělit na:

- ***základní*** *(prosté)*:
  - ***prostý tah a tlak*** – vzniká pouze při působení normálové síly ***N***,
  - ***prostý ohyb*** – vzniká pouze při působení ohybového momentu ***M***,
  - ***prostý smyk*** – vzniká pouze při působení posouvající síly ***V***,
  - ***prosté kroucení*** – vzniká pouze při působení kroutícího momentu $\boldsymbol{M_x}$,
- ***složené***: vzniknou vzájemnou kombinací základních případů namáhání.
  - ***prostorový a šikmý ohyb*** – vzniká při působení ohybových momentů ve dvou rovinách, *(zvláštním případem je rovinný ohyb, kdy působí pouze jeden ohybový moment)*
  - ***mimostředný tah a tlak*** – vzniká při vzájemném působení normálové síly a ohybového momentu v prostoru (*prostorový mimostředný tah a tlak*) nebo v rovině (*rovinný mimostředný tah a tlak*).

V případě ***fyzikálně a geometricky lineárního výpočtu*** tj. lineární závislosti mezi napětím a poměrnou deformací lze použít ***princip superpozice***. Pomocí tohoto principu lze složené případy namáhání rozložit na základní způsoby namáhání a jejich účinky následně skalárně popř. vektorově složit. V pružnoplastickém stavu a v případě výpočtů prováděných podle teorie II. řádu princip superpozice nelze použít.

Prostorový ohyb

Napětí a deformace

V přednášce č.11 bylo řečeno, že v případě prochází-li rovina zatížení spojnicí středů smyku ***A*** průřezů nejsou tyto průřezy krouceny resp. prut není kroucen. K objasnění pojmu prostorového a šikmého ohybu jsou v následujícím textu uvažovány průřezy, které mají střed smyku ***A*** totožný s těžištěm průřezu ***T***.

Prostorový ohyb vznikne tehdy, když vnější síly působící na prut prochází osou prutu, ale neleží v jedné hlavní rovině prutu, která je definovaná osou prutu a některou z hlavních os setrvačnosti průřezu. Jelikož vnější působící síly nezpůsobují osové složky jsou u prostorového ohybu normálové síly nulové.

Pro ***prostorový ohyb v rovině xz*** a ***xy*** platí

$$N = 0 \qquad V_y \neq 0 \qquad V_z \neq 0 \qquad M_x = 0 \qquad M_y \neq 0 \qquad M_z \neq 0\,.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že v případě prostorového ohybu jsou jedinými nulovými složkami vnitřních sil normálové síly *N* a kroutící momenty $\boldsymbol{M_x}$.

Při popsané způsobu namáhání prutu je normálové napětí $\boldsymbol{\sigma_x}$ vyvoláno v případě platnosti Hookeova zákona (tj. prut se nachází v pružném oboru) ohybovými momenty $\boldsymbol{M_y}$ a $\boldsymbol{M_z}$. Vlivem ohybového momentu $\boldsymbol{M_y}$ resp. $\boldsymbol{M_z}$ vznikne v průřezech prutu normálové napětí $\boldsymbol{\sigma_x(M_y)}$ resp. $\boldsymbol{\sigma_x(M_z)}$, které je lineárně rozloženo po výšce resp. šířce průřezu Jelikož složky napětí působí ve stejném směru souřadnicové osy $\boldsymbol{x}$, která je totožná s osou prutu, lze výsledné normálové napětí získat skalárním součtem dílčích složek $\boldsymbol{\sigma_x = \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z)}$.

$$\sigma_x(M_y) = \frac{M_y}{I_y} z \qquad \sigma_x(M_z) = -\frac{M_z}{I_z} y \qquad \sigma_x = \sigma_x(M_z) + \sigma_x(M_z) = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

Rovnici neutrální osy lze získat z podmínky $\boldsymbol{\sigma_x = 0}$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0$$

V případě prostorového ohybu prochází vždy neutrální osa těžištěm průřezu $\boldsymbol{T}$, tzn. $\boldsymbol{y = z = 0}$. Může však být odkloněna o úhel $\boldsymbol{\beta}$

$$\tan\beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = \tan\alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

V uvedené rovnici označuje úhel $\boldsymbol{\alpha}$ úhel výsledného vektoru ohybového momentu. Na rozdíl od rovinného ohybu není neutrální osa totožná s momentovou osou.

Průběh normálového napětí je v případě platnosti Hookeova zákona lineární po výšce kolmého průmětu průřezu do směru neutrální osy. V bodech, které jsou od neutrální osy shodně vzdáleny jsou normálová napětí stejná. Extrémní napětí (***max***, ***min***) vznikají v bodech, které jsou nejvíce vzdálené od neutrální osy resp. v bodech, kde se rovnoběžky s neutrální osou dotýkají obrysu průřezu.

Smyková napětí se při výpočtech určí odděleně pro ohyb v obou hlavních rovinách ***xz*** a ***xy***. Výsledné smykové napětí se následně zjistí vektorovým složením těchto smykových napětí.

Pomocí vektorového složení lze také stanovit výsledný prostorový průhyb $\boldsymbol{\delta}$, a to pomocí průhybu v rovině ***xy*** (***v***) a v rovině ***xz*** (***w***).

Šikmý ohyb

Napětí a deformace

Zvláštním případem prostorového ohybu je ***šikmý ohyb***. Při tomto způsobu namáhání prutů působí zatížení v jedné rovině, která však není jednou z hlavní rovin a svírá s těžištní osou ***z*** obecný úhel $\boldsymbol{\alpha}$. Při výpočtu se postupuje tak, že se určí výsledné ohybové momenty ***M*** resp. posouvajících sil ***V***, které se následně rozloží do směrů hlavních os. Další postup výpočtu je potom shodný s postupem v případě prostorového ohybu.

ohybové momenty … $M_y = M\cos\alpha \qquad M_z = M\sin\alpha$

posouvající síly … $V_y = F\sin\alpha \qquad V_z = F\cos\alpha$

Ohybová čára je v případě šikmého ohybu rovinnou křivkou, která neleží v rovině zatížení, ale v rovině kolmé na neutrální osu.

Dimenzování prutu namáhaného šikmým a prostorovým ohybem

Posouzení prutu namáhaného prostorovým nebo šikmým ohybem v pružném oboru tj. za platnosti Hookeova zákona spočívá v porovnání vypočtených napětí s dovolenými napětími ($\boldsymbol{R_d}$, $\boldsymbol{f_y}$, $\boldsymbol{\sigma_{dov}}$ atd.). *(Při výpočtech se pracuje s výpočtovými hodnotami.)*

$$\left|\sigma_x\right|_{\max} \leq R_d \qquad \left|\sigma_x\right|_{\max} \leq f_y \qquad \left|\sigma_x\right|_{\max} \leq \sigma_{dov}$$

Uvedené podmínky spolehlivosti lze také vyjádřit ve pomocí výpočtových hodnot ohybových momentů $\boldsymbol{M_{Sy}}$ a $\boldsymbol{M_{Sz}}$ získaných řešením nosníku pro dané zatížení $\boldsymbol{M_{Ry}}$, $\boldsymbol{M_{Rz}}$ momentové únosnosti průřezu.

$$\frac{M_{Sy}}{f_d W_y} + \frac{M_{Sz}}{f_d W_z} = \frac{M_{Sy}}{M_{Ry}} + \frac{M_{Sz}}{R_{Rz}} \leq 1$$

Mimostředný tah / tlak

Mimostředný tah** / **tlak je složeným namáháním a vzniká ***kombinací osového tahu / tlaku*** a ***ohybu (rovinného, prostorového)***. Jedná se o namáhání, při kterém současně působí normálová síla N a alespoň jedna složka ohybového momentu (M_y, M_z). Při působení normálové síly N a ohybového momentu M_y popř. M_z resp. M_y a M_z se jedná o rovinný resp. prostorový mimostředný tah / tlak. Mimostředný tah / tlak může být vyvolán také příčným zatížením a podélně působícími silami. V takovém případě dochází také ke vzniku posouvajících sil a jedinou nulovou složkou vnitřních sil je kroutící moment M_x.

Pro ***prostorový mimostředný tah a tlak*** platí

$$N \neq 0 \qquad V_y \neq 0 \qquad V_z \neq 0 \qquad M_x = 0 \qquad M_y \neq 0 \qquad M_z \neq 0 \,.$$

Napětí, deformace

Jelikož mimostředný tah / tlak je v podstatě kombinací osového tahu / tlaku s obecně prostorovým ohybem lze výsledné normálové napětí σ_x určit v případě platnosti Hookeova zákona superpozicí účinků od prostého tahu / tlaku a prostorového ohybu.

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z) + \sigma_x(M_z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

Uvedený vztah představuje lineární závislost. Statické podmínky ekvivalence vnitřních sil v průřezu jsou splněny, protože tyto podmínky splňují dílčí složky sil.

Celkový účinek vnitřních sil v průřezu lze vyjádřit pomocí normálové síly N, která působí na průřez mimostředně (excentricky). Potom lze příslušné ohybové momenty zapsat pomocí excentricit ve směru osy y (e_y) a z (e_z) ve tvaru *(kladné hodnoty jsou podle směru souřadnicových os)*

$$M_y = N e_z \qquad\qquad M_z = -N e_y \,.$$

Mezi plochou průřezu A a momenty setrvačnosti k jednotlivým osám I_y a I_z existují vztahy vyjádřené poloměry setrvačnosti i_y a i_z.

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad\qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Dosazením vztahů pro výpočet ohybových momentů (M_y, M_z) a vztahů pro výpočet poloměrů setrvačnosti (***iy***, ***iz***) do základního vztahu pro výpočet normálového napětí σ_x se získá vztah, pomocí kterého lze určit rovnici neutrální osy ($\sigma_x = 0$).

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N}{A} + \frac{N e_z}{A i_y^2} z - \frac{(-N e_z)}{A i_z^2} y = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_z}{i_z^2} y\right)$$

$$\sigma_x = 0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad\qquad 1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_z}{i_z^2} y = 0$$

V případě mimostředného tahu resp. tlaku neprochází neutrální osa těžištěm průřezu T. Neutrální osa vytíná na těžištních osách úseky y_n a z_n. Tyto úseky je možné zjistit dosazením do rovnice neutrální osy $\boldsymbol{y = 0}$ resp. $\boldsymbol{z = 0}$. Při vyřešení záporná znaménka charakterizují, že neutrální osa neprochází kvadrantem, v němž leží působiště tahové resp. tlakové síly $\boldsymbol{N}$.

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} \qquad z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}$$

Průběh normálového napětí σ_x je v případě platnosti Hookeova zákona lineární po výšce kolmého průmětu průřezu do směru neutrální osy. Extrémní normálová napětí (***max***, ***min***) vznikají v bodech, které jsou nejvíce vzdálené od neutrální osy resp. v bodech, kde se rovnoběžky s neutrální osou dotýkají obrysu průřezu. Hodnoty extrémních normálových napětí lze snadno získat pouhým dosazením souřadnic těchto bodů do základní rovnice mimostředného tahu resp. tlaku. Z rovnice také vyplývá, že v těžišti tj. $\boldsymbol{y = 0}$ a $\boldsymbol{z = 0}$ je normálové napětí rovno normálovému napětí od vlivu normálové síly $\boldsymbol{N/A}$.

Výsledná smyková napětí se zjistí vektorovým složením smykových napětí odpovídajícím ohybům ve dvou hlavních rovinách.

Dimenzování prutu namáhaného mimostředným tahem resp. tlakem

Posouzení prutu namáhaného mimostředným tahem / tlakem v pružném oboru spočívá v porovnání vypočtených napětí s dovolenými napětími ($\boldsymbol{R_d}$, $\boldsymbol{f_y}$, $\boldsymbol{\sigma_{dov}}$ atd.). *(Při výpočtech se pracuje s výpočtovými hodnotami.)*

$$|\sigma_x|_{\max} \le R_d \qquad |\sigma_x|_{\max} \le f_y \qquad |\sigma_x|_{\max} \le \sigma_{dov}$$

Podmínku spolehlivosti lze vyjádřit také pomocí hodnot výpočtových ohybových momentů $\boldsymbol{M_{Sy}}$ a $\boldsymbol{M_{Sz}}$ a normálové síly $\boldsymbol{N_S}$ získaných řešením nosníku pro dané zatížení $\boldsymbol{M_{Ry}}$, $\boldsymbol{M_{Rz}}$ momentové a $\boldsymbol{N_R}$ osové únosnosti průřezu.

$$\frac{N_S}{f_d A} + \frac{M_{Sy}}{f_d W_y} + \frac{M_{Sz}}{f_d W_z} = \frac{N_S}{N_R} + \frac{M_{Sy}}{M_{Ry}} + \frac{M_{Sz}}{R_{Rz}} \le 1$$

Návrh průřezu se obvykle provádí zkusmo a provádí se vícenásobné posuzování. *Pozor: U mimostředného tlaku štíhlých prutu je nutné provést posouzení na vzpěrnou únosnost, popřípadě na prostorovou stabilitu. (!!!)*

Jádro průřezu

Pevnost některých stavebních materiálů např. betonu a zdiva v tahu je poměrně značně odlišná od pevnosti v tlaku. U těchto materiálů se při návrhu snažíme, aby v případě namáhání průřezů mimostředným tahem / tlakem nebyly tyto průřezy taženy tzn. aby v nich nedocházelo ke vzniku žádných tahových napětí. Tento požadavek je v případě platnosti Hookeova zákona splněn vždy, když neutrální osa neprotíná průřez popř. maximálně se jej „tečně“ dotýká. Takto definovaným polohám neutrálních os odpovídají působiště výslednice vnitřních sil, které vymezují tzv. ***jádro průřezu***.

Jádro průřezu je možné definováno jako oblast v blízkém okolí těžiště průřezu $\boldsymbol{T}$, v níž musí působit výslednice vnitřních sil působících na průřez, aby v celém průřezu vznikla normálová napětí stejného znaménka (je-li síla tlaková potom vzniknou pouze tlaková napětí; tahová napětí nevzniknou). *V případě, že výslednice leží mimo jádro průřezu, bude průřez jak tažen tak také* *tlačen.* Jádro průřezu je definováno obrysem tzv. ***jádrovou čarou***, což je geometrické místo působišť mimostředné síly pro případ, kdy se neutrální osa pouze dotýká průřezu.

Jádrovou čáru lze určit tak, že se neutrální osa postupně klade do všech možných tečných poloh k průřezu tzv. *pootáčení* čáry okolo průřezu. V takovém případě jsou úseky, které neutrální osa vytíná na souřadnicových osách y_n, z_n. Souřadnice jádrové čáry jim odpovídající y_j, z_j jsou excentricitami myšlené síly pohybující se po jádrové úsečce. Pro souřadnice jádrové čáry platí vztahy

$$y_j = e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}} \qquad z_j = e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}} .$$

Důležité jsou tzv. ***hlavní jádrové úsečky***. Jedná se o délky, které jsou vytknuté jádrovou čarou na hlavních osách setrvačnosti průřezu ***y*** a ***z***.

odvození j_{z1}: $j_{z1} = |z_1| = -\frac{i_y^2}{-c_{z2}} = \frac{I_y}{Ac_{z2}} = \frac{W_{y2}}{A}$

$$j_{y1} = \frac{W_{z2}}{A} \qquad j_{y2} = \frac{W_{z1}}{A} \qquad j_{z1} = \frac{W_{y2}}{A} \qquad j_{z2} = \frac{W_{y1}}{A}$$

Příklad: jádrové úsečky u obdélníku a kruhu

obdélník

$$j_y = \frac{W_z}{A} = \frac{\frac{1}{6}b^2h}{bh} = \frac{b}{6} \qquad j_z = \frac{W_y}{A} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{bh} = \frac{h}{6}$$

kruh

$$j_{y=z} \equiv j = \frac{W}{A} = \frac{\frac{\pi}{32}d^3}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{d}{8}$$