PROSTÝ OHYB, SMYK ZA OHYBU

Při obecném ohybu prutu dochází k ohybu původně přímé střednice prutu a dochází tak v jeho průřezech ke vzniku ohybových momentů a ve většině případů také posouvajících sil. Deformovaná střednice má při ***rovinném*** (***prostorovém***) ***ohybu*** tvar rovinné (prostorové) křivky.

V dalším textu je soustředěna pozornost na ***rovinný ohyb***. V případě rovinného ohybu leží zatížení, vnitřní síly a složky reakcí vnějších vazeb v jedné z ***hlavních rovin prutu*** tj. rovin, které prochází osou prutu a některou z hlavních os setrvačnosti průřezu ***y*** nebo ***z***., nebo jsou k této ose symetrické. Aby nedocházelo k případnému kroucení průřezů, zejména tenkostěnných popř. výrazně nesymetrických, je nutné aby rovina zatížení procházela spojnicí středů smyku průřezů.

Pro ***rovinný ohyb v rovině xz*** platí

$$N = 0 \qquad V_y = 0 \qquad V_z \neq 0 \qquad M_x = 0 \qquad M_y \neq 0 \qquad M_z = 0\,.$$

Prostý ohyb hmogenních průřezů

Napětí a deformace

Nejjednodušším případem namáhání ohybovým momentem tzv. ***prostý ohyb***. V případě prostého ohybu je průřez namáhán pouze ohybovým momentem $M_y \neq 0$, posouvající síla je rovna nule $V_z = 0$. Tento stav například vyvodí osamělé momentové zatížení konců prutu apod. Při výpočtu napjatosti a deformace v případě prostého ohybu se vychází z obdobných předpokladů jako v případě prostého tahu / tlaku:

1. ***Bernoulliho hypotéza***: průřezy prutu zůstávají rovinné a kolmé i k přetvořené ose prutu tj. k ose prutu po deformaci. Má charakter geometrické podmínky, která vyjadřuje nezkřivení příčných průřezů (průřezy zůstávají vzájemně rovnoběžné před i po deformaci). Potom jsou zkosení γ_{xy} a γ_{xz} nulová a z Hookeova zákona ve smyku vyplývá, že smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz} jsou také rovna nule. Jsou-li průřezy vzájemně rovnoběžné před i po deformaci, potom poměrná deformace ε_x (protažení, zkrácení) je v libovolném průřezu x konstantní a normálové napětí σ_x ve stejném průřezu je rovněž konstantní (Hookeův zákon).
2. ***nestlačitelnost podélných vláken***: podélná vlákna na sebe navzájem nepůsobí (netlačí). Předpoklad vyjadřuje nulovou velikost normálových napětí v rovinách kolmých k průřezu σ_y a σ_z.

K odvození vztahů pro výpočet napětí a poměrné deformace pro případ prostého ohybu je uvažován elementární úsek délky dx vytknutý na dvěma vzájemně rovnoběžnými řezy kolmými na střednici prutu. Vlivem ohybu dojde k vzájemnému pootočení průřezů o úhel $d\varphi$. Nechť se horní vlákna zkrátí ($M_y < 0$) a dolní vlákna prodlouží ($M_y > 0$). V takovém případě je příčný řez v jisté úrovni dělen na dvě části tzv. ***neutrální vrstvou***, ve které je poměrná deformace nulová. Křivost této vrstvy je r. Poměrná délková deformace ε_x libovolného vlákna lze vyjádřit pomocí křivosti r a vzdálenosti z pomocí vztahů

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\varphi}{r d\varphi} = \frac{z}{r}\,.$$

Z rovnice pro výpočet poměrné délkové deformace ε_x vyplývá, že průběh poměrné délkové deformace je po výšce průřezu lineární. K výpočtu normálového napětí je nutné použít fyzikální vztahy, které platí mezi napětím σ_x a poměrnou deformací ε_x (v případě lineárního materiálu je to Hookeův zákon). Potom lze normálové napětí σ_x určit pomocí vztahu

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{z}{r}.$$

V rovnici není známa hodnota křivosti r. Proto dalším krokem při výpočtu normálového napětí je využití těch ***statických podmínek ekvivalence vnitřních sil v průřezu prutu***, ve kterých se vyskytuje normálové napětí σ_x, tj.

$$N = \int_O \sigma_x dA = \frac{E}{r}\int_O z dA = \frac{E}{r}U_y = 0$$

$$M_y = \int_O \sigma_x z dA = \frac{E}{r}\int_O z^2 dA = \frac{E}{r}I_y$$

$$M_z = -\int_O \sigma_x y dA = -\frac{E}{r}\int_O yz dA = -\frac{E}{r}D_{yz} = 0$$

V rovnicích pro výpočet N resp. M_z je U_y resp. D_{yz} statický moment resp. deviační moment průřezové plochy. Osy y a z jsou těžištními osami průřezu (viz. přednáška č.9), potom je statický moment U_y i deviační moment D_{yz} k těmto osám nulový.

Důsledkem výše uvedeného tvrzení je potvrzení předpokladu, že neutrální vrstva prochází těžištěm průřezu a protíná průřez v ose y, která je tzv. ***neutrální osou – NO.***. Normálové napětí obdobně jako poměrná deformace je na neutrální ose jsou nulová $\sigma_x=0$; $\varepsilon_x=0$. Jedinou nenulovou rovnicí je druhá rovnice, ze které vyplývá konečný vztah pro výpočet neznámé křivosti r k střednice prutu

$$\frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y}.$$

Po dosazení vztahu pro výpočet křivosti r do vztahu pro výpočet normálového napětí σ_x se získá výsledný vztah pro výpočet normálového napětí σ_x. Z rovnice vyplývá, že *průběh normálového napětí je podobně jako průběh poměrné délkové deformace po výšce průřezu lineární a extrémní hodnoty vznikají ve vláknech nejvíce vzdálených od střednice prutu*.

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}z$$

Prostý ohyb nehomogenních průřezů (spřažené průřezy)

Při výstavbě stavebních konstrukcí se používá vzájemná kombinace různých materiálů: železobeton, předpjatý beton, keramika, dřevo a beton apod. Průřezy jsou z tohoto důvodu tvořeny z většího množství materiálů a při výpočtech je nutné respektovat jejich rozdílné materiálové vlastnosti. V místech kontaktu různých materiálů se přepokládá dokonalé spojení, které může být zajištěno soudržností popř. spojovacími prvky (lavičky, kozlíky, trny apod.) Takové ***průřezy*** se nazývají ***nehomogenní*** resp. ***spřažené***.

I v případě nehomogenních průřezů platí Bernoulliho hypotéza o rovinnosti půřezu tzn. průřezy prutu zůstávají rovinné a kolmé k přetvořené ose prutu tj. k ose prutu po deformaci. Přepokládejme pružné působení průřezu, tj. platnosti Hookeova zákona. Při výpočtech nehomogenních průřezů je nutné uvažovat vlastní modul pružnosti $\boldsymbol{E}$ jednotlivých materiálů, ze kterých je průřez tvořen. Při jednotné podélné poměrné deformaci proto bude normálové napětí $\boldsymbol{\sigma_x}$ v jednotlivých materiálech průřezu rozdílné.

Vlastní výpočet nehomogenních průřezů spočívá v náhradě „klasických“ průřezových charakteristik, průřezovými charakteristikami tzv. ***ideálního průřezu***, které se získají pomocí pracovního součinitele $\boldsymbol{\omega}$. Ideální průřez lze tedy chápat jako homogenní průřez, ve kterém byly všechny materiály převedeny pomocí součinitele $\boldsymbol{\omega}$ na jeden „referenční“ materiál průřezu.

$$\omega = \frac{E_s}{E_c}$$

Normálové napětí v jednotlivých částech nehomogenního průřezu se potom stanoví pomocí základního vzorce pro výpočet $\boldsymbol{\sigma_x}$. U materiálu, který není „referenční“ je nutné vynásobit vypočtené napětí $\boldsymbol{\sigma_x}$ převrácenou hodnotou pracovního součinitele ($\boldsymbol{1/\omega}$).

Poznámka: Při výpočtu betonových konstrukcí se ohyb stanovuje při vyloučení tahových napětí v betonu.

Dimenzování prutu namáhaného prostým ohybem

Posouzení prutu namáhaného prostým ohybem v pružném oboru spočívá v porovnání vypočtených napětí s dovolenými napětími ($\boldsymbol{R_d}$, $\boldsymbol{f_y}$ atd.) popř. vypočtených ohybových momentů s ohybovými momenty na mezi únosnosti. *(Při výpočtech se pracuje s výpočtovými hodnotami.)* Vlastní způsob posouzení je zřejmý z následujícího postupu.

Extrémní napětí vznikají ve vláknech, která jsou nejvíce vzdálena od těžiště průřezu. Tato napětí zle určit pomocí vzdáleností $\boldsymbol{z_1}$ a $\boldsymbol{z_2}$ (vzdálenosti krajních vláken od těžiště průřezu) a vztahu pro výpočet normálového napětí $\boldsymbol{\sigma_x}$.

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} z_1 \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_y} z_2$$

Při výpočtech se ve většině případů nahrazuje vztah ($\boldsymbol{I/z}$) jednou veličinou, tzv. ***průřezovým modulem W*** (k ose $\boldsymbol{y}$ existují obecně dva průřezové moduly $\boldsymbol{W_{y1}}$ a $\boldsymbol{W_{y2}}$, tj. k horním a dolním vláknům). Potom lze vztahy pro výpočet normálového napětí psát ve zjednodušeném tvaru

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}} \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{W_{y2}}$$

Při vlastním posouzení ohýbaného průřezu na mezní stav únosnosti nesmí normálové napětí v krajních vláknech překročit hodnotu pevnosti *(návrhová, výpočtová)*. <u>U homogenních průřezů rozhoduje vždy menší průřezový modul k uvažované ose</u>

$$W_y = \min\left(W_{y1} \quad W_{y2}\right) \ \ldots \text{ moment na mezi únosnosti } \sigma_x \equiv f_y = \frac{M_{yy}}{W_y} \rightarrow M_{yy} = f_y W_y$$

Vlastní podmínku lze zapsat pomocí napětí nebo pomocí ohybových momentů:

$$\sigma_x \leq f_y \qquad\qquad M_y \leq M_{yy}$$

Při výpočtech se předpokládá rovinné působení nosníku, a že nemůže dojít ke klopení (zkroucení) resp. ztrátě stability v ohybu.

Výpočet smykových napětí za ohybu – masivní a tenkostěnné průřezy

V případě, že není nosník namáhán pouze prostým ohybem, dochází v příčných průřezech ke vzniku ***posouvajících sil*** resp. ke vzniku ***smykových napětí***. Velikost smykových napětí **nelze** odvodit z ***Bernoulliho hypotézy*** o rovinnosti průřezů, protože tento předpoklad vylučuje smykové deformace → zkosení jsou rovna nule a z ***Hookeova zákona ve smyku*** (smyková napětí jsou rovněž nulová). Z tohoto důvodu se při odvozování smykových napětí při ohybu ***vychází podmínky rovnováhy a z věty o vzájemnosti smykových napětí*** (smyková napětí ve vodorovném a svislém řezu jsou totožná).

Při výpočtu smykových napětí za ohybu se rozlišuje, zda se jedná o průřez ***masivní*** nebo ***tenkostěnný***.

Masivní průřezy

Je uvažován nosník stálého průřezu, který je symetrický podle roviny ***xz***. Základní přibližné předpoklady, ze kterých se při výpočtu vychází formuloval ***Grashof***:

a) podél rovnoběžky s neutrální osou (podél přímky ***z = konst.***) je svislá složka smykového napětí konstantní; τ_{xz}=***konst.***
b) vektory výsledných smykových napětí podél této přímky vždy směřují do společného bodu ***P*** – průsečíku tečen k obrysu průřezu.

> ***Smyková napětí na okraji průřezu musí mít směr tečny k obrysu*** při jakémkoli namáhání prutu, za předpokladu nezatížení povrchu tangenciálním zatížením.

Předpokládejme, že je dvěma vzájemně rovnoběžnými řezy kolmými na střednici prutu definován libovolný element délky ***dx***. Ohybový moment v levém řezu M_y je odlišný od ohybového momentu v pravém řezu M_y+dM_y. Jsou-li ohybové momenty vzájemně odlišné, pak jsou i normálová napětí σ_x, která jsou jimi vyvolaná jsou také různá. Při uvolnění dolní části elementu prutu obecnou rovinou ***z = konst.*** jsou výslednice normálových napětí v obou řezech rovněž rozdílné. V levém průřezu o souřadnici ***x*** je výslednice rovna ***N*** a v pravém průřezu o souřadnici ***x+dx*** je rovna ***N+dN***. Výslednici ***N*** a diferenciál ***dN*** lze zjistit integrací normálových napětí přes plochu řezu oddělené části prutu (U_y … statický moment dolní oddělené části průřezu k ose ***z***).

$$N = \int_O \sigma_x dA = \sigma_x \int_O dA = \frac{M_y}{I_y}\int_O z dA = \frac{M_y}{I_y}U_y$$

$$dN = \frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{M_y}{I_y}U_y\right)dx = \frac{dM_y}{dx}\frac{U_y}{I_y}dx = V_z\frac{U_y}{I_y}dx$$

Druhou rovnici (pro výpočet diferenciálu ***dN***) lze za předpokladu konstantního průřezu prutu a Schwedlerovy věty (***m = 0***) zaspat ve tvaru

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z\,.$$

Na vodorovné ploše vytknuté vodorovným řezem o souřadnici ***z*** působí rovnoměrně rozdělená smyková napětí τ_{zx}, jejichž výslednici lze určit jako součin rovnoměrně rozděleného smykového napětí a plochy vodorovného řezu.

$$dQ = \tau_{zx} b(z) dx$$

Výsledný vztah pro výpočet smykového napětí $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ lze odvodit z podmínky rovnováhy do směru x. Ve vztahu je V_z posouvající síla v daném průřezu, U_y je statický moment odříznuté (oddělené) části průřezu k těžišti průřezu, I_y je moment setrvačnosti celého průřezu k ose y a $b(z)$ je šířka v uvažovaném místě. *Smykové napětí má na okrajích průřezu nulovou hodnotu.*

$$dQ = \tau_{zx} b(z) dx = dN = V_z \frac{U_y}{I_y} dx$$

Výše uvedený výsledný vztah pro výpočet smykového napětí se často nazývá jako ***Grashofův*** (***Žuravského***) ***vzorec***, jelikož se při jeho odvozování vycházelo z předpokladů definovaným Grashofem.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z U_y}{I_y b(z)}$$

U_y … statický moment oddělené části průřezu k těžišti průřezu
I_y … moment setrvačnosti celého průřezu
$b(z)$ … šířka průřezu v místě řezu

Tenkostěnné průřezy

Tenkostěnné průřezy jsou průřezy, jejichž tloušťka t (stojiny t_w, pásnice t_f) vzhledem k ostatním rozměrům průřezu je značně menší → $t, t_w, t_f << b, h$. *(V literatuře se uvádí limitní poměr 1:10.)*

Tenkostěnné průřezy se dělí podle uspořádání střednice na průřezy:

- ***otevřeného tvaru***: střednice netvoří uzavřenou křivku, např. U, I, T, C, Z,
- ***uzavřeného tvaru***: střednice tvoří uzavřenou křivku, např. O, □.

Výpočet smykového napětí u tenkostěnných průřezů se vychází z předpokladů:

a) smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmé k dílčí stěně,
b) smyková napětí jsou rovnoběžná s obrysem průřezu.

K vlastnímu určení velikosti smykového napětí τ_{xz} resp. τ_{xy} ozn. τ_x se použije vztah

$$\tau_x = \frac{V_z U_y}{I_y t},$$

kde t je tloušťka ve vyšetřovaném místě, U_y je statický moment plochy oddělené řezem kolmým na obrys průřezu a τ_x obecné označení smykového napětí τ_{xz} resp. τ_{xy}. ($\tau_{xz} \rightarrow U_y(z)$, $\tau_{xy} \rightarrow U_y(y)$).

Střed smyku

Výslednou smykovou sílu V_z působící na průřez lze určit integrací smykového napětí po ploše průřezu. V případě ***dvouose symetrických průřezů*** prochází výsledná síla V_z těžištěm průřezu T. V případě ***nesymetrických průřezů*** tomu tak není. U těchto průřezů výsledná posouvající síla neprochází těžištěm, ale ***středem smyku A***. Středem smyku A musí také procházet rovina zatížení, aby průřezy nebyly krouceny. Střed smyku A leží na opačné straně od stojiny než těžiště.

Vlastní odvození polohy středu smyku ***A*** vychází z teorie kroucení nosníků tvořených tenkostěnnými otevřenými průřezy. Při výpočtu je nutné určit výsledné posouvající síly v přírubách $\boldsymbol{Q_f}$ a stojině $\boldsymbol{Q_w}$. Výsledné odsunutí středu smyku se získá pomocí dvojice momentů.

U tenkostěnných nosníků uzavřeného průřezu je úloha určení smykového napětí staticky neurčitá. K výpočtu je nutné definovat deformační podmínky. Výjimkou jsou jednokomůrkové nosníky s osou symetrie, zatížené v této rovině. Smyková napětí v této rovině jsou rovna nule a jejich průběh po výšce je stejný jako u průřezu otevřeného, který vnikl rozdělením uzavřeného průřezu na dvě poloviny. Střed smyku leží u těchto nosníků na ose symetrie průřezu.