PROSTÝ TAH A TLAK, PROSTÝ SMYK

Základní případy namáhání prutu - prosté, složené

Z hlediska působení složek vnitřních sil v průřezu prutu lze namáhání rozdělit na:

- ***základní*** *(prosté)*:
  - ***prostý tah a tlak*** – vzniká pouze při působení normálové síly ***N***,
  - ***prostý ohyb*** – vzniká pouze při působení ohybového momentu ***M***,
  - ***prostý smyk*** – vzniká pouze při působení posouvající síly ***V***,
  - ***prosté kroucení*** – vzniká pouze při působení kroutícího momentu $\boldsymbol{M_x}$,
- ***složené***: vzniknou vzájemnou kombinací základních případů namáhání.
  - ***prostorový ohyb*** – vzniká při působení ohybových momentů ve dvou rovinách, *(zvláštním případem je rovinný ohyb, kdy působí pouze jeden ohybový moment)*
  - ***mimostředný tah a tlak*** – vzniká při vzájemném působení normálové síly a ohybového momentu v prostoru (*prostorový mimostředný tah a tlak*) nebo v rovině (*rovinný mimostředný tah a tlak*).

V případě ***fyzikálně a geometricky lineárního výpočtu*** tj. lineární závislosti mezi napětím a poměrnou deformací lze použít ***princip superpozice***. Pomocí tohoto principu lze složené případy namáhání rozložit na základní způsoby namáhání a jejich účinky následně skalárně popř. vektorově složit. V pružnoplastickém stavu a v případě výpočtů prováděných podle teorie II. řádu princip superpozice nelze použít.

Prostý tah a tlak

Prostý tah / tlak nastane u přímého prutu pouze tehdy, když jedinou nenulovou složkou vnitřních sil v libovolném průřezu prutu je ***normálová síla N*** a všechny ostatní složky výslednice vnitřních sil jsou rovny nule.
N > 0 … ***prostý tah***,
N < 0 … ***prostý tlak***.

$$N \neq 0 \qquad V_y = 0 \qquad V_z = 0 \qquad M_x = 0 \qquad M_y = 0 \qquad M_z = 0$$

Při výpočtu napjatosti a deformace v případě prostého tahu resp. tlaku se vychází ze dvou základních předpokladů:

1. ***Bernoulliho hypotéza***: průřezy prutu zůstávají rovinné a kolmé i k přetvořené ose prutu tj. k ose prutu po deformaci.
2. ***nestlačitelnost podélných vláken***: podélná vlákna na sebe navzájem nepůsobí (netlačí).

Napětí

Bernoulliho hypotéza má charakter geometrické podmínky, která vyjadřuje nezkřivení příčných průřezů (průřezy zůstávají vzájemně rovnoběžné) před i po deformaci. Potom jsou zkosení γ_{xy} a γ_{xz} nulová a z Hookeova zákona ve smyku vyplývá, že smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz} jsou také rovna nule.

$$\gamma_{xy} = 0 \; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \rightarrow \tau_{xy} = 0 \qquad\qquad \gamma_{xz} = 0 \; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \rightarrow \tau_{xz} = 0$$

Jsou-li průřezy vzájemně rovnoběžné před i po deformaci, potom poměrná deformace ε_x (protažení, zkrácení) je v libovolném průřezu ***x*** konstantní a normálové napětí σ_x ve stejném průřezu je rovněž konstantní (Hookeův zákon).

$$\varepsilon_x = konst. \quad \rightarrow \quad \sigma_x = E\varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \sigma_x = konst.$$

Předpoklad ***nestlačitelnosti podélných vláken*** vyjadřuje, že normálová napětí v rovinách kolmých k průřezu σ_y a σ_z jsou rovna nule.

$$\sigma_y = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

V případě ***prostého tahu*** resp. ***tlaku*** je stav napjatosti v bodu ***M*** tělesa v pravoúhlé soustavě souřadnic popsán pomocí jedné nenulové složky napětí (normálové napětí – σ_x). Takový stav se nazývá **jednoosá (přímková) napjatost**.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym. & & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{vektor napětí: } \rightarrow \{\sigma\} = \{\sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

Napětí v průřezu prutu musí splňovat podmínky statické ekvivalence vnitřních sil. Podmínky, které obsahují smyková napětí jsou podle předpokladu nestlačitelnosti (2) splněna vždy. Zbývající tři rovnice, ve kterých se vyskytuje normálové napětí lze zapsat ve tvaru

$$N = \int_O \sigma_x dA = \sigma_x \int_O dA = \sigma_x A$$
$$M_y = \int_O \sigma_x z dA = \sigma_x \int_O z dA = \sigma_x U_y = 0$$
$$M_z = -\int_O \sigma_x y dA = -\sigma_x \int_O y dA = -\sigma_x U_z = 0$$

V rovnicích pro výpočet M_y a M_z jsou U_y a U_z statické momenty průřezové plochy. Osy y a z jsou těžištními osami průřezu (viz. přednáška č.9), potom jsou statické momenty k těmto osám U_y a U_z nulové.

Vztah pro výpočet normálového napětí σ_x v průřezu x prutu lze určit pomocí prvního ze vztahů

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = E\varepsilon_x = E\frac{\Delta l}{l}$$

Soustředěné zatížení:
V případě soustředěného zatížení (tj. osová síla působící na malé ploše) vznikne v okolí jeho působení oblast, ve které neplatí uvedené vztahy pro výpočet napětí. V této tzv. roznášecí oblasti vzniká prostorový stav napjatosti, při kterém je normálové napětí σ_x *nerovnoměrně rozděleno po průřezu a vnikají také příčná napětí* σ_y *a* σ_z*.*

Pruty proměnného průřezu:
V případě pozvolné změny průřezu platí a lze použít pro výpočet normálového napětí σ_x *výše uvedené vztahy. Vlastní rozdělení normálového napětí po průřezu se blíží konstantnímu rozdělení. Dochází však ke vzniku smykových napětí, které nenabývají velkých hodnot.*

V případě náhlé změny průřezu (otvor, vrub, zúžení) již neplatí Bernoulliho předpoklad o zachování rovinnosti průřezu. V nejvíce oslabených místech je napětí rozděleno silně nerovnoměrně. Výpočet *maximální hodnoty napětí lze provést pomocí součinitele koncentrace napětí **k** (závisí na geometrii prvku) a oslabené plochy průřezu A_{net}.*

Deformace (prodloužení a zkrácení) prutu

Při výpočtu deformací (přetvoření) prutu namáhaného tahem resp. tlakem se vychází ze vztahu pro výpočet normálového napětí $\sigma_x = N/A$. *V případě působení tlakové normálové síly se předpokládá, že prut je dokonale přímý, a že u něj nedojde ke ztrátě stability tvaru.*

Prut stálého průřezu

V případě zatížení prutu stálého průřezu na koncích konstantní silou N dochází ke shodnému délkovému prodloužení všech elementů dx (A…konst.). Celkovou délkovou změnu (prodloužení, zkrácení) lze vyjádřit pomocí Hookeova zákona a definice poměrné délkové deformace ve tvaru

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{N}{EA}\int_0^l dx = \frac{Nl}{EA} \quad \ldots \text{ alternativní vyjádření Hookeova zákona}$$

Vztah lze upravit a vyjádřit velikost normálové síly N pomocí délkové změny a ***tuhosti prutu v tahu / tlaku k***.

$$k = \frac{EA}{l} \qquad \rightarrow \qquad N = k \cdot \Delta l$$

Tuhost prutu v tahu / tlaku k lze definovat jako sílu potřebnou k protažení, zatlačení prutu o jednotkovou délku. Převrácená hodnota k charakterizuje ***poddajnost prutu v tahu / tlaku*** ($1/k$).
Vlivem působící normálové síly dojde také ke změně příčných rozměrů (viz. přednáška č.9), které jsou úměrné Poissonovu součiniteli υ

$$\Delta h = h' - h = h \cdot \varepsilon_z = -h \cdot \upsilon \frac{\sigma_x}{E} = -\upsilon \frac{Nh}{EA}$$
$$\Delta b = b' - b = b \cdot \varepsilon_z = -b \cdot \upsilon \frac{\sigma_x}{E} = -\upsilon \frac{Nb}{EA}$$

Prut obecného průřezu

V případě zatížení prutu s proměnným průřezem spojitým rovnoměrným osovým zatížením $n(x)$ jsou posuvy všech bodů u ve směru osy x stejné v důsledku platnosti předpokladu o rovinnosti průřezů. Bod M se posune o délku u, bod N o délku $u+du$. Vzdálenost mezi body $M'N'$ po deformaci je rovna $dx' = dx + (u + du) - u = dx + du$ a poměrnou deformaci lze potom vyjádřit pomocí vztahu

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Dosazením vztahu pro výpočet poměrné deformace ε_x do Hookeova zákona se získá **diferenciální rovnice taženého (tlačeného) prutu**

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

Z diferenciální rovnice taženého (tlačeného) prutu lze integrací vyjádřit podélný posuv u

$$u = \int \frac{N(x)}{EA(x)}dx + C\,.$$

Dimenzování prutu namáhaného prostým tahem a tlakem

Posouzení konstrukcí lze provádět z hlediska ***únosnosti*** a ***použitelnosti.*** U prutů namáhaných tahem resp. tlakem se provádí zejména ***posouzení na únosnost***. Posouzení na použitelnost není ve většině případů nutné provádět, jelikož délkové změny prutů jsou menší než maximální přípustné hodnoty.

V případě prutů namáhaných tlakovou silou je nutné při výpočtu předpokládat, že při jejich ztrátě únosnosti dojde ke ztrátě stability, a proto je nutné je posuzovat na vzpěr. Posouzení na prostý tlak lze provést pouze u masivních konstrukcí.

Posouzení spočívá v porovnání vypočtených napětí s dovolenými napětími popř. vypočtených normálových sil s normálovými silami na mezi únosnosti. *(Při výpočtech se pracuje s výpočtovými hodnotami.)*

Staticky neurčité případy tahu a tlaku

*S případy namáhání prostým tahem resp. tlakem se lze setkat také u prutových staticky neurčitých konstrukcí. Jedná se o konstrukce, u kterých je počet neznámých složek reakcí vnějších vazeb je větší než počet statických podmínek rovnováhy (**v < a**). V takovém případě je nutné doplnit statické podmínky rovnováhy **podmínkami deformačními (přetvárnými)**, které mají geometrickou povahu a vyjadřují vztahy mezi posuvy a deformacemi, které jsou nezbytné k dodržení předepsaného podepření a spojitosti konstrukce. Vzájemné propojení silových a deformačních veličin je zajištěno pomocí fyzikálních rovnic resp. pomocí Hookeova zákona.*

Prostý smyk

Prostý (čistý) smyk nastane v libovolném bodě tělesa tehdy, když na tento bod nepůsobí žádné normálové napětí, ale pouze napětí smyková. (Pro názornost výkladu se stav prostého smyku zužuje na rovinný případ, ve kterém je nenulová pouze jedna ze dvojic vzájemně si rovných smykových napětí.) Při prostém smyku, jelikož všechna normálová napětí jsou nulová, nevznikají poměrné délkové deformace, ale vznikají pouze poměrné úhlové deformace (zkosení), které se řídí Hookeovým zákonem ve smyku.

Při prostém smyku působí v libovolném průřezu prutu pouze posouvající síla. Příkladem tohoto namáhání může být nosník zatížení po obvodu spojitým zatížením q. Při tomto způsobu zatížení existují v nosníku pouze smyková napětí, která jsou konstantní.

$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{A}$$

Výpočet posouvající síly $V_z(x)$ a ohybového momentu $M_y(x)$ v průřezu x lze provést pomocí reakce Ra, určené z momentové podmínky rovnováhy k bodu b.

$$\textit{momentová podmínka k bodu } \boldsymbol{b} \ldots \; -R_a l - Q_1 l + Q_2 h = -R_a l - qhl + qlh = 0 \rightarrow R_a = 0 \rightarrow R_b = 0$$

$$V_z = V_z(x) = Q_1 = qh \qquad\qquad M_y = M_y(x) = qhx - qx\frac{h}{2} - qx\frac{h}{2} = 0$$

Z hlediska praxe je namáhání prostým smykem zcela vyjímečné. Ve většině případů se jedná o ***smyk za ohybu***, u kterého se průběh smykových napětí řídí podle ***Gashofova (Žuravského) vztahu***.

S případy namáhání prostým smykem se lze setkat např. při návrhu a posuzování spojů (šroubových, nýtových popř. svarů). V takovém případě se hovoří o namáhání střihem a při posouzení se vychází z předpokladu rovnoměrného rozdělení smykových napětí.

Dimenzování šroubových a nýtových spojů

Podle počtu rovin, ve kterých je dřík nýtu namáhaný smykem se rozlišují nýty:

- jednostřižné,
- dvojstřižné,
- vícestřižné.

Při výpočtech se předpokládá, že všechny nýty se podílejí stejnou měrou na přenosu vnější působící síly. Potom smyková síly V_1 připadající na průřezovou plochu jednoho nýtu je

$$V_1 = \frac{F}{n \cdot k},$$

kde k je počet nýtů a n je počet smykových rovin jednoho nýtu. Smykové napětí v dříku nýtu o průměru D je rovno

$$\tau_{nýtu} = \frac{V_1}{A_{nýtu}} = \frac{4F}{n \cdot k \cdot \pi D^2}.$$

Je-li známa pevnost nýtu ve smyku τ_n, potom únosnost jednoho nýtu na smyk $V_{d,s}$ je

$$V_{d,s} = n \cdot A_{nýtu} \cdot \tau_n .$$

Síly působící na dřík nýtu se přenášejí tlakem stěn nýtového otvoru na nýt – nýt je namáhán na ***otlačení***. Při výpočtech se nerovnoměrné rozdělení namáhání na otlačení nahrazuje rovnoměrným normálovým napětím působící na ploše $A_0 = D \cdot t$, kde ***D*** je průměr nýtu a ***t*** je tloušťka plechu. Potom vztah pro výpočet napětí na otlačení má tvar

$$\sigma_0 = \frac{F}{kD\sum t_i},$$

kde $\sum t_i$ je součet tlouštěk plechů (spojovacích materiálů), které jsou otlačovány v jednom směru. Je-li známa pevnost nýtu v otlačení $\boldsymbol{\sigma_{ot}}$, potom únosnost jednoho nýtu na otlačení $\boldsymbol{N_{d,o}}$ je

$$N_{d,o} = D \cdot \sum t_i \cdot \sigma_{ot},$$

kde $\sum t_i$ je menší ze součtů tlouštěk spojovacích materiálů, které jsou otlačovány v jednom směru.

Normálové napětí ve spojovacích prvcích se určuje v řezu, který je oslabený otvory pro nýty. Toto napětí se určí ze vztahu

$$\sigma_{osl} = \frac{F}{A_{osl}} = \frac{F}{t(b - mD)},$$

kde ***m*** je počet nýtových otvorů v řadě. Únosnost prvku v místě oslabení otvory je

$$N_u = \sigma_{ot} \cdot A_{osl} = \sigma_{ot} \cdot t(b - mD).$$