ZÁKLADNÍ POJMY A PŘEDPOKLADY PRUŽNOSTI A PLASTICITY

Úkoly teorie pružnosti a plasticity

Teorie pružnosti a plasticity (TPP) je součástí mechaniky kontinua pevné fáze – deformovatelných těles. Základním předmětem zkoumání a zájmu TPP jsou zejména ***napětí*** (intenzita vnitřních sil v tělese), ***deformace*** (geometrické změny tělesa), ***stabilita*** (schopnost zachovat nebo obnovit původní rovnovážný stav bez narůstání deformací). V TPP se pracuje s ***pevností materiálu***, což je schopnost materiálu odolávat vnějším účinků aniž by došlo k porušení. Jako vědní obor vytváří TPP teoretické základy pro teorii konstrukcí – betonových, ocelových, dřevěných atd.

Pro potřeby výkladu lze rozdělit TPP na ***teorii pružnosti*** popř. klasickou lineární pružnost a ***plasticitu***.

Základní předpoklady teorie pružnosti a plasticity

Výchozí předpoklady teorie pružnosti (klasické lineární pružnosti):

1. ***Spojitost látky.*** Těleso je uvažováno jako kontinuum tzn. je zaplněn celý objem tělesa hmotou (mezery neexistují) → napětí a deformace spojité funkce.
2. ***Homogenita a izotropie.*** Homogenní látka je látka, která má ve všech shodné fyzikální vlastnosti (nahodilé vady nejsou uvažovány). Při kombinaci většího počtu materiálů se již nejedná o „celkovou“ homogenitu. Izotropní materiál je materiál jehož vlastnosti jsou nezávislé na směru.
3. ***Lineární pružnost.*** Pružnost je schopnost látky vracet se do původního stavu. V případě platnosti přímé úměry mezi napětím a deformací vyjádřené Hookovým zákonem se jedná o fyzikální linearitu.
4. ***Malé deformace.*** Změny tvaru konstrukcí jsou ve srovnání s rozhodujícími rozměry prvků konstrukce velmi malé stejně jako posuny jednotlivých bodů nosníků (např. průhyby). Jedná se o geometrickou linearitu.
5. ***Statické zatěžování.*** Předpokládá se pozvolný nárůst vnějších účinků (statické zatěžování). Dynamické účinky je možné zanedbat.
6. ***Počáteční nenapjatost.*** Ve „výchozím“ stavu se předpokládá nulová hladina napětí.

Uvedené předpoklady umožňují uplatnit ***princip superpozice účinků*** tj. skládání účinků, který je založen na linearitě všech matematických závislostí. *Princip superpozice nelze použít při fyzikálně nelineárních výpočtech a výpočtech podle teorie II. řádu.*

Plasticita

Plasticita je schopnost látky deformovat se bez porušení nevratným způsobem. Po odstranění zatížení zůstávají v tělese trvalé deformace, popř. reziduální napětí. Závislost mezi napětím a deformací není lineární (nelze ji popsat pomocí Hookeova zákona), ale je nelineární → fyzikální nelinearita. Princip superpozice v tomto případě neplatí.

Teorie II. Řádu

Jedná se o teorii, kdy se podmínky rovnováhy sestavují pro deformovanou konstrukci. Při výpočtu se respektuje se vliv posunů a pootočení na velikost silových veličin. Je také porušena linearita vztahů mezi silami a deformacemi.

Napětí, vnitřní síly a vztahy mezi vnitřními silami a napětími

Na těleso působí při statickém zatěžovacím procesu ***vnější síly*** (primární = zatížení, sekundární = podporové reakce). V důsledku působení vnějších sil vzniknou v tělese ***vnitřní síly***. Vnitřními silami na sebe navzájem působí dvě části tělesa oddělené libovolným myšleným řezem. V rovině průřezu prutu, tj. v rovině kolmé na střednici prutu, jsou vnitřní síly charakterizovány složkami své výslednice: ***normálovou*** a ***posouvající*** silou, ***ohybovým momentem*** atd.

Pro definování pojmu ***napětí*** je nutné vyjít z vnitřních sil, resp. ze složek výslednice. Potom lze napětí definovat pomocí malé plochy ***dA*** v okolí bodu ***M*** a výslednice vnitřních sil, která na tuto plochu působí – vektor ΔF. Vektor ΔF lze rozložit do dvou směrů:

(a) do normály na plochu ***dA*** tj. ΔN,
(b) do roviny plochy ***dA*** tj. ΔV.

Potom lze napětí definovat jako limitu poměru těchto sil k obsahu plochy ***dA***, tedy

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}$$

Při výpočtech se rozlišují dva typy napětí:

(a) ***normálové napětí*** - σ,
(b) ***smykové napětí*** - τ.

Napětí v určitém bodu tělesa v řezu jistého sklonu je vektor, charakterizovaný svými složkami. Stejným bodem lze ovšem vést nekonečný počet řezů, z nichž v každém je napětí obecně jiné. Všechny tyto hodnoty se označují jako ***stav napjatosti tělesa v uvažovaném bodu***. Stav napjatosti je v pravoúhlé soustavě souřadnic zapsán maticí složek napětí (v pružnosti též nazýván *tenzorem napětí*)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Věta o vzájemnosti smykových napětí

Mezi smykovými napětími platí vzájemné závislosti označované jako ***vzájemnost smykových napětí***, které lze odvodit z momentových podmínek rovnováhy sestavených pro malý element o objemu $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Síly působící na plochách tohoto elementu se získají vynásobením příslušné složky napětí plochou na které působí, např. $dV_{xy} = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$. Momentové podmínky rovnováhy se stanoví k osám x^*, y^*, z^*, které prochází těžištěm elementu a jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami x, y, z. Například momentová podmínka rovnováhy k ose z^* má tvar

$$\sum M_{z^*} = 0 \qquad dV_{xy}dx - dV_{yx}dy = \tau_{xy}dxdydz - \tau_{yx}dxdydz = 0 \qquad /dx;dy;dz\,.$$

Po úpravě rovnice (vydělení dx, dy, dz) se získá jedna z rovnic věty o vzájemnosti smykových napětí $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Zbývající rovnice by se určily obdobným postupem pouhou záměnou indexů.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Z věty o vzájemnosti smykových napětí vyplývá, že stav napjatosti v libovolném bodu tělesa ***M*** v pravoúhlé soustavě souřadnic ***xyz*** je popsán pomocí 6 složek napětí (3 napětí normálová, 3 napětí smyková).

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix} \quad \rightarrow [\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ & \sigma_y & \tau_{yz}\\ sym. & & \sigma_z\end{bmatrix}$$

$$vektor\ napětí: \rightarrow \{\sigma\}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T$$

Saint-Venantův princip lokálnosti

Při řešení úloh výpočtu stavu napjatosti těles se používá ***Saint-Venantův princip lokálnosti***. Princip lze definovat: Rovnovážná soustava sil přiložená k malé oblasti pružného tělesa ovlivní výrazněji jeho stav napjatosti jen v blízkém okolí tj. v oblasti "poruchy", kdežto ve vzdálenějších bodech má zanedbatelné účinky. *Saint-Venantova principu lokálnosti se využívá při náhradě spojitého zatížení soustředěného na malé ploše osamělým břemenem apod.*

Vztahy mezi vnitřními silami a napětími

Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu, které platí mezi složkami vnitřních sil a vnějším spojitým zatížením nosníku lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dN}{dx}=-n\,, \qquad \frac{dV}{dx}=-q\,, \qquad \frac{dM}{dx}=V+m\,.$$

V případě prostorově zatíženého přímého prutu, který je umístěn v pravotočivé soustavě souřadnic ***xyz***, kde osa ***x*** je totožná se střednicí prutu a osy ***y*** resp. ***z*** jsou centrálními osami setrvačnosti průřezu, tj. těžištní osy průřezu lze diferenciální podmínky rovnováhy zapsat ve tvaru

$$\frac{dN}{dx}=-n_x \qquad \frac{dM_x}{dx}=-m_x$$
$$\frac{dV_y}{dx}=-q_y \qquad \frac{dM_y}{dx}=V_z$$
$$\frac{dV_z}{dx}=-q_z \qquad \frac{dM_z}{dx}=V_y$$

Výslednice vnitřních sil v průřezu prutu lze získat integrací silových a momentových účinků elementárních vnitřních sil (*napětí* /σ_x, τ_{xy} τ_{xz}/$\cdot dA$) působících na libovolné elementární ploše prutu přes plochu průřezu ***dA***. Při výpočtu se vychází z tzv. derivačně integračního schématu:

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow\rightarrow\rightarrow\ integrace\ \rightarrow\rightarrow\rightarrow & \\ \mathbf{-q} & \mathbf{V} & \mathbf{M} \\ & \leftarrow\leftarrow\leftarrow\ derivace\ \leftarrow\leftarrow\leftarrow & \end{array}$$

$$N=\int_O \sigma_x dA \qquad M_x=\int_O(\tau_{xz}y-\tau_{xy}z)dA$$
$$V_y=\int_O \tau_{xy} dA \qquad M_y=\int_O \sigma_x z dA$$
$$V_z=\int_O \tau_{xz} dA \qquad M_z=-\int_O \sigma_x y dA$$

Výše uvedené vztahy vyjadřují ***podmínky statické ekvivalence vnitřních sil v průřezu prutu***. **Musí být vždy splněny v pružném i plastickém oboru**; neurčují konkrétní rozdělení napětí po průřezu.

Deformace a posuny

Vlivem působícího zatížení (vnější / vnitřní), případně i jiných účinků (objemové a teplotní změny) dochází k ***přetvoření*** (deformaci) tělesa. Tyto geometrické změny lze přesně popsat pomocí ***poměrných deformací*** nebo pomocí ***složek přemístění*** (posuny, pootočení).

Poměrné deformace lze rozdělit na:

- ***délkové*** ε = poměrné protažení resp. zkrácení
  - *poměr přírůstku délky k původní velikosti délky*
  - *od normálového napětí* σ

$$\varepsilon = \frac{absolutní\ protažení}{původní\ délka}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

- ***úhlové*** γ = zkosení
  - *změna úhlu mezi dvěma úsečkami, které byly před deformací na sebe kolmé*
  - *od smykového napětí* τ

$$\gamma = \frac{lineární\ poměrné\ posunutí}{délka\ hrany}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dx}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{dx}{dz} + \frac{dz}{dx}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{dy}{dz} + \frac{dz}{dy}.$$

Deformace v určitém bodu tělesa v řezu jistého sklonu je vektor, charakterizovaný svými složkami. Stejným bodem lze ovšem vést nekonečný počet řezů, z nichž v každém je deformace obecně jiná. Všechny tyto hodnoty se označují jako ***stav deformace tělesa v uvažovaném bodu***. Stav deformace je v pravoúhlé soustavě souřadnic zapsán maticí složek poměrných deformací (v pružnosti též nazýván *tenzorem deformace*)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Stav deformace v libovolném bodě tělesa ***M*** v pravoúhlé soustavě souřadnic je popsán pomocí 6 složek poměrných deformací (3 poměrné délkové deformace, 3 poměrné úhlové deformace).

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ sym & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$vektor\ deformace: \rightarrow \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T$$

Mezi poměrnými deformacemi a složkami přemístění existují vztahy, které lze popsat pomocí ***geometrických rovnic***. Předpokládá se, že původní i deformovanou geometrii tělesa lze popsat pomocí složek přemístění libovolného bodu tělesa. Tyto složky se předpokládají jako kladné mají-li shodný smysl se souřadnicovými osami ***x(u)***, ***y(v)***, ***z(w)***; ***{u} = {u, v, w}^{T}***.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \qquad \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$
$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \qquad \rightarrow \qquad \{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u\}$$
$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$$

Fyzikální vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi

Mezi napětími a poměrnými deformacemi existují vztahy, které lze popsat pomocí ***fyzikálních rovnic***. Tyto rovnice vyjadřují mechanické vlastnosti materiálu.

Materiály lze obecně rozdělit do dvou kategorií:

- lineárně pružné materiály,
- nelineárně pružné materiály.

Lineárně pružný materiál (Hookův zákon)

Pro lineárně pružný materiál platí lineární závislost mezi napětími a poměrnými deformacemi ve všech fázích statického působení (zatěžování, odlehčování).

a) Poměrné délkové deformace

V případě namáhání prutu pouze normálovým napětím působícím ve směru osy $\boldsymbol{x}$ prutu (jedná se o stav jednoosé napjatosti) je lineární závislost mezi napětím $\boldsymbol{\sigma}$ a poměrnou deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ vyjádřena pomocí modulu pružnosti v tahu a tlaku $\boldsymbol{E}$ (Youngův modul) Hookeovým zákonem v tahu a tlaku.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x .$$

Při osové namáhání prutu nedochází pouze k podélným délkovým změnám, ale také k příčným délkovým změnám. Tato poměrná přetvoření mají opačný smysl než poměrná přetvoření v podélném směru. Poměrná přetvoření v příčném směru lze vyjádřit pomocí Poissonova součinitele příčné deformace υ ($\boldsymbol{\upsilon \leq 0{,}5}$).

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\upsilon\varepsilon_x = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

Obdobným způsobem lze provést výpočet poměrných délkových deformací v případě působení normálových napětí ve směru osy $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$. Celkové poměrné deformace se potom získají superpozicí účinků (obecný Hookeův zákon)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

b) Poměrné úhlové deformace

Obdobné vztahy, které platí mezi poměrnými délkovými deformacemi a normálovými napětími existují i mezi poměrnými úhlovými deformacemi a smykovými napětími. Potom se jedná o tzv. Hookeův zákon ve smyku, kdy místo $\boldsymbol{E}$ se uvažuje modul pružnosti ve smyku $\boldsymbol{G}$.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Obdobným způsobem lze provést výpočet poměrných úhlových deformací v případě působení smykových napětí v rovinnách ***yz*** a ***xz***. Celkové poměrné deformace se potom získají superpozicí účinků (obecný Hookeův zákon)

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

U izotropní látky platí mezi ***E***, ***G*** a υ vztah: $\frac{E}{G} = 2(1+\upsilon)$.

Nelineárně pružný materiál (plasticita)

Reálné materiály se Hookovým zákonem řídí pouze v omezené míře. Některé jen při malých napětích. Například u betonu v tlaku se předpokládá lineární závislost mezi σ a ε, tedy platnost Hookeova zákona, do 40% hodnoty napětí pevnosti betonu v tlaku.

Pružné působení materiálu je ohraničeno mezí pružnosti. Při vyšších napětích, zejména po překročení meze kluzu vnikají již plastické deformace, které mají nevratný charakter.

Při výpočtech se skutečný materiálový model nahrazuje zjednodušeným ***ideálním pružnoplastickým modelem*** (bez zpevnění, se zpevněním), který lze popsat pomocí:

a) ***pružná větev***: materiál se nachází v pružném stavu a řídí se Hookovým zákonem, *(napětí je menší než napětí na mezi kluzu)*
b) ***plastickou větev***: materiál je zplastizován, Hookeův zákon neplatí, *(napětí je větší než napětí na mezi kluzu –deformace mohou volně narůstat)*
c) ***větev odlehčení***: větev odlehčení je rovnoběžná s tečnou vedenou počátkem materiálového modelu. V případě odlehčení na pružné větvi nevznikají žádné nevratné deformace. Toto však neplatí v případě odlehčení na plastické větvi.

Plastická větev ideálně pružnoplastického materiálového modelu není omezena. Ve skutečnosti toto není možné, proto se omezení plastické větve provádí pomocí ***tažnosti*** (tj. plastické protažení tyče, např. betonářská výztuž má tažnost 15%).