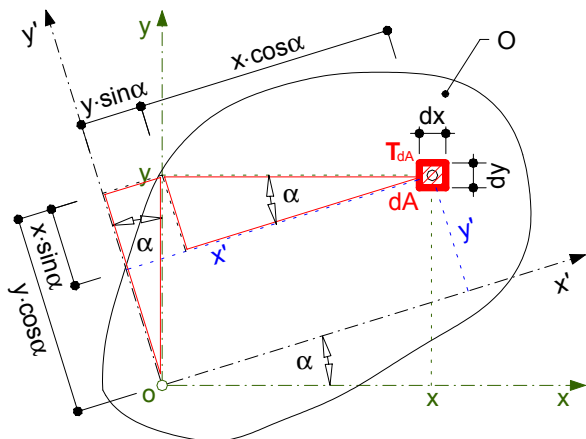


TRANSFORMAČNÍ VZTAHY PRO KVADRATICKE MOMENTY ROVINNÝCH OBRAZCŮ

Transformační vztahy pro momenty setrvačnosti a deviační momenty k pootočeným osám, hlavní momenty setrvačnosti

V souřadnicové soustavě xy je definován obecný rovinný obrazec O . Vztahy pro výpočet kvadratických momentů (I_x, I_y, D_{xy}) k těmto osám jsou uvedeny textu přednášky č.7. V některých případech je nutné provést výpočet kvadratických momentů k osám $x'y'$, které jsou pootočené od os xy o úhel α .



Určení velikosti kvadratických momentů k pootočeným osám lze provést analyticky nebo graficky pomocí **Mohrovy kružnice**.

Analytické řešení

Pro souřadnice těžiště T_{dA} plošného diferenciálního elementu dA v pootočené soustavě souřadnic $x'y'$ platí vztahy (výpočet pomocí Δ)

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Dosazením těchto vztahů do základních vztahů pro výpočet kvadratických momentů se získají vztahy pro výpočet momentů setrvačnosti $I_{x'}$, $I_{y'}$ a deviačního momentu $D_{x'y'}$ k pootočeným osám

$$(*) \quad I_{x'} = \int_0 y'^2 dA = \int_0 (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$(*) \quad I_{y'} = \int_0 x'^2 dA = \int_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$(*) \quad D_{x'y'} = \int_0 x'y' dA = \int_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha.$$

Z výše uvedených vztahů (*), (*) a (*) vyplývá, že při libovolné změně velikosti úhlu pootočení souřadných os α dochází ke změně hodnot kvadratických momentů. Pro určitou velikost úhlu α označeného jako α_0 resp. osy x_0y_0 nabývají hodnoty momentů setrvačnosti svých extrémů (**max**, **min**), přičemž deviační moment je nulový. Velikost úhlu α_0 lze zjistit stejným způsobem jako, když se hledá extrém funkce tj. pomocí derivace příslušné veličiny podle neznámé. V tomto případě lze vyjít z rovnice (*) a platí

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = -2I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2D_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

dosazení: $\alpha = \alpha_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 + D_{xy} \cos 2\alpha_0 = D_{x_0y_0} = 0$

Po úpravě vztahu se získá výraz pro výpočet úhlu α_0 – *momenty setrvačnosti nabývají extrémních hodnot k takovým osám, ke kterým má deviační moment nulovou hodnotu,*

$$(\#) \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Rovnici (#) odpovídají dva úhly α_0 a $\alpha_0 + \pi/2$, které určují polohu os x_0y_0 .

Po výpočtu úhlu odklonu α_0 je možné definovat **hlavní momenty setrvačnosti** I_{x_0}, I_{y_0} jako extrémní hodnoty momentů setrvačnosti příslušející hlavním osám setrvačnosti x_0y_0 , které jsou pootočené o úhel α_0 . Při odvozování se do vztahů (*), (*) dosadí (#)

$$I_{x_0} = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0,$$

$$I_{y_0} = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0,$$

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha_0), \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_0),$$

$$I_{x_0} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0,$$

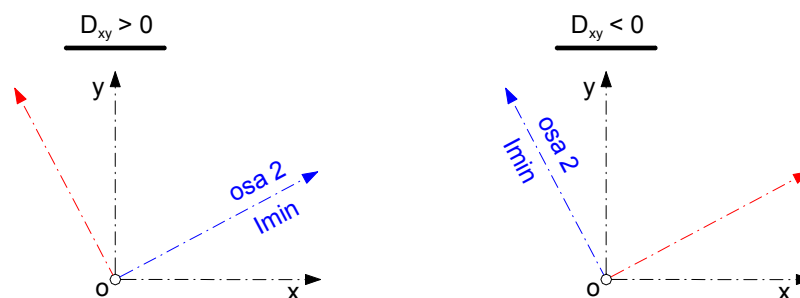
$$I_{y_0} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0,$$

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}, \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}.$$

Po úpravě lze vztahy pro výpočet hlavních momentů setrvačnosti psát ve tvaru

$$I_{\max[\min]} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}.$$

Při výpočtech platí $I_1 = I_{\max}, I_2 = I_{\min}$ tj. $I_1 > I_2$. Hlavním momentům setrvačnosti příslušejí **hlavní osy setrvačnosti** označované jako 1, 2. Je-li deviační moment kladný, potom osa setrvačnosti, které přísluší maximální moment setrvačnosti prochází II. a IV. kvadrantem. V opačném případě je tomu právě naopak.



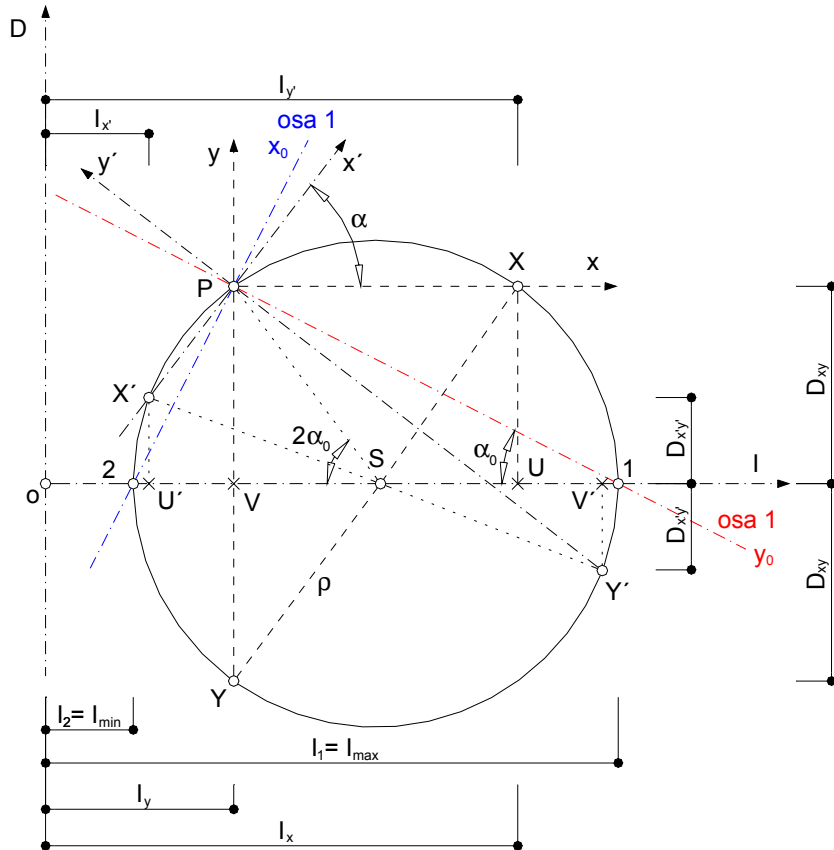
Mezi momenty setrvačnosti k původním osám I_x, I_y ; k pootočeným osám $I_{x'}, I_{y'}$, a k hlavním osám setrvačnosti I_{\max}, I_{\min} platí vztah

$$I_{x'} + I_{y'} = I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y,$$

který vyjadřuje konstantní hodnotu součtu momentů setrvačnosti rovinného obrazce ke dvěma libovolným na sebe navzájem kolmým osám, které prochází společným bodem o . Tento vztah se nazývá **prvním-lineárním invariantem momentů setrvačnosti**. Výše uvedený součet je roven polárnímu momentu setrvačnosti rovinného obrazce pro bod o .

Grafické řešení - Mohrova kružnice

Hlavní momenty setrvačnosti lze také stanovit graficky pomocí *Mohrovy kružnice*. Před sestrováním kružnice se předpokládá, že jsou známy hodnoty kvadratických momentů k centrálním osám. Postup je zřejmý z obrázku.



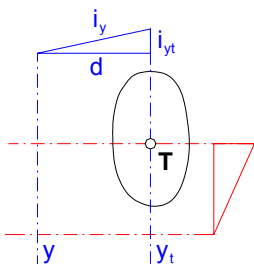
Poloměr setrvačnosti

Poloměr setrvačnosti k ose x i_x resp. k ose y i_y rovinného obrazce se určí pomocí momentů setrvačnosti k příslušným osám I_x, I_y a plochy průřezu A pomocí vztahů

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Pomocí uvedených vztahů lze také určit momenty setrvačnosti I_x, I_y jako součin plochy průřezu a druhé mocniny poloměrů setrvačnosti i_x a i_y

$$I_x = Ai_x^2, \quad I_y = Ai_y^2.$$



Po dosazení a úpravě výše uvedených vztahů do vztahů pro výpočet momentů setrvačnosti k libovolným vzájemně rovnoběžným osám z nichž jedna prochází těžištěm (viz. Steinerova věta) lze pro poloměry setrvačnosti psát

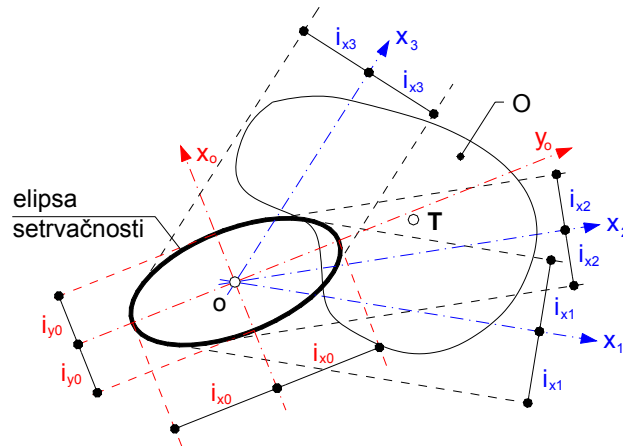
$$I_x = I_{x_t} + Ac^2 \rightarrow Ai_x^2 = Ai_{x_t}^2 + Ac^2 \rightarrow i_x^2 = i_{x_t}^2 + c^2,$$

$$I_y = I_{y_t} + Ad^2 \rightarrow Ai_y^2 = Ai_{y_t}^2 + Ad^2 \rightarrow i_y^2 = i_{y_t}^2 + d^2.$$

Poloměry setrvačnosti k hlavním osám se nazývají *hlavní poloměry setrvačnosti* a k hlavním centrálním osám pak *hlavní centrální poloměry setrvačnosti*.

Elipsa setrvačnosti

V souřadnicové soustavě xy s počátkem o je definován obecný rovinný obrazec O o ploše A . Počátkem soustavy souřadnic o jsou vedeny pod různými úhly osy $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Pomocí momentů setrvačnosti zjištěných k těmto osám $I_{x1}, I_{x2}, I_{x3}, \dots, I_{xn}$ a plochy obrazce A lze stanovit velikosti poloměrů setrvačnosti $i_{x1}, i_{x2}, i_{x3}, \dots, i_{xn}$. Elipsa setrvačnosti se středem v bodě o vznikne sestrojením dvou rovnoběžek ve vzdálenosti $\pm(i_{x1}, i_{x2}, i_{x3}, \dots, i_{xn})$ ke každé z os $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.



Mezi všemi osami x_i se nachází tzv. **hlavní osy setrvačnosti** x_0y_0 , z nichž vždy jedna prochází v blízkosti těžiště obrazce T a druhá je na ni kolmá. Potom jsou osy x_0y_0 hlavními osami elipsy setrvačnosti, přičemž pro délku hlavních poloos elipsy platí vztahy

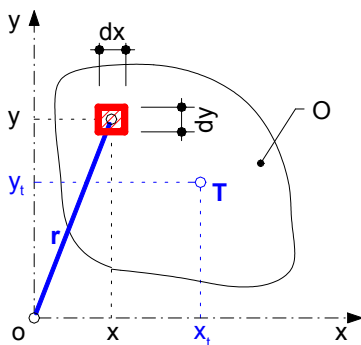
$$a = i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}, \quad b = i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Elipsa setrvačnosti je v soustavě souřadnic xy popsána rovnicí

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2D_{xy} xy = \frac{I_x I_y - D_{xy}^2}{A}.$$

Elipsa setrvačnosti sestavená pro těžiště obrazce T se nazývá **centrální elipsa setrvačnosti** a její poloosy tvoří centrální poloměry setrvačnosti.

Polární moment setrvačnosti



Polární moment setrvačnosti I_o rovinného obrazce O je momentem, který je vztažený k libovolnému bodu o , který leží v rovině obrazce vně nebo uvnitř. Polární moment setrvačnosti I_o je definován pomocí vztahu

$$I_o = \int_A r^2 dA,$$

kde r je vzdálenost (průvodič) plošného elementu $dA=dx \cdot dy$ od daného bodu o a platí pro ni vztah $r^2 = x^2 + y^2$.

Polární moment setrvačnosti rovinného obrazce lze definovat také pomocí upraveného vztahu

$$(\diamond) I_o = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y.$$

Ze vztahu (♦) vyplývá, že polární moment setrvačnosti I_o rovinného obrazce O k bodu o je roven součtu dvou momentů setrvačnosti I_x a I_y ke dvěma libovolným vzájemně kolmým osám xy , které procházejí bodem o resp. se jedná o hodnotu prvního-lineárního invariantu momentů setrvačnosti.

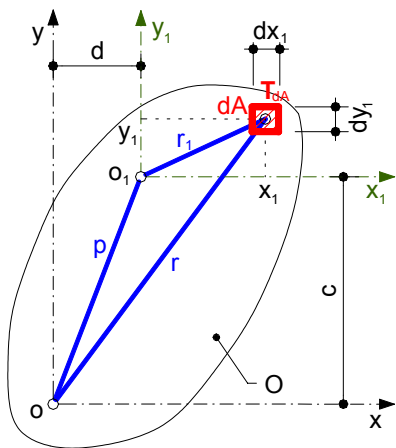
Z prvního-lineárního invariantu momentů setrvačnosti vyplývá, že velikost polárního momentu setrvačnosti I_o není závislá na směrech vzájemně kolmých os xy , které procházejí bodem o .

Polární moment setrvačnosti ke dvěma libovolným bodům

Je-li znám polární moment setrvačnosti I_{o_1} k libovolnému bodu o_1 ležícího v rovině obrazce, potom lze pomocí něj stanovit polární moment setrvačnosti I_o k libovolnému jinému bodu o , který rovněž leží v rovině obrazce. Pro vzdálenost plošného elementu r a polární moment setrvačnosti I_o potom platí (U_{x_1} , U_{y_1} jsou statické momenty obrazce k osám x_1 , y_1)

$$r^2 = (x_1 + d)^2 + (y_1 + c)^2,$$

$$I_o = \int_o [(x_1 + d)^2 + (y_1 + c)^2] dA = I_{o_1} + 2cU_{x_1} + 2dU_{y_1} + (c^2 + d^2)A,$$



V případě, že bod o_1 je současně těžištěm rovinného obrazce bude mít vztah pro výpočet I_o tvar

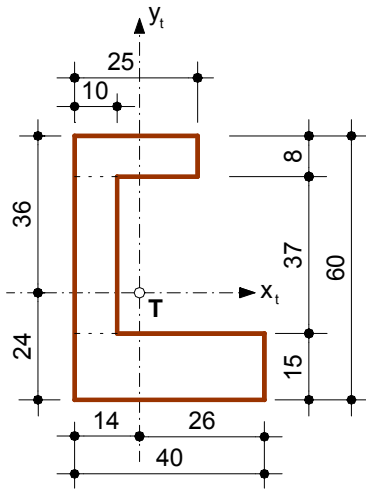
$$I_o = I_t + (c^2 + d^2)A = I_t + Ap^2,$$

kde p udává vzdálenost bodů o a o_1 ; $p = \sqrt{c^2 + d^2}$.

Rovnice pro výpočet I_o vyjadřuje, že polární moment setrvačnosti rovinného obrazce k libovolnému bodu o roviny obrazce je roven součtu polárního momentu setrvačnosti I_t obrazce k jeho těžišti T a plochy obrazce A vynásobené čtvercem vzdálenosti p .

Příklad č.8/1

Na obrázku je tvarově i rozměrově zadán složený rovinný obrazec. Výpočtem byla zjištěna poloha těžiště $T[x_t = 14\text{cm}; y_t = 24\text{cm}]$. Těžištěm T prochází těžištní osy $x_t y_t$, které jsou rovnoběžné s osami souřadnicového systému xy resp. se stranami rovinného obrazce. K těmto těžištním osám byly vypočteny kvadratické momenty $I_{x_t} = 456070\text{cm}^4$; $I_{y_t} = 145520\text{cm}^4$ a $D_{x_t y_t} = -100635\text{cm}^4$. Úkolem je:



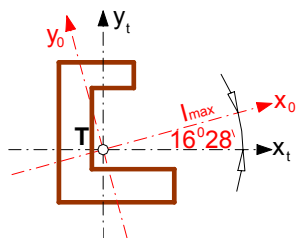
1. určit velikost hlavních centrálních momentů setrvačnosti I_{max} , I_{min} ,
2. určit směry hlavních centrálních os setrvačnosti $x_0 y_0$ a zjistit jejich příslušnost k I_{max} , I_{min} ,
3. provést kontrolu velikosti I_{max} , I_{min} a kontrolu velikosti deviačního momentu $D_{x_0 y_0}$ k hlavním centrálním osám setrvačnosti ($D_{x_0 y_0} = 0$),
4. zjistit zda v daném příkladě platí prvním-lineární invariant momentů setrvačnosti.

1. Určení velikosti hlavních centrálních momentů setrvačnosti I_{max} , I_{min} .

$$I_{\max[\min]} = \frac{1}{2}(456\,070 + 145\,520) + \frac{1}{[-]2} \sqrt{(456\,070 - 145\,520)^2 + 4 \cdot 100\,635^2}$$

$$I_{\max[\min]} = 300\,795 + 185\,034,4 \rightarrow I_{\max} = 485\,829,4\text{cm}^4; I_{\min} = 115\,760,6\text{cm}^4$$

2. Určení směru hlavních centrálních os setrvačnosti $x_0 y_0$.



$$2\alpha_0 = \text{arctg} \frac{2 \cdot (-100\,635)}{145\,520 - 456\,070} \rightarrow 2\alpha_0 = 0,575\,044\text{ rad}$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} 0,287\,522 = 16,473\,797^\circ = 16^\circ 28' 26'' \\ 1,858\,318 = 106,473\,79^\circ = 106^\circ 28' 26'' \end{cases}$$

Protože je hodnota deviačního momentu $D_{x_t y_t}$ záporná je osa x_0 osou I_{max} a svírá s těžištní osou x_t úhel $16^\circ 28' 26''$. Potom je osa y_0 osou I_{min} .

3. Kontrola velikosti I_{max} , I_{min} a kontrola velikosti deviačního momentu $D_{x_0 y_0}$ k hlavním centrálním osám setrvačnosti.

pro výpočet je zavedeno označení: $x_0 = \bar{x}$, $y_0 = \bar{y}$, $\alpha_0 = \alpha$

$$\alpha = 16,473\,797^\circ \quad \sin \alpha = 0,283\,576 \quad \cos \alpha = 0,958\,949$$

$$2\alpha = 32,947\,594^\circ \quad \sin 2\alpha = 0,543\,871 \quad \cos 2\alpha = 0,839\,168$$

$$I_{\bar{x}} = 456\,070 \cdot 0,958\,949^2 + 145\,520 \cdot 0,0283\,576^2 + 100\,635 \cdot 0,543\,871 = 485\,829,3\text{cm}^4 \doteq I_{\max}$$

$$I_{\bar{y}} = 456\,070 \cdot 0,283\,576^2 + 145\,520 \cdot 0,958\,949^2 - 100\,635 \cdot 0,543\,871 = 115\,760,6\text{cm}^4 \doteq I_{\min}$$

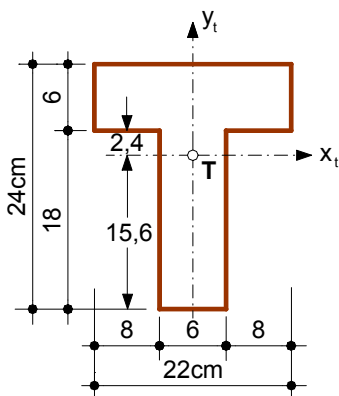
$$D_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{1}{2}(456\,070 - 145\,520) \cdot 0,543\,871 - 100\,635 \cdot 0,839\,168 = -0,036\text{cm}^4 \doteq 0$$

4. Kontrola platnosti prvního-lineárního invariantu momentů setrvačnosti.

$$I_{x_t} + I_{y_t} = 601\,590\text{cm}^4, \quad I_{\max} + I_{\min} = 601\,590\text{cm}^4$$

Příklad č.8/2

Na obrázku je tvarově i rozměrově zadán složený jednoose symetrický rovinný obrazec tvaru T.



Výpočtem byla zjištěna poloha těžiště $T[x_t = 11\text{cm}; y_t = 15,6\text{cm}]$. Těžištěm T prochází těžištní osy x_t, y_t , které jsou rovnoběžné s osami souřadnicového systému xy resp. se stranami obrazce. K těmto těžištním osám byly vypočteny kvadratické momenty $I_{x_t} = 11865,6\text{cm}^4$; $I_{y_t} = 5648,0\text{cm}^4$. Úkolem je:

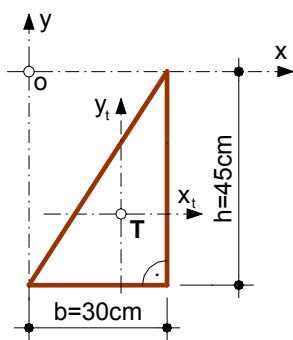
1. určit velikost hlavních centrálních poloměrů setrvačnosti i_{x_t}, i_{y_t} zadaného průřezu.

1. Určení velikosti hlavních centrálních poloměrů setrvačnosti i_{x_t}, i_{y_t} .

$$A = 22 \cdot 6 + 6 \cdot 18 = 240\text{ cm}^2$$

$$i_{x_t} = \sqrt{\frac{11865,6}{240}} = 7,03\text{ cm}, \quad i_{y_t} = \sqrt{\frac{5648,0}{240}} = 4,85\text{ cm}$$

Příklad č.8/3



Určete a sestrojte elipsu setrvačnosti pravoúhlého trojúhelníka zobrazeného na obrázku. Střed elipsy setrvačnosti při vykreslování umístěte do pomocného souřadného systému xy , který je rovnoběžný s těžištním souřadnicovým systémem x_t, y_t ($x||x_t$; $y||y_t$). Při výpočtu velikostí kvadratických momentů k osám xy využijte následující vztahy pro výpočet kvadratických momentů pravoúhlého trojúhelníka k jeho těžištním osám x_t, y_t $I_{x_t} = (1/36)bh^3$, $I_{y_t} = (1/36)b^3h$, $D_{x_t, y_t} = +(1/72)b^2h^2$.

Úkolem je:

1. určit kvadratické momenty k těžištním osám I_{x_t}, I_{y_t} ,
2. určit kvadratické momenty k osám xy I_x, I_y ,
3. určit délky hlavních poloos a, b elipsy setrvačnosti,
4. určit směry hlavních os x_0, y_0 elipsy setrvačnosti.

1. Výpočet kvadratickým momentů k těžištním osám x_t, y_t .

$$I_{x_t} = \frac{1}{36} \cdot 30 \cdot 45^3 = 75\,937,5\text{ cm}^4$$

$$I_{y_t} = \frac{1}{36} \cdot 30^3 \cdot 45 = 33\,750,0\text{ cm}^4$$

$$D_{x_t, y_t} = +\frac{1}{72} \cdot 30^2 \cdot 45^2 = +25\,312,5\text{ cm}^4$$

2. Výpočet kvadratickým momentů k osám xy .

$$I_x = 75\,937,5 + 675 \cdot 30^2 = 683\,437,5\text{ cm}^4$$

$$A = 0,5 \cdot 30 \cdot 45 = 675\text{ cm}^2 \quad I_y = 33\,750,0 + 675 \cdot 20^2 = 303\,750,0\text{ cm}^4$$

$$D_{xy} = 25\,312,5 - 675 \cdot 20 \cdot 30 = -379\,687,5\text{ cm}^4$$

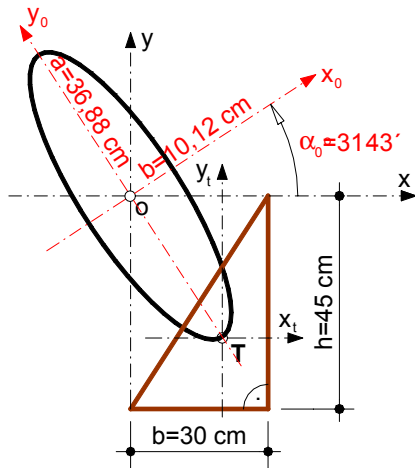
3. Výpočet délek hlavních poloos a, b elipsy setrvačnosti.

$$I_{\max[\min]} = \frac{1}{2} (683\,437,5 + 303\,750,0) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(683\,437,5 - 303\,750,0)^2 + 4 \cdot 379\,687,5^2}$$

$$I_{\max[\min]} = 493\,593,75 + 424\,503,51 \rightarrow I_{\max} = 918\,097,26 \text{ cm}^4; I_{\min} = 69\,090,24 \text{ cm}^4$$

$$a = i_{x_0} = \sqrt{\frac{918\,097,26}{675}} = 36,88 \text{ cm}, \quad b = i_{y_0} = \sqrt{\frac{69\,090,24}{675}} = 10,12 \text{ cm}$$

4. Výpočet směrů hlavních os x_0y_0 elipsy setrvačnosti.



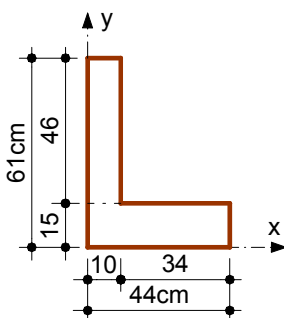
$$2\alpha_0 = \arctg \frac{-2 \cdot 379\,687,5}{303\,750,0 - 683\,437,5} = 1,107149$$

$$\alpha_0 = 0,553574 = 31,717748 = 31^\circ 43'$$

$$\alpha_0 + 90^\circ = 121^\circ 43'$$

Osa x_0 svírá s osou x úhel α_0 a osa y_0 svírá s osou x úhel $\alpha_0 + 90^\circ$. Osa y_0 je vždy ta osa, která prochází poblíž těžiště rovinného obrazce.

Příklad č.8/3



Vypočítejte a sestrojte centrální elipsu setrvačnosti rovinného obrazce tvaru L. Při výpočtu uvažujte, že průřez je tvořen ze dvou obdélníků (viz. obrázek). Úkolem je:

1. určit polohu těžiště T rovinného obrazce o souřadnicích x_t, y_t ,
2. určit kvadratické momenty k těžištním osám I_{x_t}, I_{y_t} ,
3. určit délky hlavních poloos a, b elipsy setrvačnosti,
4. určit směry hlavních os x_0y_0 elipsy setrvačnosti.

1. Výpočet polohy těžiště T rovinného obrazce o souřadnicích x_t, y_t .

$$A = 44 \cdot 15 + 10 \cdot 46 = 1120 \text{ cm}^2$$

$$x_t = \frac{1}{1120} (44 \cdot 15 \cdot 22 + 10 \cdot 46 \cdot 5) = 15,018 \doteq 15 \text{ cm}$$

$$y_t = \frac{1}{1120} (44 \cdot 15 \cdot 7,5 + 10 \cdot 46 \cdot 38) = 20,027 \doteq 20 \text{ cm}$$

2. Výpočet kvadratickým momentů k těžištním osám I_{x_t}, I_{y_t} .

$$I_{x_t} = \frac{1}{12} \cdot 44 \cdot 15^3 + 44 \cdot 15 \cdot 12,5^2 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 46^3 + 10 \cdot 46 \cdot 18^2 = 345\,653,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_t} = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 44^3 + 44 \cdot 15 \cdot 7,0^2 + \frac{1}{12} \cdot 46 \cdot 10^3 + 10 \cdot 46 \cdot 10^2 = 188\,653,33 \text{ cm}^4$$

$$D_{x_t, y_t} = 0 - 44 \cdot 15 \cdot 7,0 \cdot 12,5 + 0 - 10 \cdot 46 \cdot 10 \cdot 18 = -140\,550,0 \text{ cm}^4$$

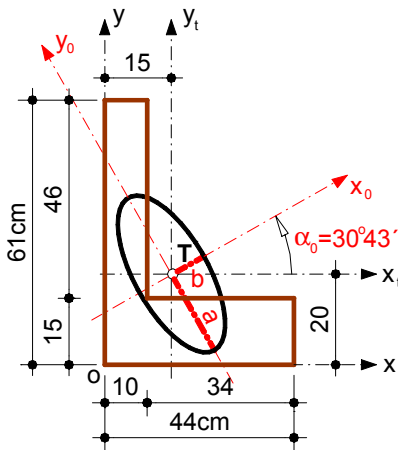
3. Výpočet délek hlavních poloos a, b elipsy setrvačnosti.

$$I_{\max[\min]} = \frac{1}{2} (345\,653,33 + 188\,653,33) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(353\,653,33 - 188\,653,33)^2 + 4 \cdot 140\,550,0^2}$$

$$I_{\max[\min]} = 267\,153,33 + 160\,986,17 \rightarrow I_{\max} = 428\,139,5 \text{ cm}^4; I_{\min} = 106\,167,16 \text{ cm}^4$$

$$a = i_{x_0} = \sqrt{\frac{428\,139,5}{1120}} = 19,55 \text{ cm}, \quad b = i_{y_0} = \sqrt{\frac{106\,167,16}{1120}} = 9,74 \text{ cm}$$

4. Výpočet směrů hlavních os x_0y_0 elipsy setrvačnosti.



$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{-2 \cdot 140\,550,0}{188\,653,33 - 345\,653,33} = 1,061\,435$$

$$\alpha_0 = 0,530\,717 = 30,407\,873^\circ = 30^\circ 24'$$

$$\alpha_0 + 90^\circ = 120^\circ 24'$$

Protože je hodnota deviačního momentu $D_{x_t y_t}$ záporná je osa x_0 osou I_{\max} a svírá s těžištní osou x_t úhel α_0 . Potom osa y_0 svírá s osou x úhel $\alpha_0 + 90^\circ$.