

TĚŽIŠTĚ A KVADRATICKÉ MOMENTY ROVINNÝCH OBRAZCŮ

TĚŽIŠTĚ

Těžiště geometrického útvaru je definováno jako statický střed soustavy fiktivních rovnoběžných sil v rovině popř. v prostoru, které jsou rovny velikostem jednodušších částí geometrického útvaru a působí v těžištích těchto částí (viz. [1]). Pod pojmem geometrický útvar si lze představit: čáru, plochu nebo těleso, jehož hustota ρ [kg/m³] popř. měrná tíha γ [N/m³] je konstantní.

Těžiště rovinné čáry

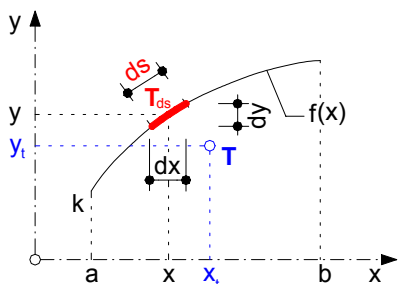
Obecná rovinná křivka

V soustavě souřadnic xy je definována libovolná homogenní rovinná křivka k , která je v intervalu $\langle a, b \rangle$ popsána funkcí $y=f(x)$. Tuto křivku lze rozdělit na konečný počet malých částí (tzv. diferenciálních elementů) ds o souřadnicích x, y . Pro diferenciální element ds lze psát

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot \sqrt{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Potom celková délka homogenní křivky k se určí pomocí určitého integrálu přes interval $\langle a, b \rangle$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$



Poloha těžiště T_{ds} diferenciálního elementu ds je na rovinné křivce k určena souřadnicemi x a y . Tuto polohu lze také stanovit pomocí statických momentů diferenciálního elementu dU_x a dU_y určených k osám x a y . Statické momenty jsou definovány jako součin délky elementu ds a kolmé vzdálenosti jeho těžiště T_{ds} od souřadnicových os x a y

$$dU_x = yds, \quad dU_y = xds.$$

Statické momenty celé obecné rovinné křivky k lze určit pomocí vztahů

$$U_x = \int_k dU_x = \int_k yds = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx = sy_t, \quad U_y = \int_k dU_y = \int_k xds = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2} dx = sx_t.$$

Potom se souřadnice těžiště $T[x_t, y_t]$ křivky k určí pomocí výrazů

$$x_t = \frac{U_y}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}, \quad y_t = \frac{U_x}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}.$$

Složená rovinná čára

Postup výpočtu souřadnic těžiště složené rovinné čáry je podobný jako v případě obecné rovinné čáry. Pod pojmem **složená rovinná čára** se rozumí čára, která se skládá z konečného počtu jednoduchých přímých popř. i zakřivených částí $k_1 \dots k_n$ délek $s_1 \dots s_n$. Celková délka složené rovinné čáry je rovna součtu délek dílčích částí

$$s = \sum_{i=1}^n s_i .$$

Před výpočtem těžiště $T[x_t, y_t]$ složené rovinné čáry je nutné zjistit souřadnice těžišť jednotlivých částí $k_1 \dots k_n$ tj. $T_1 \dots T_n$ tj. $[x_{t1}, y_{t1}] \dots [x_{tn}, y_{tn}]$. Potom pro souřadnice těžiště složené rovinné čáry $T[x_t, y_t]$ platí

$$x_t = \frac{U_y}{s} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i x_{ti}}{\sum_{i=1}^n s_i}, \quad y_t = \frac{U_x}{s} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i y_{ti}}{\sum_{i=1}^n s_i} .$$

Lomená čára

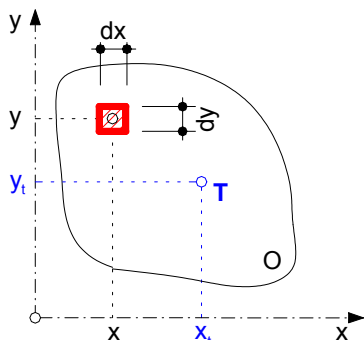
Postup určování těžiště lomené čáry je stejný jako v případě složené rovinné čáry, protože **lomená čára** je zvláštní případ složené rovinné čáry – je tvořena pouze **úsečkami**.

Těžiště rovinných obrazců

Obecný rovinný obrazec

V souřadné soustavě xy je definován libovolný rovinný obrazec O . Tento obrazec lze rozdělit na konečný počet malých prvků (tzv. diferenciálních prvků) dA o obsahu $dA = dx \cdot dy$. Celkovou plochu A obrazce O lze určit pomocí obsahů diferenciálních prvků dA

$$A = \int dA = \iint_O dx dy .$$



Poloha těžiště T_{dA} diferenciálního elementu dA je v rovinném obrazci O určena souřadnicemi x a y . Tuto polohu lze také stanovit pomocí statických momentů diferenciálního elementu dU_x a dU_y určených k osám x a y . Statické momenty jsou definovány jako součin délky elementu dA a kolmé vzdálenosti jeho těžiště T_{dA} od souřadnicových os x a y

$$dU_x = y dA, \quad dU_y = x dA .$$

Statické momenty celého rovinného obrazce O jsou dány vztahy

$$U_x = \int dU_x = \int y dA = \iint_O y dx dy, \quad U_y = \int dU_y = \int x dA = \iint_O x dx dy .$$

Potom se souřadnice těžiště $T[x_t, y_t]$ obecného rovinného obrazce O určí pomocí výrazů

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\iint_O x dx dy}{\iint_O dx dy}, \quad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\iint_O y dx dy}{\iint_O dx dy} .$$

Statický moment rovinného obrazce O k libovolné ose jdoucí těžištěm je roven nule. Přemístěním počátku soustavy souřadnic do těžiště rovinného obrazce T bude pro souřadnice a statické momenty platit: $x_t = y_t = 0$ a $U_x = U_y = 0$.

Složený rovinný obrazec

Při výpočtu se složený rovinný obrazec rozdělí na konečný počet jednoduchých částí $O_1 \dots O_n$ (např. obdélník, kruh, čtverec), pro které se určí plochy $A_1 \dots A_n$ a souřadnice těžišť $T_1 \dots T_n$ tj. $[x_{t1}, y_{t1}] \dots [x_{tn}, y_{tn}]$. Celkovou plochu lze potom určit jako součet dílčích ploch

$$A = \sum_{i=1}^n A_i .$$

Potom pro souřadnice těžiště složeného rovinného obrazce $T[x_t, y_t]$ platí

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ti}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ti}}{\sum_{i=1}^n A_i} .$$

Těžiště těles

Obecné homogenní těleso

V souřadné soustavě xzy je definováno libovolné homogenní těleso Ω . Toto těleso lze rozdělit na konečný počet malých prvků (tzv. diferenciálních prvků) dV ve tvaru hranolu popř. kvádrů o hranách dx , dy a dz a o objemu $dV=dx \cdot dy \cdot dz$. Celkový objem tělesa Ω lze určit pomocí objemů diferenciálních prvků dV

$$V = \int_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz .$$

Poloha těžiště T_{dV} diferenciálního elementu dV je v tělese Ω určena souřadnicemi x , y a z . Tuto polohu lze také stanovit pomocí statických momentů diferenciálního elementu dU_{yz} , dU_{zx} a dU_{xy} určených k osám x , y a z . Statické momenty jsou definovány jako součin délky elementu dV a kolmé vzdálenosti jeho těžiště T_{dV} od souřadnicových os x , y a z

$$dU_{yz} = x dV, \quad dU_{zx} = y dV, \quad dU_{xy} = z dV .$$

Statické momenty celého homogenního tělesa Ω jsou dány vztahy

$$U_{yz} = \int_{\Omega} dU_{yz} = \int_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} x dx dy dz = V x_t, \quad U_{zx} = \int_{\Omega} dU_{zx} = \int_{\Omega} y dV = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = V y_t, \\ U_{xy} = \int_{\Omega} dU_{xy} = \int_{\Omega} z dV = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = V z_t .$$

Potom se souřadnice těžiště $T[x_t, y_t, z_t]$ obecného homogenního tělesa Ω určí pomocí vztahů

$$x_t = \frac{U_{yz}}{V} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} x dV, \quad y_t = \frac{U_{zx}}{V} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} y dV, \quad z_t = \frac{U_{xy}}{V} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} z dV .$$

Složené homogenní těleso

Při výpočtu se složené homogenní těleso rozdělí na konečný počet jednoduchých částí $\Omega_1 \dots \Omega_n$ (např. kvádr, krychle), pro které se určí objemy $V_1 \dots V_n$ a souřadnice těžišť $T_1 \dots T_n$ tj. $[x_{t1}, y_{t1}, z_{t1}] \dots [x_{tn}, y_{tn}, z_{tn}]$. Celkový objem lze potom určit jako součet dílčích objemů

$$V = \sum_{i=1}^n V_i .$$

Potom pro souřadnice těžiště složeného homogenního tělesa $T[x_t, y_t, z_t]$ platí

$$x_t = \frac{U_{yz}}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_{ti}}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad y_t = \frac{U_{zx}}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_{ti}}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad z_t = \frac{U_{xy}}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_{ti}}{\sum_{i=1}^n V_i} .$$

KVADRATICKÉ MOMENTY ROVINNÝCH OBRAZCŮ

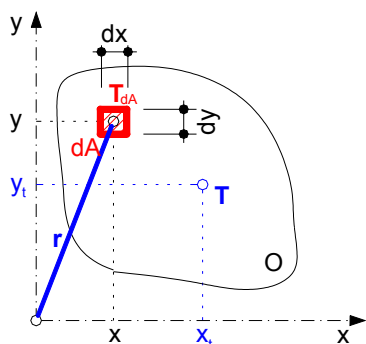
Kvadratické momenty rovinných obrazců patří k dalším geometrickým charakteristikám, které se využívají při statických analýzách prutových konstrukcí. Pod pojmem **kvadratické momenty** (**momenty druhého stupně**) rovinných obrazců rozumíme:

- **I** ... momenty setrvačnosti rovinných obrazců,
- **D** ... deviační momenty rovinných obrazců.

Při výpočtech kvadratických momentů se násobí plošný prvek dA druhou mocninou délek x resp. y nebo součinem délek x a y .

Momenty setrvačnosti a deviační momenty jednoduchých obrazců

Momenty setrvačnosti jednoduchých obrazců



Vztáhle-li se obecný rovinný obrazec O k libovolným souřadnicovým osám x, y , které leží v rovině obrazce, jsou momenty setrvačnosti diferenciálního plošného prvku $dA=dx \cdot dy$ k těmto osám definovány výrazy

$$dI_x = y^2 dA, \quad dI_y = x^2 dA.$$

Momenty setrvačnosti celého rovinného obrazce O k osám souřadnic, které jsou vždy různé od nuly, lze vyjádřit ve tvaru

$$I_x = \int_0 dI_x = \int_0 y^2 dA, \quad I_y = \int_0 dI_y = \int_0 x^2 dA.$$

Momenty setrvačnosti rovinného obrazce k těžištním osám se nazývají **centrálními momenty setrvačnosti** a příslušné **osy** **centrálními osami setrvačnosti**.

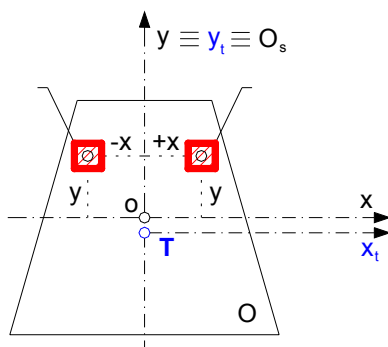
Deviační momenty jednoduchých obrazce

Vztáhle-li se obecný rovinný obrazec O současně ke dvěma libovolným osám x a y , které leží v rovině obrazce, je deviační moment diferenciálního plošného prvku $dA=dx \cdot dy$ k těmto osám definován výrazem

$$dD_{xy} = xy dA.$$

Deviační moment celého rovinného obrazce O k osám souřadnic lze vyjádřit ve tvaru

$$D_{xy} = \int_0 dD_{xy} = \int_0 xy dA.$$

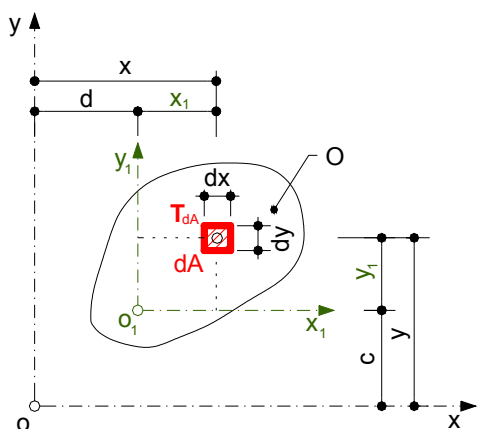


Osy k nimž má deviační moment nulovou hodnotu se nazývají **hlavní osy setrvačnosti**. Prochází-li tyto osy těžištěm rovinného obrazce potom se tyto osy nazývají **hlavními centrálními osami setrvačnosti**.

Deviační moment rovinných obrazců s minimálně jednou osou souměrnosti procházející těžištěm nabývá nulové hodnoty, např. kruh, čtverec, obdélník apod.

Transformační vztahy pro momenty setrvačnosti a deviační momenty k posunutým osám

Momenty setrvačnosti ke dvěma rovnoběžným osám



V souřadnicové soustavě x_1y_1 je definován obecný rovinný obrazec O . Vztahy pro výpočet kvadratických momentů k těmto osám jsou uvedeny v předcházejícím textu. V některých případech je nutné provést výpočet kvadratických momentů k osám xy , které jsou posunuté o délky c , d od os x_1y_1 a jsou s nimi navzájem rovnoběžné. V tomto případě platí pro souřadnice plošného elementu dA vztahy

$$(*) \quad x = x_1 + d, \quad y = y_1 + c.$$

Dosazením těchto vztahů do vztahů pro výpočet momentů setrvačnosti (viz. předcházející text) se získají výrazy pro výpočet momentů setrvačnosti k posunutým osám xy

$$I_x = \int_0 y^2 dA = \int_0 (y_1 + c)^2 dA = \int_0 y_1^2 dA + 2c \int_0 y_1 dA + c^2 \int_0 dA = I_{x_1} + 2cU_{x_1} + Ac^2,$$

$$I_y = \int_0 x^2 dA = \int_0 (x_1 + d)^2 dA = \int_0 x_1^2 dA + 2d \int_0 x_1 dA + d^2 \int_0 dA = I_{y_1} + 2dU_{y_1} + Ad^2.$$

Použitím obecného zápisu, lze výše uvedené vztahy zapsat ve tvaru

$$I_x = I_{x_1} \pm 2cU_{x_1} + Ac^2 \dots \text{sgn} - (y < y_1)$$

$$I_y = I_{y_1} \pm 2dU_{y_1} + Ad^2 \dots \text{sgn} - (x < x_1).$$

V případě, že osy x_1y_1 jsou totožné s těžištními osami x_1y_1 , potom jsou statické momenty nulové a výše uvedené vztahy lze zapsat ve tvaru

$$I_x = I_{x_1} + Ac^2, \quad I_y = I_{y_1} + Ad^2,$$

které lze také popsat pomocí

Steinerovy věty: Moment setrvačnosti rovinného obrazce je roven součtu momentu setrvačnosti k rovnoběžné ose procházející těžištěm a plochy obrazce vynásobené druhou mocninou vzdáleností obou os.

Deviační moment k posunutým osám

Jedná se o stejnou úlohu jako v předcházejícím odstavci. Dosazením vztahů (*) do vztahu pro výpočet deviačního momentu se získá výraz pro výpočet deviačního momentu k posunutým osám

$$D_{xy} = \int_0 xy dA = \int_0 (x_1 + d)(y_1 + c) dA = \dots = D_{x_1y_1} + dU_{x_1} + cU_{y_1} + Acd$$

V případě, že osy x_1y_1 jsou totožné s těžištními osami x_1y_1 , potom jsou statické momenty nulové a výše uvedené vztahy lze zapsat ve tvaru

$$D_{xy} = D_{x_1y_1} + Acd,$$

který lze také popsat pomocí věty:

Deviační moment rovinného obrazce je roven součtu deviačního momentu k rovnoběžným osám procházejícím těžištěm a plochy obrazce vynásobené vzdálenostmi obou os.

Kvadratické momenty složených rovinných obrazců

Při výpočtu kvadratických momentů složených rovinných obrazců lze složené rovinné obrazce rozdělit na konečný počet (n) jednodušší obrazců, pro které se určí kvadratické momenty k vlastním těžištním osám. Použitím principu superpozice a transformačních vztahů je možné provést výpočet kvadratických momentů rovinného obrazce k osám xy pomocí vztahů

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x_i,i} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i,i} + A_i c_i^2) = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + A_i y_i^2),$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i,i} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i,i} + A_i d_i^2) = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + A_i x_i^2),$$

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n D_{x_i y_i,i} = \sum_{i=1}^n (D_{x_i y_i,i} + A_i c_i d_i) = \sum_{i=1}^n (D_{x_i y_i} + A_i x_i y_i),$$

kde

A_i ... obsah i -tého dílčího obrazce,

$$I_{x_i,i} = I_{x_i}$$

$$I_{y_i,i} = I_{y_i}$$

$D_{x_i y_i,i} = D_{x_i y_i}$... kvadratické momenty i -tého dílčího obrazce k vlastním těžištním osám $x_{t,i} = x_i$, $y_{t,i} = y_i$, které jsou rovnoběžné s osami x , y

V případě, že se v rovinném průřezu vyskytuje otvor, pak se u plochy i kvadratických momentů uvažuje záporné znaménko.