

STATIKA HMOTNÝCH OBJEKTŮ A SLOŽENÝCH SOUSTAV, STATICKÝ MODEL NOSNÍKU

Základní pojmy

Hmotný objekt je hmotný bod, tuhá deska, tuhé těleso.

Složená soustava vznikne vzájemnou kombinací hmotných objektů.

Volné objekty jsou objekty, které nejsou ve svém pohybu žádným způsobem omezeny.

Vázané objekty jsou objekty, u kterých je jejich pohyb nějakým způsobem omezen.

Objekty pevně podepřené jsou objekty, které jsou vázány takovým způsobem, že se nemohou vůbec pohybovat.

Vazby slouží k omezení nebo zabránění pohybu hmotného objektu. Tyto vazby působí v důsledku platnosti zákona „akce a reakce“ na hmotný objekt silami, tzv. **reakcemi**.

Stupeň volnosti představuje možnost hmotného objektu posunout se v daném směru nebo potočit se okolo dané osy popř. bodu v rovině a zaujmout při tom nekonečně mnoho poloh. Při výpočtech stavebních konstrukcí vždy je požadováno pevné podepření objektů, tj. takové podepření, u kterého vazby ruší všechny stupně volnosti. Podle počtu odstraněných stupňů volnosti se vazby dělí na vazby jednonásobné (1sv), dvounásobné (2sv), trojnásobné (3sv) ... šestinásobné (6sv). Dále platí, že počet stupňů volnosti, které vazba odstraňuje je roven počtu složek reakcí.

Pevné uložení hmotného objektu je takové uložení, u kterého jsou pomocí vnějších vazeb zrušeny všechny jeho stupně volnosti.

Výpočet reakcí vazeb

Při výpočtu reakcí vazeb se nejdříve hmotný objekt zcela uvolní z vazeb tzn. všechny vazby se odstraní a jejich účinek se nahradí reakcemi. Vznikne rovnovážná soustava vnějších sil tvořená vnějším zatížením a reakcemi, pro kterou lze zapsat v statických podmínek rovnováhy a pomocí nich určit a neznámých reakcí. Mohou nastat následující případy podepření:

- **staticky (SU) a kinematicky (KU) určité: $v = a$**
(počet neznámých složek reakcí vnějších vazeb je roven počtu statických podmínek rovnováhy; lze je používat ve stavební praxi)
- **staticky neurčité (SN) a kinematicky přeúřčené (KP): $v < a$**
(počet neznámých složek reakcí vnějších vazeb je větší než počet statických podmínek rovnováhy; lze je používat ve stavební praxi)
- **staticky přeúřčené (SP) a kinematicky neurčité (KN): $v > a$**
(počet neznámých složek reakcí vnějších vazeb je menší než počet statických podmínek rovnováhy; tento případ podepření nesmí nastat)

Stupeň statické určitosti / neurčitosti podepření lze zjistit pomocí výrazu: $s = a - v$.

Výjimečné případy podepření mohou nastat v případech, kdy je splněna podmínka statické a kinematické určitosti podepření hmotného objektu, ale determinant soustavy lineárních statických

podmínek rovnováhy je roven nule; $D=0$ (nevhodné uspořádání vazeb \rightarrow extrémně velké pohyby, popř. pohyby nelze určit).

Hmotný bod

Hmotný bod m lze do libovolné polohy:

- a) **v prostoru přemístit třemi posuny ve směru souřadných os.** Má tedy tři stupně volnosti ($\nu = 3$) a může zaujmout ∞^3 poloh.
- b) **v rovině přemístit dvěma posuny ve směru souřadných os.** Má tedy dva stupně volnosti ($\nu = 2$) a může zaujmout ∞^2 poloh.
- c) **na přímce přemístit jedním posunem ve směru souřadné osy.** Má tedy jeden stupeň volnosti ($\nu = 1$) a může zaujmout ∞^1 poloh.

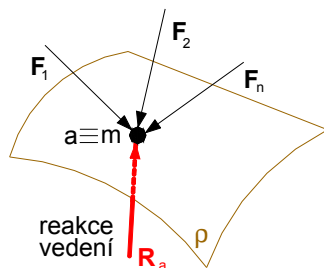
Vazby hmotného bodu

- **Hladká plocha**

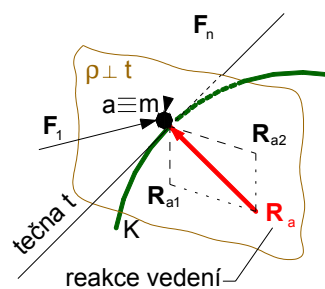
Vedení po hladké ploše ρ odebírá hmotnému bodu m jeden stupeň volnosti – pohyb bodu ve směru normály k ploše. V tomto směru působí také reakce R_a , která tento pohyb znemožňuje.

Hmotný bod m na dokonale hladké ploše je v rovnováze, když

- soustava vnějších působících sil je sama o sobě v rovnováze tj. $R = 0$
- paprsek výslednice soustavy vnějších působících sil R leží ve směru normály k ploše v bodu m a platí $R + R_a = 0$



Hladká plocha



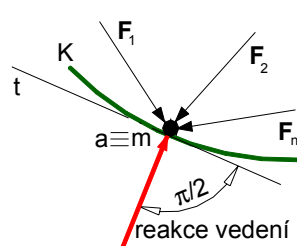
Hladká prostorová křivka

- **Hladká křivka**

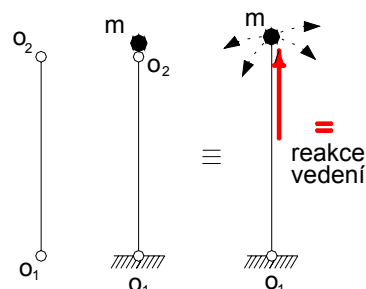
Vedení po hladké křivce K odebírá hmotnému bodu m dva stupně volnosti. V libovolném bodě křivky působí na bod m reakce R_a , která leží v normálové rovině křivky. Tato reakce brání posunu bodu v této rovině a lze ji nahradit složkami R_{a1} a R_{a2} .

Hmotný bod m na dokonale hladké křivce je v rovnováze, když

- soustava vnějších působících sil je sama o sobě v rovnováze tj. $R = 0$
- paprsek výslednice soustavy vnějších působících sil R leží v normálové rovině a platí $R + R_a = 0$



Hladká rovinná křivka



Kyvný prut

- **Kyvný prut**

Kyvný prut je přímá, dokonale tuhá a nehmotná tyč, která má koncích kulové klouby bez tření. Připojení hmotného bodu kyvným prutem v prostoru odebrává tomuto hmotnému bodu m jeden stupeň volnosti – pohyb bodu ve směru kyvného prutu. V tomto směru působí také reakce R_a , která tento pohyb znemožňuje.

Výjimkové případy

S výjimkovými případy podepření se lze setkat v případě podepření hmotného bodu m v prostoru (rovině) pomocí tří (dvou) kyvných prutů. Determinant soustavy statických podmínek rovnováhy je roven nule $D=0$.

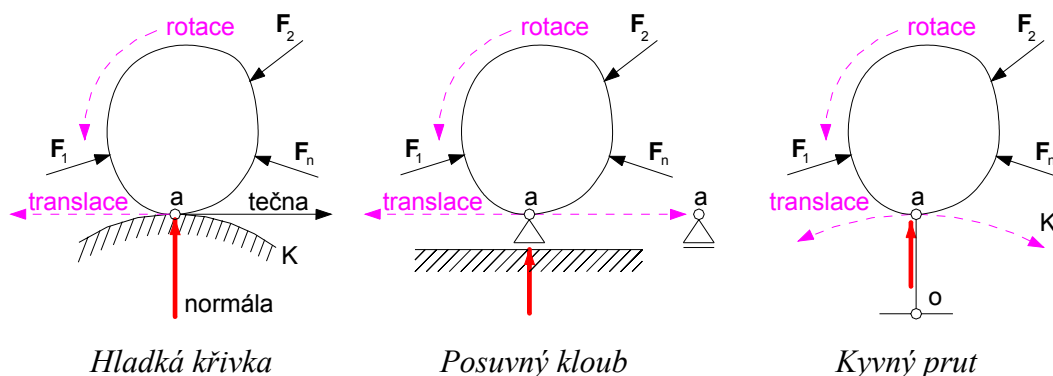
Podepření hmotného bodu pomocí kyvných prutů a výpočet reakcí

Ke SU a KU podepření hmotného bodu m v rovině (prostoru) je zapotřebí dvou (tří) kyvných prutů. Výpočet reakcí se provádí pomocí statických podmínek rovnováhy.

Tuhá deska v rovině

Tuhou desku D v rovině lze do libovolné polohy přemístit dvěma translačními posuny ve směru souřadnicových os a jedním pootočením okolo libovolného bodu desky. Má tedy tři stupně volnosti ($\nu = 3$) a může zaujmout ∞^3 poloh.

Vazby tuhé desky v rovině



- **Hladká křivka a posuvný kloub**

Vedení po hladké křivce K odebrává tuhé desce v rovině D jeden stupeň volnosti. V libovolném bodě křivky působí na tuhou desku D reakce R_a , která leží v normále ke křivce. Tato reakce brání posunu bodu v tomto směru. *Jestliže je libovolný bod křivky neustále vázán na hladnou křivku nebo přímku, kolem kterého se deska může pootáčet, pak takové vedení se nazývá posuvné nebo posuvný kloub.*

- **Kyvný prut**

Připojení tuhé desky D v rovině kyvným prutem odebrává této tuhé desce jeden stupeň volnosti – pohyb bodu ve směru kyvného prutu. V tomto směru působí také reakce R_a , která tento pohyb znemožňuje. *Uložení pomocí kyvného prutu je adekvátní s posuvným uložením na křivce.*

- **Pevný neposuvný kloub**

Připojení tuhé desky D v rovině pomocí pevného kloubu odebrává tuhé desce dva stupně volnosti – translační pohyby ve směru souřadnicových os. Posunu desky brání reakce R_a , kterou lze nahradit složkami R_{ax} a R_{ay} .

$$R_a = \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2}; \quad \cos \alpha_a = \frac{R_{ax}}{R_a}, \quad \sin \alpha_a = \frac{R_{ay}}{R_a}$$

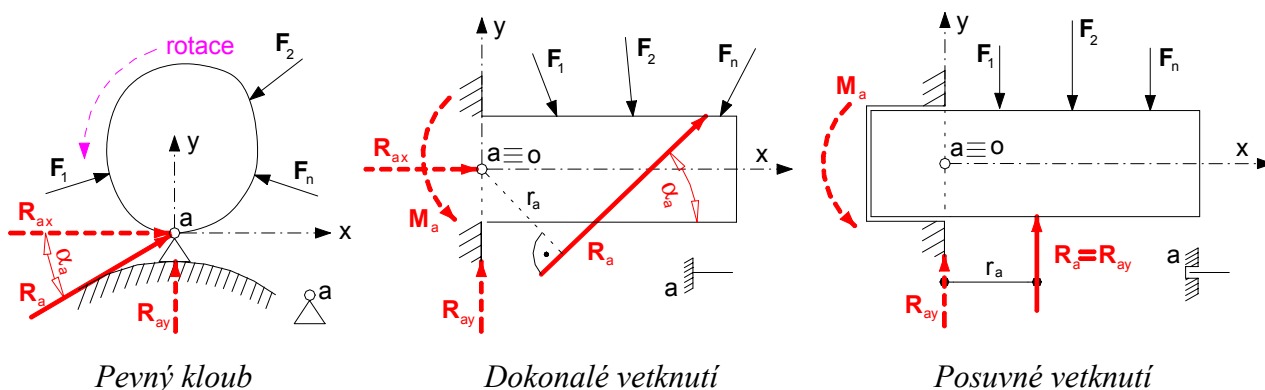
Dokonalé vetknutí

Dokonalé vetknutí existuje v případě dokonale tuhé spojení desky s pevným útvarem. Tento typ uložení odebrává tuhé desky **D** v rovině tři stupně volnosti – dva translační pohyby, jeden rotační pohyb. Pohybům desky brání reakce **R_a**, kterou lze ekvivalentně nahradit: vodorovnou **R_{ax}** a svislou silou **R_{ay}** a ohybovým momentem **M_a**, který působí v teoretickém bodě vetknutí.

$$M_a = R_a r_a \Rightarrow r_a = \frac{M_a}{R_a}$$

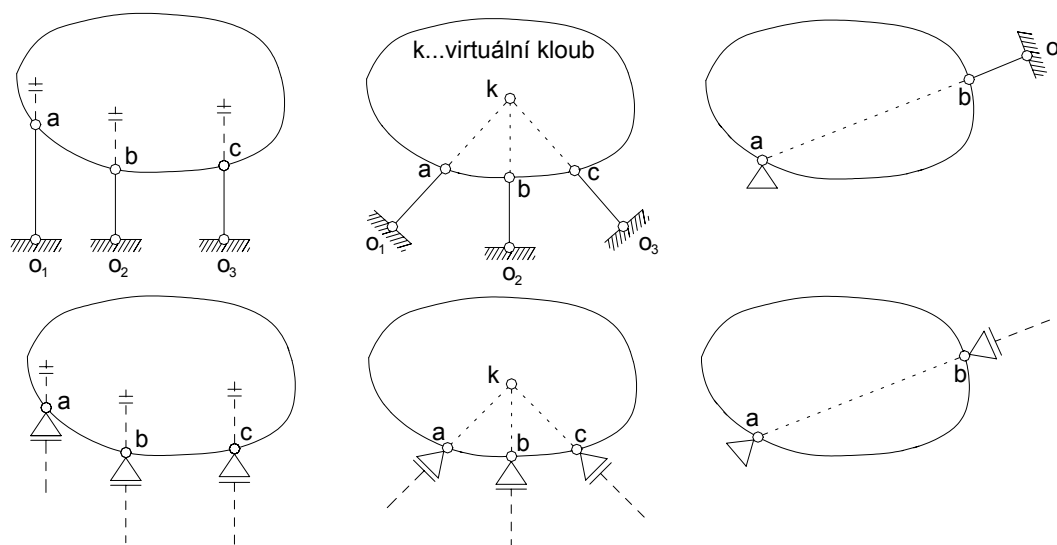
Posuvné vetknutí

Posuvné vetknutí odebrává tuhé desky **D** v rovině dva stupně volnosti – jeden translační pohyb, jeden rotační pohyb. Pohybům desky brání reakce **R_a**, kterou lze ekvivalentně nahradit: vodorovnou **R_{ax}** resp. svislou silou **R_{ay}** (podle způsobu uložení) a ohybovým momentem **M_a**, který působí v teoretickém bodě vetknutí.



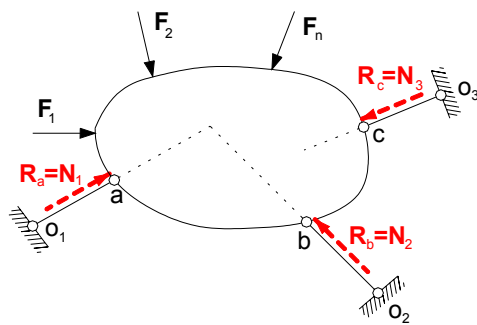
Výjimečné případy

U výjimečných případů podepření tuhé desky **D** v rovině je determinant soustavy tří statických podmínek rovnováhy roven nule **D=0**.

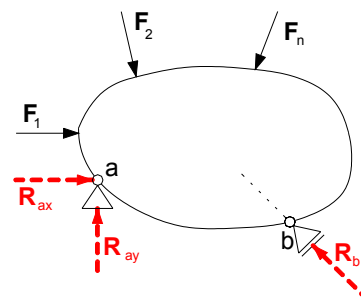


Podepření tuhé desky v rovině a výpočet reakcí

SU a KU podepření tuhé desky **D** v rovině lze zajistit vzájemnou kombinací výše uvedených typů vazeb, které zruší tři stupně volnosti. Výpočet reakcí se provádí pomocí statických podmínek rovnováhy.



Deska podepřená třemi třemi kyvnými pruty

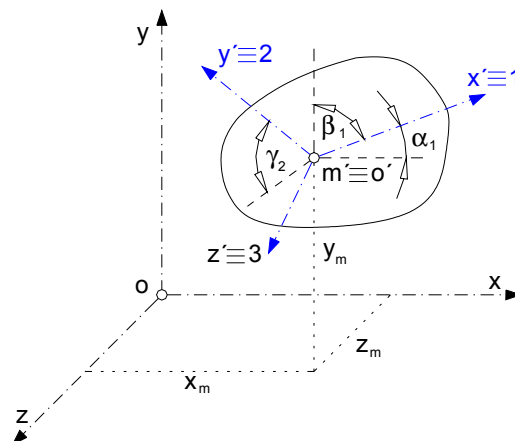


Deska podepřená pevným a posuvným kloubem

Podmínka staticky určitého podepření tuhé desky: $\sum_k ka_k = 3 \dots k = 1, 2, 3$.

Tuhé těleso v prostoru

Tuhé těleso T v prostoru lze do libovolné polohy přemístit třemi translačními posuny ve směru souřadnicových os a třemi pootočeními okolo stejných os. Má tedy šest stupňů volnosti ($\nu = 6$) a může zaujmout ∞^6 poloh. Polohu tuhého tělesa lze definovat pomocí šesti parametrů: $xm, ym, zm, \alpha_1, \beta_1, \gamma_2$.



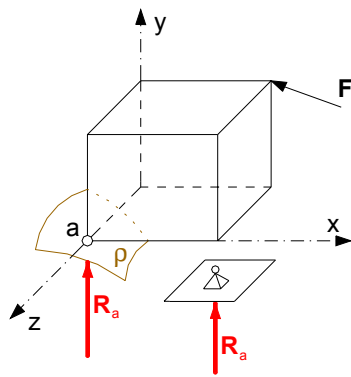
Vazby tuhého tělesa v prostoru

- **Hladká kluzká plocha**

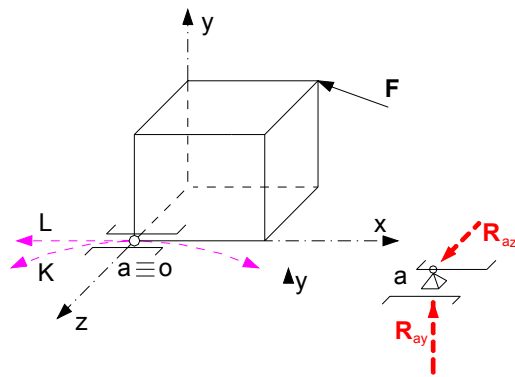
V případě podepření libovolného bodu tuhého tělesa T dokonale hladkou plochou je tělesu odebrán jeden stupeň volnosti – translační pohyb ve směru normály k ploše. V tomto směru působí také reakce Ra , která tento pohyb znemožňuje. Popsaný způsob uložení se nazývá **kulový kloub posuvný po ploše** nebo také **kuličkové ložisko**.

- **Hladká kluzná křivka**

Při podepření libovolného bodu tuhého tělesa T po dokonale hladké křivce jsou odebrány tělesu dva stupně volnosti – translační pohyby v normálové rovině. V normálové rovině působí v bodě také reakce Ra , kterou lze nahradit složkami Rax a Ray . Popsaný způsob uložení se nazývá **kulový kloub posuvný po křivce** nebo také **válečkové ložisko**.



Hladká kluzká plocha



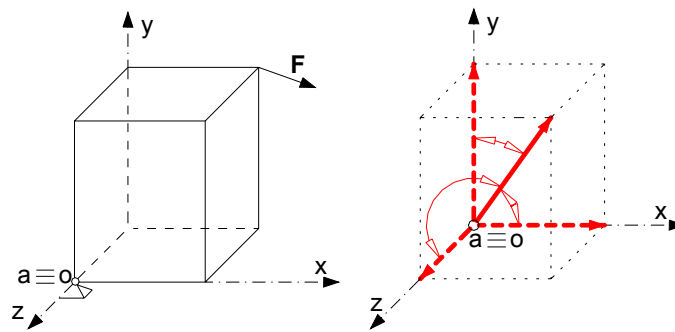
Hladká kluzká křivka

• **Kyvňý prut**

Připojení tuhého tělesa T kyvným prutem odebrává jeden stupeň volnosti – pohyb bodu ve směru kyvného prutu. V tomto směru působí také reakce R_a , která tento pohyb znemožňuje.

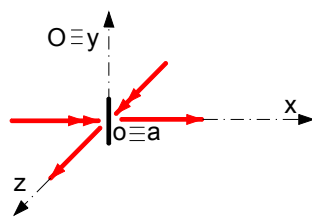
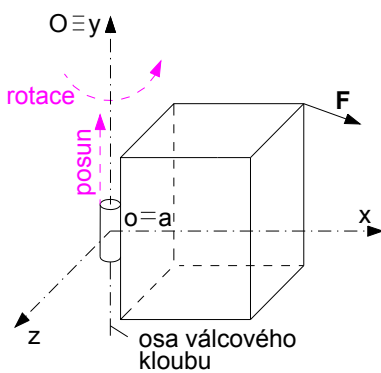
• **Pevný neposuvný kulový kloub**

Připojení tuhého tělesa T pomocí neposuvného kulového kloubu odebrává tuhému tělesu tři stupně volnosti – translační pohyby ve směru souřadnicových os. Posunu tělesa brání reakce R_a , kterou lze ekvivalentně nahradit složkami R_{ax} , R_{ay} a R_{az} .

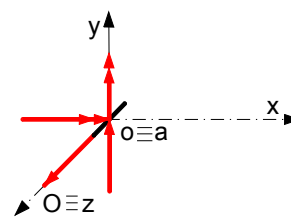
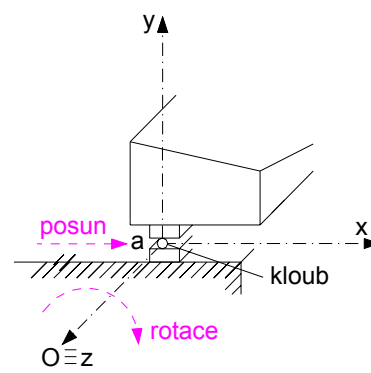


Pevný neposuvný kulový kloub

• **Posuvný válcový kloub**



Posuvný válcový kloub ve směru osy y

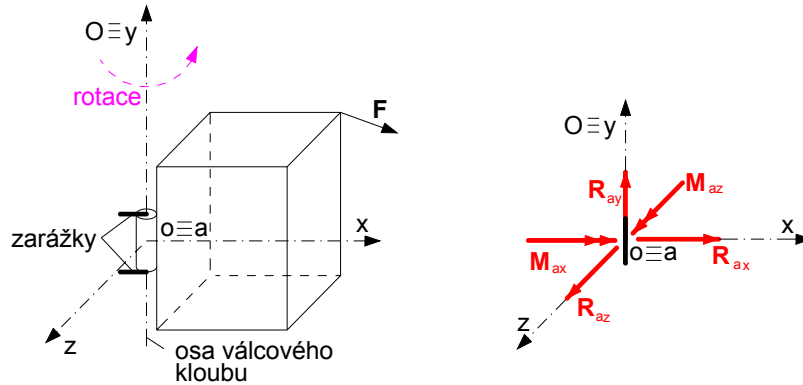


Posuvný válcový kloub ve směru osy z

Další možností uložení tuhého tělesa T je uložení pomocí posuvného **válcového kloubu ve směru své osy nebo kolmo ke své ose**. Oba dva případy uložení odebírají tuhému tělesu čtyři stupně volnosti – dva translační pohyby, dva rotační pohyby.

• **Neposuvný válcový kloub**

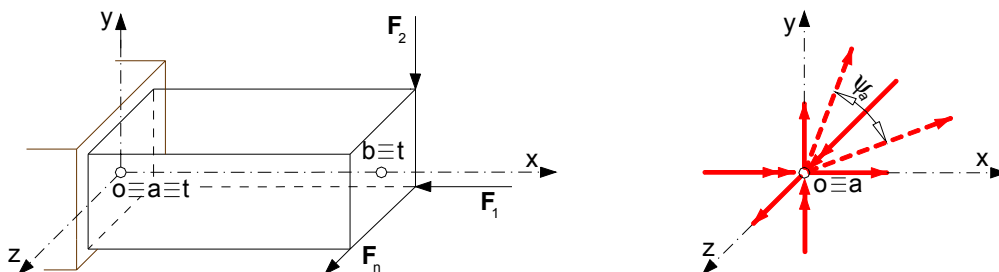
Uložení tuhého tělesa T pomocí **neposuvného válcového kloubu se zarážkami** odebírá tělesu pět stupňů volnosti – tři translační pohyby, dva rotační pohyby.



Neposuvný válcový kloub

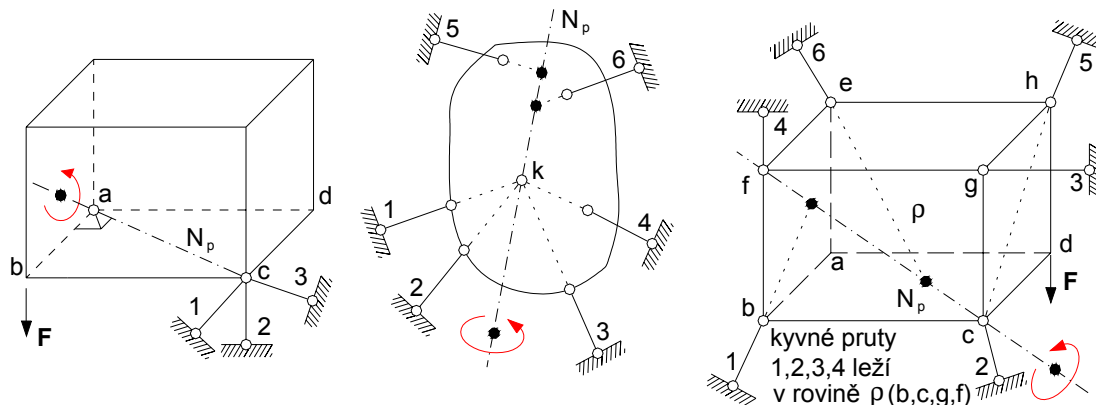
• **Dokonalé vetknutí**

Dokonalé vetknutí existuje v případě dokonale tuhého spojení tuhého tělesa s pevným útvarem. Tento typ uložení odebírá tuhému tělesu T šest stupňů volnosti – tři translační pohyby, tři rotační pohyby. Pohybům tělesa brání reakce R_a , kterou lze ekvivalentně nahradit: silami R_{ax} , R_{ay} , R_{az} a ohybovými momenty M_{ax} , M_{ay} , M_{az} který působí v teoretickém bodě vetknutí.



Dokonalé vetknutí

Výjimkové případy



U výjimečných případů podepření tuhého tělesa T v prostoru je determinant soustavy šesti statických podmínek rovnováhy roven nule $D=0$.

Výjimečný případ podepření nedetekuje pouze nulový determinant, ale také tzv. *nulová přímka*. To je přímka, která protíná všech šest složek reakcí vazeb a detekuje nevhodné uspořádání podporových vazeb a existenci výjimečného podepření.

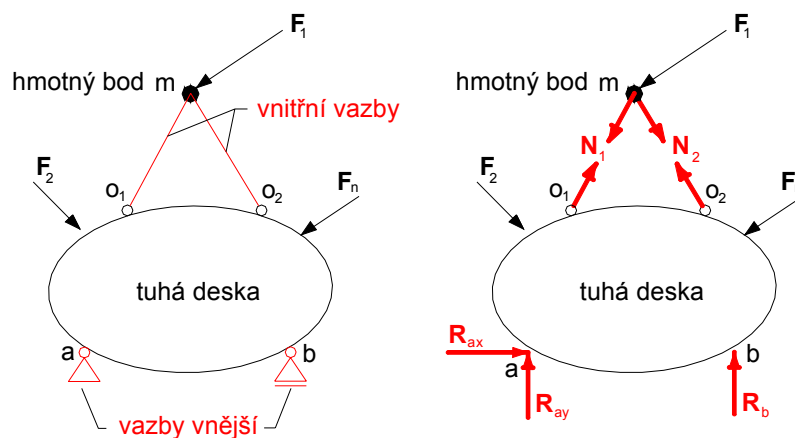
Podepření tuhého tělesa v prostoru a výpočet reakcí

SU a KU podepření tuhého tělesa T v prostoru lze zajistit vzájemnou kombinací výše uvedených typů vazeb, které zruší šest stupňů volnosti. Výpočet reakcí se provádí pomocí statických podmínek rovnováhy. Podmínka staticky určitého podepření tuhého tělesa:

$$a = a_1 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 = \sum_{k=1}^6 ka_k = 6.$$

Rovinné složené soustavy

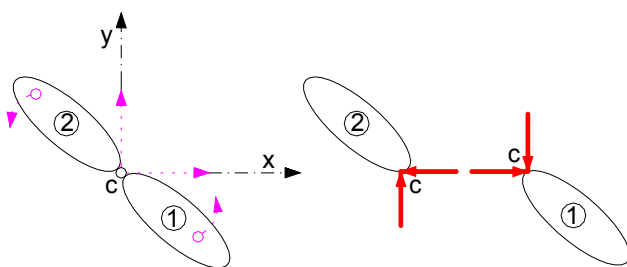
Složené soustavy vzniknou vzájemným spojením hmotných objektů (hmotných bodů, tuhých desek, tuhých těles). Mohou být rovinné nebo prostorové. V případě rovinných soustav se všechny objekty, zatížení i reakce vazeb nachází v jedné rovině tzv. *střednicové rovině (rovině souměrnosti)*. Vzájemné spojení hmotných objektů je provedeno pomocí *vazeb vnějších* nebo *vnitřních*. Potom se *reakce* dělí na *vnější* a *vnitřní*.



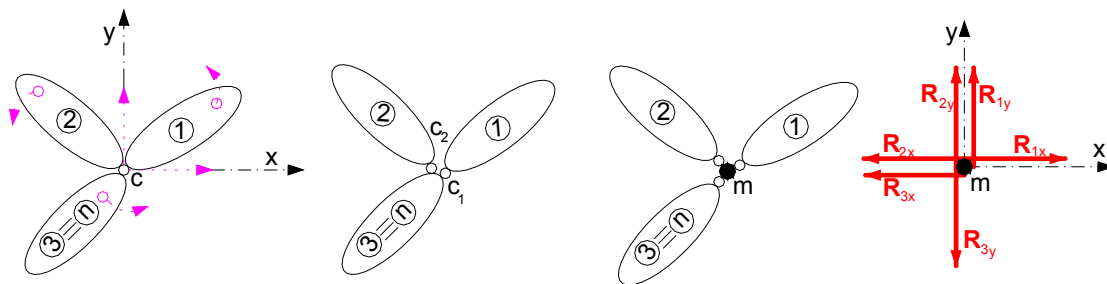
Vazby složených rovinných soustav

U rovinných složených soustav lze k uložení použít vazby:

- *jednonásobné*: hladká křivka, posuvný kloub, kyvný prut,
- *dvounásobné*: pevný neposuvný kloub, posuvné vetknutí,
- *trojnásobné*: dokonalé vetknutí.



Kromě těchto typů vazeb lze ke spojení hmotných objektů použít *vnitřní kloub c*. V případě spojení dvou tuhých desek pomocí vnitřního kloubu c se jedná o vazbu dvounásobnou (jsou zrušeny dva stupně volnosti ze šesti; zbývající stupně volnosti jsou translační – $2x$ a rotační – $2x$). Reakce Rc vnitřního kloubu prochází kloubem c a lze ji ekvivalentně nahradit složkami Rcx a Rcy .



V případě spojení tří tuhých desek pomocí vnitřního kloubu *c* resp. dvou kloubů ležících velmi blízko sebe se jedná o vazbu čtyřnásobnou $2 \times 2 = 4$ (zbyvající stupně volnosti jsou translační – $2x$ a rotační – $3x$).

Obecně lze napsat:

Vnitřní kloub *c*, který spojuje *n* tuhých desek nahrazuje *n*–1 jednoduchých kloubů, ruší soustavě $2(n-1)$ stupňů volnosti, přičemž soustavě zůstává $n+2$ stupňů volnosti.

Statická a kinematická určitost složených rovinných soustav

Podpření složené rovinné soustavy je SU a KU jestliže počet stupňů volnosti složené soustavy $v=2b+3d$ je roven počtu stupňů volnosti *a*, které jsou zrušeny vnějšími a vnitřními vazbami.

$$2b + 3d = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2 \sum_{n=3,4,\dots} (n-1)k_n .$$

Výjimkové případy nastanou případě, kdy determinant soustavy statických podmínek rovnováhy roven nule $D=0$.

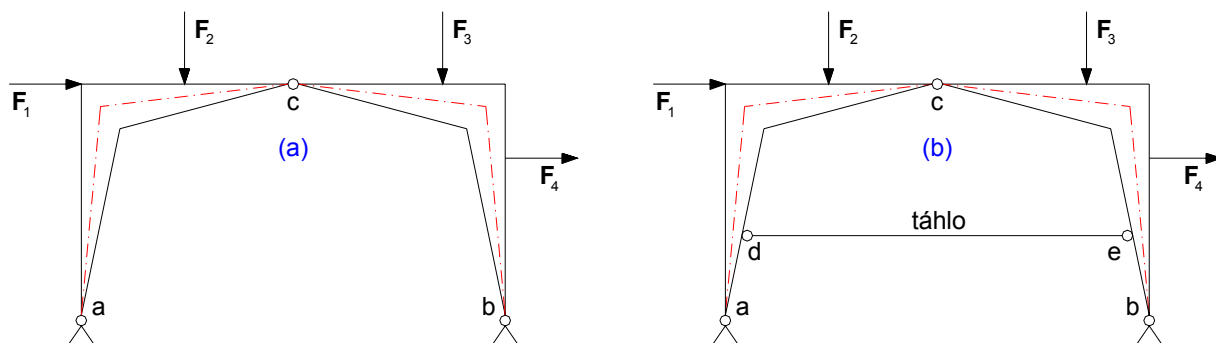
Výpočet reakcí vazeb

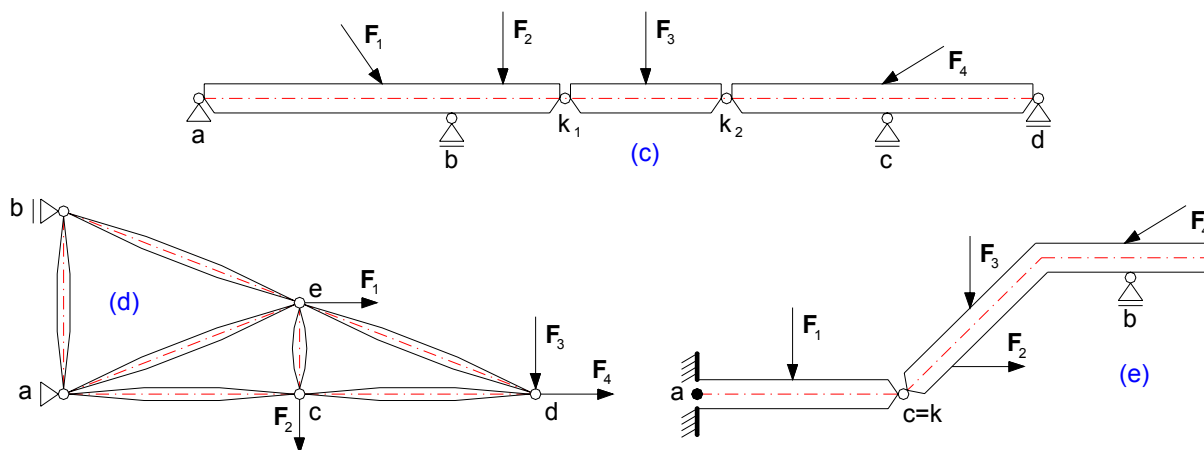
Výpočet reakcí vnějších a vnitřních vazeb se provádí pomocí statických podmínek rovnováhy.

Typy rovinných složených soustav

U rovinných složených soustav lze rozlišit zejména následující typy SU a KU konstrukcí:

- (a) trojkloubová desková soustava bez táhla,
- (b) trojkloubová desková soustava s táhlem,
- (c) složená desková soustava s vnitřními klouby (*Gerberův nosník*),
- (d) obecná složená desková soustava,
- (e) rovinná kloubová desková soustava.





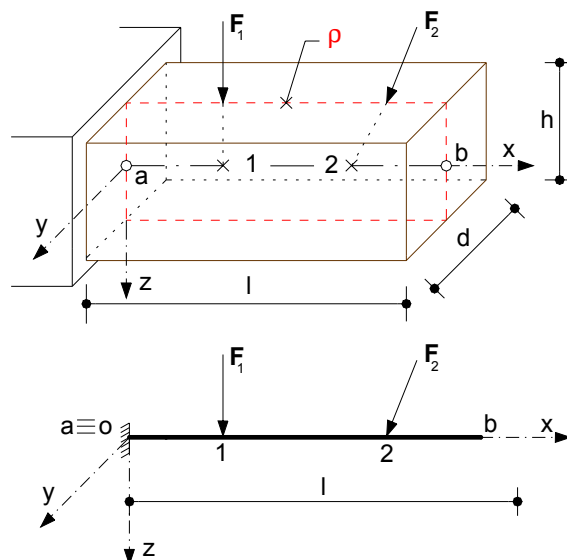
Pojem deska lze vynechat a nahradit je pojmy nosník, prut → složená rovinná prutová soustava.

Rovinný nosník a jeho výpočtový model

Jednoduchý rovinný nosník je nosný prvek, u kterého převládá délkový rozměr nad příčnými rozměry. Střednice, zatížení a jedna z hlavních centrálních os setrvačnosti každého příčného průřezu leží v jedné rovině.

Rovinných nosníků lze rozdělit podle tvaru a polohy střednice na:

- přímé – střednice je úsečka,
- lomené – střednice je lomená čára,
- zakřivené (křivé) – střednice je rovinná křivka,
- obecného tvaru.



Statický model rovinného nosníku představuje idealizovaný náčrt nosníku, jeho zatížení a podepření.

Výpočtový model rovinného nosníku je tvořen střednicí nosníku, idealizovanými vnějšími vazbami a zatížením. K definování výpočtového modelu je nutné také znát geometrické charakteristiky průřezu (A, I) a fyzikální vlastnosti materiálu (E, G, μ).

Podepření jednoduchého rovinného nosníku

Jednoduchý rovinný nosník bez vnitřních kloubů má v rovině tři stupně volnosti. Pro jeho podepření používáme pět základních typů vazeb, viz. tabulka. **Podepření rovinného nosníku je SU a KU jestliže počet stupňů volnosti v je roven počtu stupňů volnosti, které jsou zrušeny vnějšími a vnitřními vazbami, tedy $v = a = 3$.** Jednoduché rovinné nosníky lze rozdělit na nosníky:

- konzolové,
- prosté,
- podepřené ve třech bodech.

Výpočet reakcí vazeb a výjimečné případy podepření

Výpočet reakcí vnějších a vnitřních vazeb se provádí pomocí tří statických podmínek rovnováhy. Pro výše uvedené typy nosníků lze statické podmínky rovnováhy napsat ve tvarech:

- konzolový nosník:

$$\sum F_{ix} = 0 \dots R_{ax}$$

$$\sum F_{iz} = 0 \dots R_{az}$$

$$\sum M_{ia} = 0 \dots M_a$$

- prostý nosník:

$$\sum F_{ix} = 0 \dots R_{ax}$$

$$\sum M_{ia} = 0 \dots R_b$$

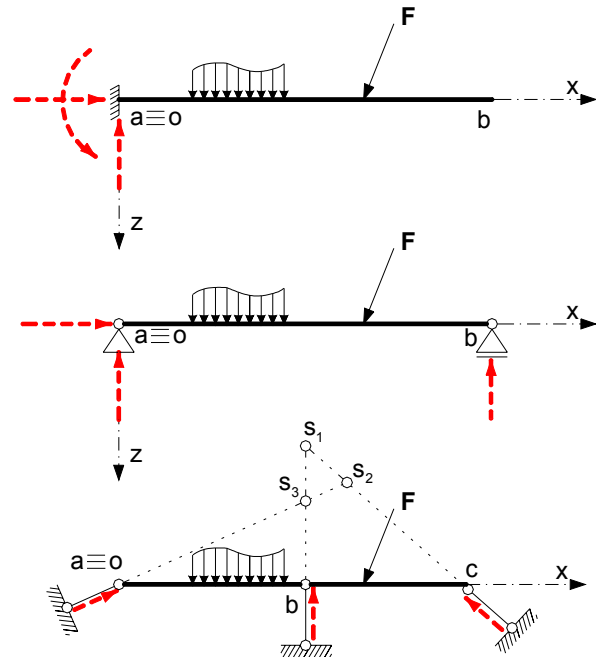
$$\sum M_{ib} = 0 \dots R_{az}$$

- nosník podepřený ve třech bodech:

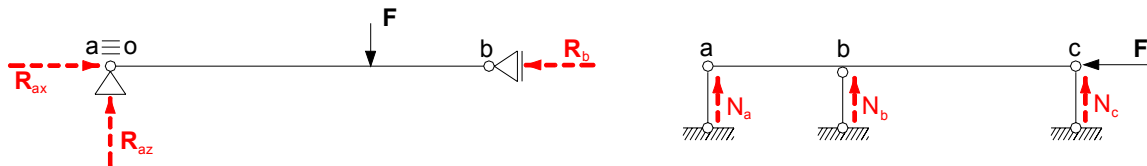
$$\sum M_{i_1} = 0 \dots N_a = N_1$$

$$\sum M_{i_{s_2}} = 0 \dots N_b = N_2$$

$$\sum M_{i_{s_3}} = 0 \dots N_c = N_3$$

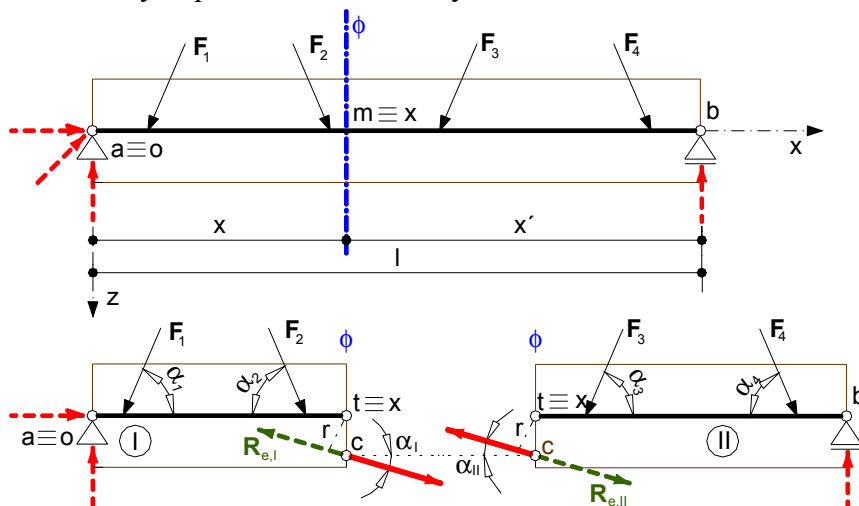


Výjimečné případy podepření nastanou případně, kdy determinant soustavy tří statických podmínek rovnováhy roven nule $D=0$.



Výslednice vnitřních sil a složky výslednice vnitřních sil v průřezu prutu

Složky reakcí vnějších vazeb R_{ax} , R_{az} a R_b prostého nosníku zatíženého soustavou sil $F_1 \dots F_n=4$ lze určit pomocí tří statických podmínek rovnováhy.



Nosník lze rozdělit rovinou ϕ kolmou na střednici nosníku na dvě části **I** a **II**. V případě provedení uvolnění části **II**, tj. odstranění části **I** nosníku, lze účinek odstraněné části **I** nahradit výslednicí vnitřních (interních) sil $R_{i,II}$. Oproti výslednici vnitřních sil $R_{i,II}$, která působí v bodě c působí výslednice vnějších sil $R_{e,II}$ (síly $R_{i,II}$ a $R_{e,II}$ jsou v rovnováze a tvoří rovnovážnou soustavu sil).

$$R_{i,II} + R_{e,II} = 0 \Rightarrow R_{i,II} = -R_{e,II}$$

Výše popsaný postup lze provést i pro druhou odstraněnou část nosníku (**I**). Pro tuto část bude platit

$$R_{i,I} + R_{e,I} = 0 \Rightarrow R_{i,I} = -R_{e,I}$$

Podle zákona „akce a reakce“ platí, že výslednice vnitřních sil $R_{i,I}$ je v rovnováze s výslednicí vnitřních sil $R_{i,II}$. Obě výslednice působí v bodě c . Výslednice vnitřních sil se jinak také nazývají reakce vnitřní vazby.

$$R_{i,I} + R_{i,II} = 0 \Rightarrow R_{i,I} = -R_{i,II} = R_i = R$$

$$R_{i,I} = R = R_{e,II} \quad R_{i,II} = R = R_{e,I}$$

Postup výpočtu výslednice vnitřních sil se používá při výpočtu složek vnitřních sil v průřezu prutu tj. $R \rightarrow N, V, M$.

Složky výslednice vnitřních sil v průřezu prutu

Výslednice vnitřních sil části **I** ($R_{i,I} = R$) i **II** ($R_{i,II} = R$) lze rovnoběžně posunout z jejich působiště (bod c) do těžiště uvažovaného průřezu. V případě tohoto postupu je nutné doplnit k posunutým silám dvojici sil o momentu (M ... moment výslednice vnitřních sil k těžišti průřezu)

$$M = Rr$$

Posunutou sílu R lze v těžišti rozdělit na dvě složky: sílu působící v ose nosníku N a na složku působící kolmo k ose nosníku V . Síly lze vyjádřit rovnicemi

$$N = R \cos \alpha, \quad V = R \sin \alpha$$

Uvedeným postupem došlo k nahrazení výslednice vnitřních sil R třemi složkami vztaženými k ose nosníku:

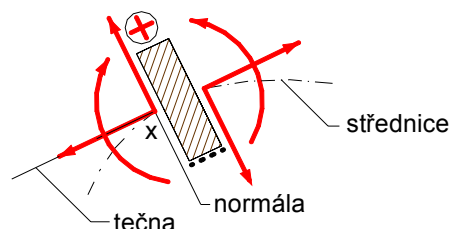
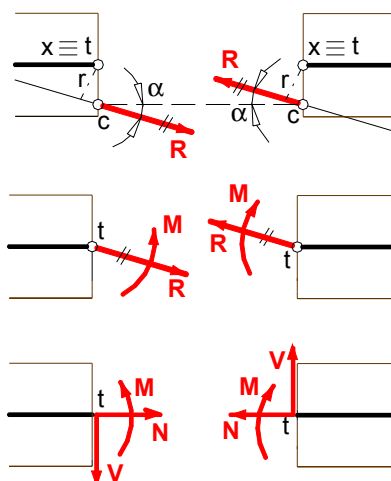
- N ... normálovou silou,
- V ... posouvající silou,
- M ... ohybovým momentem.

N ... normálová síla

Normálová síla $N(x)$ v libovolném bodě x nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část od průřezu x , do směru osy nosníku. Kladná (záporná) normálová síla v průřezu vyvozuje tah (tlak).

V ... posouvající síla

Posouvající síla $V(x)$ v libovolném bodě x nosníku je rovna algebraickému součtu průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část od průřezu x , do směru kolmo na osu



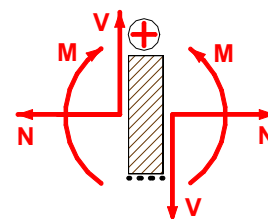
nosníku. Kladná posouvající síla v průřezu působí v levé (pravé) části nahoru (dolů) → snaží se pootočit nosníkem ve směru chodu hodinových ručiček.

M ... ohybový moment

Ohybový moment $M(x)$ v libovolném bodě x nosníku je roven algebraickému součtu statických momentů všech vnějších sil včetně reakcí, působících na levou nebo pravou část od průřezu x , k těžišti průřezu x . Kladný (záporný) ohybový moment v průřezu způsobuje tah dolních (horních) vláken. *Tažená vlákna se zobrazují přerušovanou čarou.*

Obrazce vnitřních sil N, V, M

Z důvodu přehlednosti průběhu složek výslednice vnitřních sil po celé délce nosníku je vhodné provést grafické vykreslení jednotlivých složek N , V , M .



Kladné hodnoty se vynášejí nad srovnávací rovinu, která je ve většině případů totožná se střednicí nosníku. Při vykreslování ohybových momentů se dodržuje pravidlo, kdy ohybové momenty se vykreslují na stranu tažených vláken.

Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu, diagramy a obrazce vnitřních sil

Na obrázku je znázorněn element délky dx , který vznikl dvěma řezy kolnými na osu nosníku vedenými body $x1$ a $x2$. Tento nosník může být obecně zatížen libovolným příčným zatížením q , osovým zatížením n , momentovým zatížením m , osamělými silami F a ohybovými momenty M . Uvažujme, že element dx se nachází mimo místa soustředěného zatížení (F nebo M). Potom element dx bude zatížen vnějším zatížením $q \cdot dx$, $n \cdot dx$ a $m \cdot dx$. Účinek odejmutých částí nosníku v průřezích $x1$ a $x2$ lze nahradit složkami výslednice vnitřních sil:

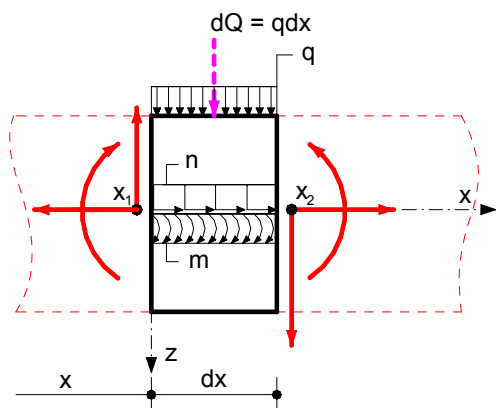
- průřez $x1$... N , V , M ,
- průřez $x2$... $N+dN$, $V+dV$, $M+dM$.

Zatížení působící na elementu nosníku dx tvoří obecnou rovinnou rovnovážnou soustavu sil, pro kterou lze napsat tři statické podmínky rovnováhy ($\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iz} = 0$, $\sum M_{ix} = 0$)

$$\sum F_{ix} = 0 : -N + (N + dN) + ndx = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0 : -V + (V + dV) + qdx = 0$$

$$\sum M_{ix} = 0 : -M + (M + dM) - Vdx + qdx \frac{dx}{2} - m \cdot dx = 0$$



Po úpravě statických podmínek rovnováhy, kdy se neuvažuje se členem druhé derivace lze zapsat výsledné vztahy tzv. **diferenciální podmínky rovnováhy**, které platí mezi složkami vnitřních sil a vnějším spojitým zatížením nosníku.

$$\frac{dN}{dx} = -n, \quad \frac{dV}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = V + m$$

Ve většině případů je spojitě momentové zatížení nulové ($m = 0$), potom lze třetí vztah zapsat ve tvaru známém pod pojmem

Schwedlerova věta: Derivace ohybového momentu podle nezávislé proměnné x je rovna posouvající síle (pro $m = 0$).

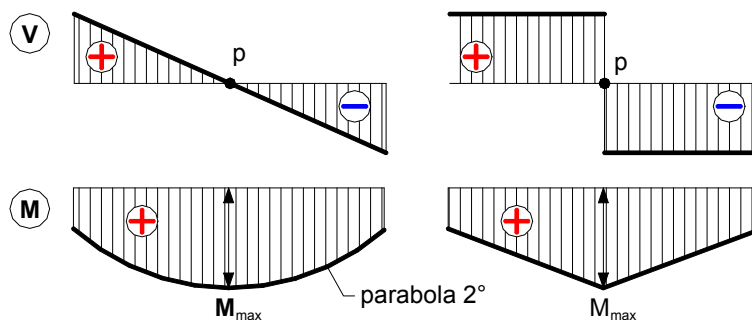
$$\frac{dM}{dx} = V.$$

Závěry vyplývající z diferenciálních podmínek rovnováhy

1. Vnitřní síly $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ mohou měnit po délce svoji velikost. Při praktických výpočtech nás většinou zajímají místa, kde tyto vnitřní síly nabývají **extrémních hodnot**, tj. místa ve kterých je první derivace funkce vnitřní síly podle neznámé x rovna nule $df(x)/dx = 0$.

$$\frac{dN}{dx} = -n = 0, \quad \frac{dV}{dx} = -q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = V + m = 0$$

- extrém normálové N (posouvající V) síly je v průřezu, kde je intenzita spojitěho osového n (příčného q) zatížení rovna nule
- extrém ohybového momentu je v **přechodovém průřezu**, kde je posouvající síla rovna nule popř. kde posouvající síla mění své znaménko.



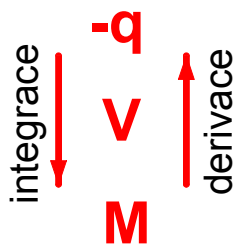
2. Integrací diferenciálních podmínek rovnováhy lze určit složky výslednice vnitřních sil v libovolném průřezu x nosníku (tzv. **derivačně-integrační schéma**)

$$N(x) = -\int n(x)dx + C_1$$

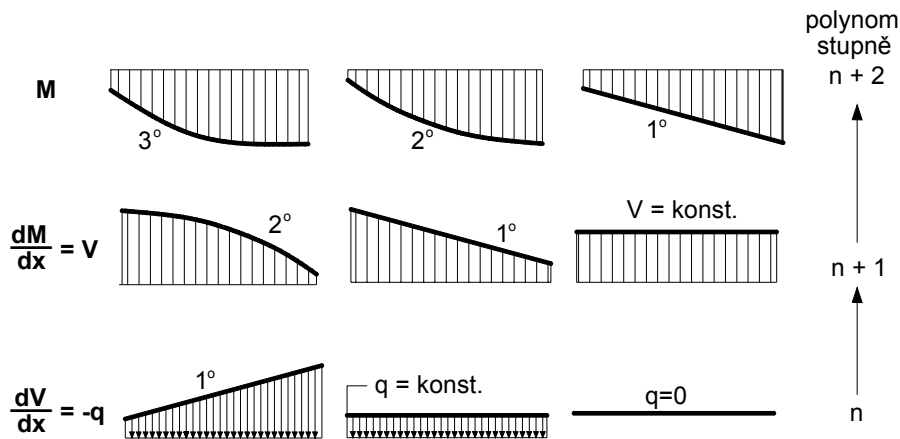
$$V(x) = -\int q(x)dx + C_2$$

$$M(x) = \int V(x)dx + C_3 \text{ (při } m(x) = 0)$$

$C_1, C_2, C_3 \dots$ integrační konstanty (určí se z okrajových podmínek)

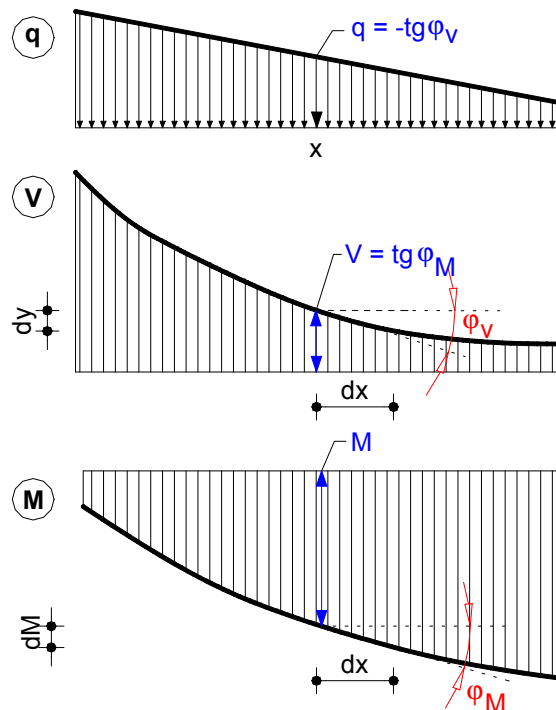


- čára normálových N (posouvajících V) sil nebo ohybových momentů M je **integrální** (součtovou) čarou osového zatížení n (příčného zatížení q) nebo posouvajících sil V .
 - čára posouvajících sil V (příčného zatížení q) nebo osového zatížení n je **diferenciální** čarou ohybových momentů M (posouvajících sil V) nebo normálových sil N .
3. Derivačně-integrační schéma definuje vzájemnou závislost mezi příčným zatížením q , posouvající silou V a ohybovým momentem M .
- Je-li příčné zatížení q definováno polynomem stupně n , potom posouvající síla je definována jako polynom stupně $n+1$ a ohybový moment jako $n+2$.



4. Úhel sklonu tečny k čáře posouvajících sil nebo ohybových momentů se získá pomocí derivace příslušné vnitřní síly podle proměnné x .

$$\frac{dV}{dx} = -q = \operatorname{tg} \varphi_V, \quad \frac{dM}{dx} = V = \operatorname{tg} \varphi_M$$



- Obrázec příčného zatížení q (posouvajících sil V) zobrazuje průběh směrnice tečny v obrázci posouvajících sil V (ohybových momentů M ; $m = 0$).