PROSTOVOVÉ SOUSTAVY SIL

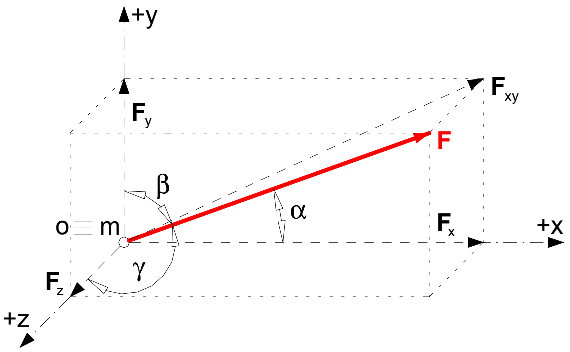
Tři síly se společným působištěm

Velikost výslednice ***R = F*** soustavy tří sil ***Fx***, ***Fy***, ***Fz***, které jsou na sebe navzájem kolmé a jsou umístěné ve společném působišti ***o≡m*** lze získat postupným vektorovým součtem

$$F_x + F_y = F_{xy}, \qquad F_{xy} + F_z = F_x + F_y + F_z = F$$

nebo součtem ve skalárním tvaru

$$F_x^2 + F_y^2 = F_{xy}^2, \qquad F_{xy}^2 + F_z^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2, \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,.$$



Velikost výslednice ***R = F*** soustavy tří sil ***Fx***, ***Fy***, ***Fz*** působících ve společném působišti je rovna velikosti úhlopříčky hranolu o stranách rovných vektorům ***Fx***, ***Fy*** a ***Fz***

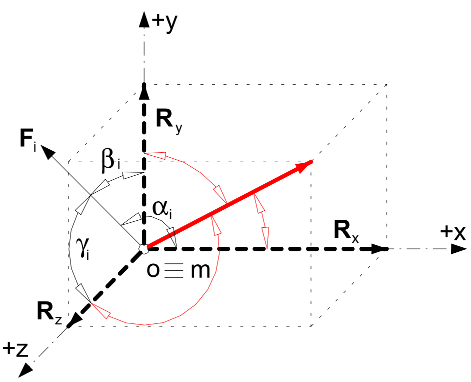
$$R = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,.$$

Výslednice ***R = F*** svírá se souřadnicovými osami +***x***, +***y***, +***z*** směrové úhly ***α***, ***β***, ***γ***, které lze vyjádřit pomocí vztahů

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}, \qquad \textit{přičemž platí:}\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

2/1

Prostorová soustava sil se společným působištěm (prostorový svazek sil)



Řešení prostorové soustavy různoběžných sil tzv. prostorového svazku sil ***F1…Fn*** se společným působištěm ***m*** se provádí *numericky*. Každá síla soustavy sil ***Fi*** (***i=1…n***) je definována svojí velikostí, směrem a smyslem (pomocí směrových úhlů ***αi***, ***βi***, ***γi***). Každou sílu soustavy sil lze rozdělit pomocí goniometrických funkcí na tři složky, které jsou na sebe navzájem kolmé a působí ve směru souřadnicových os ***x***, ***y***, ***z***

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i\,, \quad F_{iy} = F_i \cos\beta_i\,, \quad F_{iz} = F_i \cos\gamma_i\,.$$

Tímto postupem vzniknou místo původní soustavy sil ***F1…Fn*** tři soustavy sil se společným působištěm působící ve směru souřadnicových os. Algebraickým součtem složek sil v příslušných osách lze získat dílčí výslednice ***Rx***, ***Ry***, ***Rz*** pro které platí podmínky ekvivalence:

$$R_x = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i$$

$$R_y = R\cos\beta = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i$$

$$R_z = R\cos\gamma = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i$$

rovnice představují statické podmínky ekvivalence pro prostorový svazek sil

2/2

Výslednici $\boldsymbol{R}$ prostorového svazku sil, která působí v bodě $\boldsymbol{o \equiv m}$ a jí příslušející směrové úhly α, β, γ lze určit pomocí vztahů

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}, \qquad \textit{přičemž platí: } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Podmínky rovnováhy:

Prostorová soustava sil ***F1…Fn*** se společným působištěm $\boldsymbol{o \equiv m}$ je v rovnováze právě tehdy, když algebraické součty průmětů všech sil soustavy do tří navzájem kolmých (obecně kosoúhlých) os jsou rovny nule.

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

silové podmínky rovnováhy

ÚLOHA – Nahrazení a zrušení síly *R* třemi silami *Fi* a zadanými paprsky (α_i, β_i, γ_i) (*i=1…3*) se společným působištěm *o≡m*

Úlohu lze rozdělit na dvě části (A) na rozklad síly $\boldsymbol{R}$ do tří složek a (B) zrušení síly $\boldsymbol{R}$ třemi složkami.

(A) Rozklad síly *R* do tří složek:

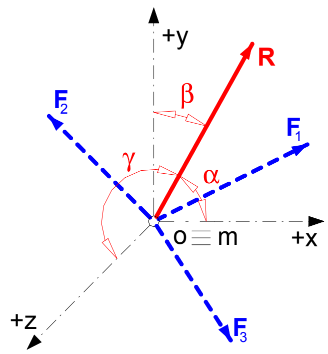
Rozklad síly $\boldsymbol{R}$ do tří složek lze provést řešením tří statických podmínek ekvivalence rovnováhy.

$$R_x = \sum_{i=1}^{3} F_i \cos\alpha_i\,, \quad R_y = \sum_{i=1}^{3} F_i \cos\beta_i\,, \quad R_z = \sum_{i=1}^{3} F_i \cos\gamma_i\,.$$

(B) Zrušení síly *R* třemi složkami:

Zrušení síly $\boldsymbol{R}$ třemi složkami lze provést pomocí tří silových podmínek rovnováhy.

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0\,.$$



2/3

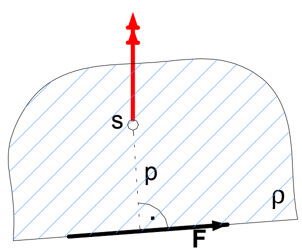
Statický moment síly k bodu v prostoru

Libovolným bodem $\boldsymbol{s}$ a paprskem síly $\boldsymbol{F}$ lze proložit *rovinu statického momentu* ρ. Potom je statický moment $\boldsymbol{Ms}$ síly $\boldsymbol{F}$ k bodu $\boldsymbol{s}$ v prostoru roven statickému momentu síly $\boldsymbol{F}$ k bodu $\boldsymbol{s}$ v rovině ρ

$$M_s = Fp\,,$$

kde

$\boldsymbol{p}$ … rameno síly (kolmice z bodu $\boldsymbol{s}$ na paprsek síly $\boldsymbol{F}$ v rovině ρ).



V případě většího počtu různě působících sil ***Fi***(***s***) v prostoru existuje shodný počet rovin ***ρi*** statických momentů ***Ms,i*** sil ***Fi*** k bodu ***s***. Tyto roviny statických momentů jsou obecně různé. Z tohoto důvodu neleží vektory momentů ***Ms,i*** na jedné přímce a je tedy nutné provádět při výpočtu **vektorové součty**. Potom lze momentovou (Varignovu) větu zapsat:

Momentová (Varignonova) věta v prostoru k bodu: Statický moment ***Ms***, výslednice silové prostorové soustavy sil ***F1…Fn*** k libovolnému bodu ***s*** v prostoru je roven **vektorovému součtu** statických momentů ***Ms,1…Ms,n*** jednotlivých sil soustavy ***F1…Fn*** k tomuto bodu

$$M_s = M_{s,R} = \sum_{i=1}^{n} M_{s,i} \, .$$

2/4

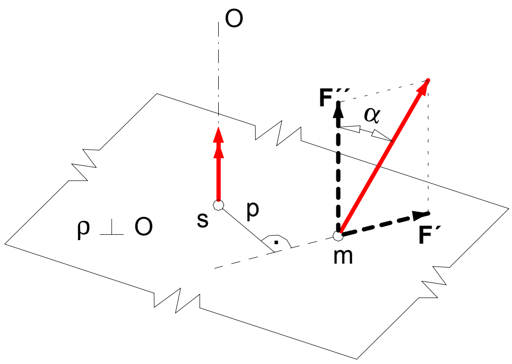
Statický moment síly k ose v prostoru

Libovolný bod ***m***, který leží na paprsku síly ***F*** je považován za působiště síly ***F***. Bodem ***m*** lze proložit rovinu *ρ*, která je kolmá na *momentovou osu* ***O***. Působící sílu ***F*** lze potom rozdělit na:

1. sílu působící kolmo na rovinu *ρ*: ***F''=F·cos(α)***,
2. sílu působící v rovině *ρ*: ***F'=F·sin(α)***.

Statický moment ***Mo*** (vektorová veličina) síly ***F*** k ose ***O*** v prostoru je způsoben pouze silou působící v rovině *ρ* (***F'=F·sin(α)***) na rameni ***p*** (tj. kolmá vzdálenost bodu ***s*** od paprsku síly ***F'***)

$$M_o = F' p = Fp \sin\alpha \qquad (\text{pro } \alpha = \pi/2 : M_o = Fp \,).$$



Momentová (Variognova) věta v prostoru k ose: Statický moment síly ***F*** resp. výslednice libovolné prostorové soustavy sil ***R*** k momentové ose ***O*** je roven **algebraickému součtu** statických momentů jejich složek (tj. jednotlivých sil soustavy) k téže ose.

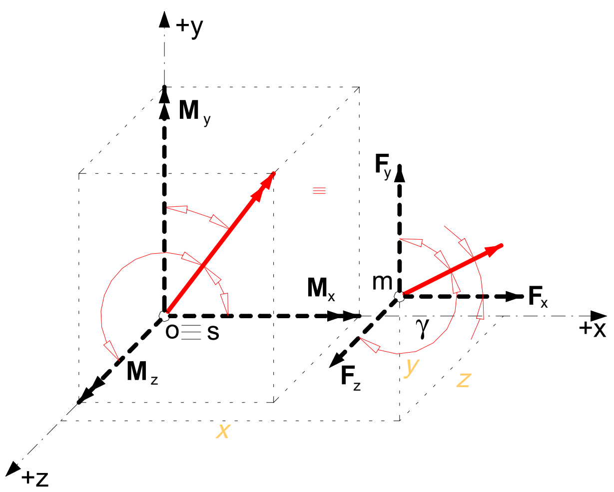
ÚLOHA – Výpočet statického momentu síly *F* k souřadnicovým osám *x, y, z* a k počátku soustavy souřadnic *o*

Sílu ***F*** působící v libovolném bodě ***m*** o souřadnicích (***x***, ***y***, ***z***) lze nahradit ekvivalentní soustavou tří na sebe navzájem kolmých sil, které jsou rovnoběžné s osami souřadnic

$$F_x = F\cos\alpha, \qquad F_y = F\cos\beta, \qquad F_z = F\cos\gamma \, .$$

Statické momenty ***Mx***, ***My***, ***Mz*** síly ***F*** k souřadnicovým osám je možné potom určit pomocí výrazů

$$M_x = M_{s_1} = F_z y - F_y z = F(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,,$$
$$M_y = M_{s_2} = F_x z - F_z x = F(z\cos\alpha - x\cos\gamma)\,,$$
$$M_z = M_{s_3} = F_y x - F_x y = F(x\cos\beta - y\cos\alpha)\,.$$



Působiště statických momentů ***Mx***, ***My***, ***Mz*** mohou ležet v libovolném bodě na souřadnicové ose ***x***, ***y***, ***z***. Výsledný vektor statického momentu $M_{o\equiv s}$ síly ***F*** k bodu $o\equiv s$ (tj. počátku soustavy souřadnic) se získá vektorovým součtem statických momentů ***Mx***, ***My***, ***Mz*** k souřadnicovým osám. Velikost $M_{o\equiv s}$ je totožná s tělesovou úhlopříčkou kvádru o hranách ***Mx***, ***My***, ***Mz*** a lze ji vyjádřit pomocí vztahu

$$M_{o\equiv s} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\ .$$

Pro směrové úhly λ, μ, ν platí vztahy:

$$\cos\lambda = \frac{M_x}{M_o},\quad \cos\mu = \frac{M_y}{M_o},\quad \cos\nu = \frac{M_z}{M_o},$$

přičemž platí: $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$.

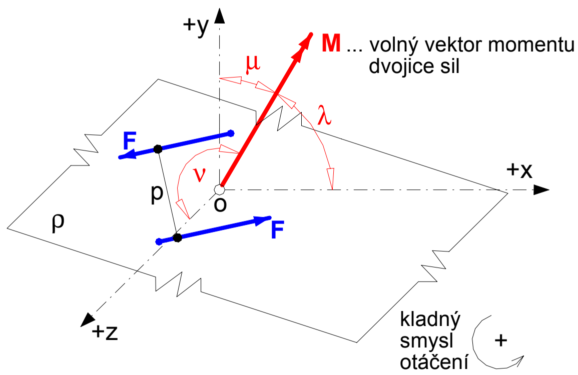
2/5

Dvojice sil v prostoru

Dvojici sil v prostoru lze definovat stejným způsobem jako dvojici sil v rovině (tj. *soustava dvou navzájem rovnoběžných sil stejné velikosti, opačného smyslu, které neleží na jednom paprsku*). Oproti dvojici sil v rovině může dvojice sil v prostoru působit ve zcela libovolné rovině ρ. ***Volný vektor momentu M*** dvojice sil působících v rovině ρ, ve které se nachází počátek soustavy souřadnic lze vyjádřit pomocí vztahu

$$M = Fp\ .$$

Tento volný vektor ***M*** působí v libovolném bodě roviny ρ, kolmo na rovinu ρ a se souřadnicovými osami svírá směrové úhly λ, μ, ν.



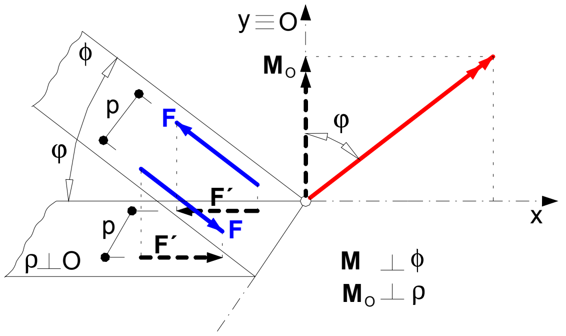
Pro dvojici sil v prostoru platí stejné zásady jako pro dvojici sil v rovině. V rovině ρ lze dvojici sil:

- libovolně posunout nebo pootočit,
- nahradit jinou dvojicí sil, která vyvozuje stejný moment co do velikosti a smyslu jako původní dvojice sil,
- dvojici sil v prostoru posunout do jiné roviny Γ, která je rovnoběžná s rovinou ρ (pro dvojici sil v rovině tento bod neplatí) – dojde ke změně polohy působiště, ale výsledný účinek vektoru ***M*** zůstane stejný.

Statický moment Mo dvojice sil působící v rovině ϕ k ose ***O*** v prostoru je roven průmětu vektoru ***M*** momentu dvojice sil do osy ***O***

$$M_o = M\cos\varphi = Fp\cos\varphi\,,$$

nebo je roven momentu dvojice sil, která se získá promítnutím dvojice sil do roviny ρ, která je kolmá na osu ***O***.



výpočet 1.

$$M = Fp \rightarrow M_o = M\cos\varphi = Fp\cos\varphi$$

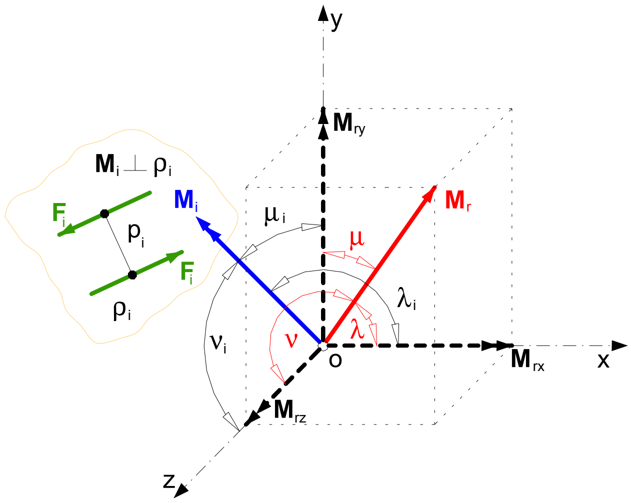
výpočet 2.

$$F' = F\cos\varphi \rightarrow M_o = F'p = Fp\cos\varphi$$

ÚLOHA – Skládání silových dvojic v prostoru

Soustavu silových dvojic působících v prostoru o momentech ***Mi = Fi·pi*** (***i=1...n***), které působí na tuhé těleso v obecných rovinách ρi (***i=1…n***) lze zobrazit vektorově a přemístit je do počátku pravoúhlého systému souřadnic. Tímto postupem vznikne soustava vektorů momentů ***Mi*** (***i=1...n***) se společným působištěm ***o***. Při stanovení výsledného vektoru momentu ***Mr*** se každý vektor ***Mi*** rozloží pomocí směrových úhlů λi, μi, νi na tři pravoúhlé složky ***Mxi***, ***Myi***, ***Mzi***, které působí v souřadnicových osách

$$M_{ix} = M_i\cos\lambda_i, \qquad M_{iy} = M_i\cos\mu_i, \qquad M_{iz} = M_i\cos\nu_i\,.$$



Hodnoty dílčích výsledných vektorů momentů ***Mrx***, ***Mry***, ***Mrz*** působících v souřadnicových osách se určí pomocí vztahů

$$M_{rx} = M_r\cos\lambda = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = \sum_{i=1}^{n} M_i\cos\lambda_i\,,$$

$$M_{ry} = M_r\cos\mu = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = \sum_{i=1}^{n} M_i\cos\mu_i\,,$$

$$M_{rz} = M_r\cos\nu = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} M_i\cos\nu_i\,.$$

rovnice představují statické podmínky ekvivalence pro soustavu silových dvojic v prostoru

2/6

Pro výsledný vektor momentu ***Mr*** a směrové úhly platí vztahy

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2}$$

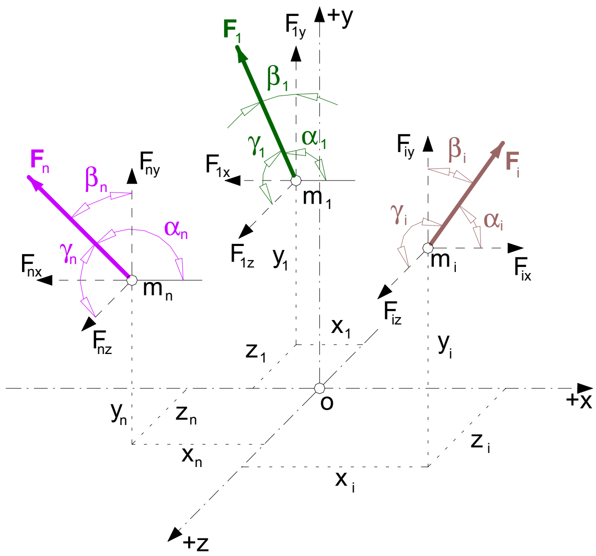
$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r},\quad \cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r},\quad \cos\nu = \frac{M_{rz}}{M_r},\qquad \textit{přičemž platí:}\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1\,.$$

Podmínky rovnováhy:
Soustava silových dvojic v prostoru o momentech ***M1…Mn*** je v rovnováze právě tehdy, když algebraické součty průmětů všech vektorů momentů silových dvojic do tří navzájem kolmých (obecně kosoúhlých) os jsou rovny nule.

$$M_{rx} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0,\qquad M_{ry} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0,\qquad M_{rz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$$

momentové podmínky rovnováhy

Obecná prostorová soustava sil



Pod pojmem obecná prostorová soustava sil se rozumí soustava sil, jejíž paprsky neleží v jediné rovině ani neprocházejí jedním bodem. Předpokládá se, že každá síla soustavy ***Fi*** (***i=1…n***) v souřadnicové soustavě ***x***, ***y***, ***z*** je zadána velikostí, působištěm ***mi***(***xi***, ***yi***, ***zi***) a směrovými úhly ***αi***, ***βi***, ***γi***.

ÚLOHA Č.1 – Redukce síly *Fi* k bodu *o* a nalezení výslednic (*R*, *Mr*)

V případě úlohy redukce síly ***Fi*** k libovolnému bodu ***o*** je nutné rovnoběžně posunout sílu ***Fi*** působící v bodě ***mi*** do počátku soustavy souřadnic ***o***. Z důvodu zachování stejného účinku je nutné k posunuté síle přidat dvojici sil o momentu ***Mio***, která je co do velikosti a smyslu rovna statickému momentu síly ***Fi*** k bodu ***o***

$$M_{io} = F_i p_i\,.$$

Vektor momentu dvojice sil ***Mio*** je kolmý na rovinu ***ρ***, která je definovaná paprskem síly ***Fi*** a počátkem souřadnicové soustavy ***o***.

Při praktickém postupu se provádí redukce síly ***Fi*** k bodu ***o*** pomocí složek sil rozložených do souřadnicových os

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i,\qquad F_{iy} = F_i \cos\beta_i,\qquad F_{iz} = F_i \cos\gamma_i\,.$$

Tyto rozložené síly se přesunou do počátku soustavy souřadnic ***o*** a podle výše uvedené poučky o ***„redukci síly k bodu“*** se k soustavě přidá celkem 6 silových dvojic, které se rovnají statickým momentům síly ***Fi*** k souřadnicovým osám

$$M_{ix} = F_{iz} y_i - F_{iy} z_i = F_i (y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i)\,,$$

$$M_{iy} = F_{ix} z_i - F_{iz} x_i = F_i (z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i)\,,$$

$$M_{iz} = F_{iy} x_i - F_{ix} y_i = F_i (x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i)\,.$$

Výsledný účinek silových dvojic o momentech ***Mix***, ***Miy***, ***Miz*** je roven jediné dvojici sil o momentu ***Mio***, který je roven statickému momentu síly ***Fi*** k počátku ***o***

$$M_{io} = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2 + M_{iz}^2}\ .$$

Pro směrové úhly vektoru momentu ***Mio*** platí vztahy

$$\cos\lambda_i = \frac{M_{ix}}{M_{io}},\quad \cos\mu_i = \frac{M_{iy}}{M_{io}},\quad \cos\nu_i = \frac{M_{iz}}{M_{io}}\,.$$

Po provedení redukce všech sil ***Fi*** (***i=1…n***) k počátku soustavy souřadnic ***o*** získáme:

- prostorový svazek silových vektorů ***Fi*** (***i=1…n***),
- prostorový svazek vektorů momentů ***Mio*** (***i=1…n***).

ÚLOHA Č.1/a – Nalezení výslednice *R* prostorového svazku silových vektorů *Fi*

Velikost vektoru výslednice ***R*** prostorového svazku sil je rovna úhlopříčce kvádru, kde ***Rx***, ***Ry***, ***Rz*** jsou pravoúhlé průměty výslednice ***R*** do souřadnicových os, které jsou rovny algebraickému součtu průmětů všech sil soustavy do stejných os.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

(1) $$R_x = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i\,,$$

(2) $$R_y = R\cos\beta = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i\,,$$

(3) $$R_z = R\cos\gamma = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i\,.$$

Pro směrové úhly α, β, γ platí

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R},\quad \cos\beta = \frac{R_y}{R},\quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R},$$ *přičemž platí:* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$

ÚLOHA Č.1/b – Nalezení výslednice *Mr* prostorového svazku vektorů momentů *Mio*

Výsledným účinkem prostorového svazku vektorů momentů ***Mio*** je jediná dvojice sil o momentu ***Mr*** působící v počátku soustavy souřadnic ***o***. Velikost momentu ***Mr*** se stanoví pomocí pravoúhlých průmětů vektoru ***Mr*** do souřadnicových os ***Mrx***, ***Mry***, ***Mrz***, které jsou rovny algebraickému součtu statických momentů sil soustavy ke stejným osám.

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2}$$

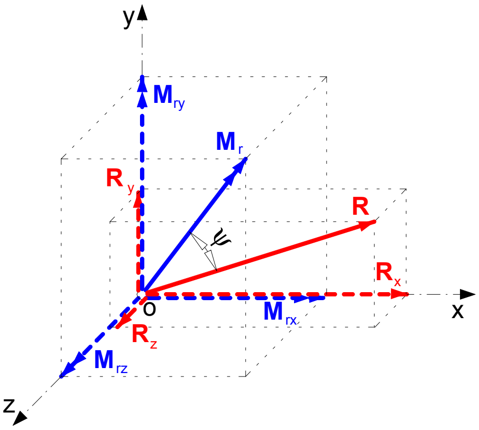
(4) $$M_{rx} = M_r \cos\lambda = \sum_{i=1}^{n} (F_{iz} y_i - F_{iy} z_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i (y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i)$$

(5) $$M_{ry} = M_r \cos\mu = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix} z_i - F_{iz} x_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i (z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i)$$

(6) $$M_{rz} = M_r \cos\nu = \sum_{i=1}^{n} (F_{iy} x_i - F_{ix} y_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i (x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i)$$

Pro směrové úhly λ, μ, ν platí

$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r}, \quad \cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r}, \quad \cos\nu = \frac{M_{rz}}{M_r}, \qquad \textit{přičemž platí: } \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1\,.$$



2/7

Vztahy | (1, 2, 3, 4, 5, 6) pro ***Rx***, ***Ry***, ***Rz*** a ***Mrx***, ***Mry***, ***Mrz*** představují ***šest statických podmínek ekvivalence*** obecné prostorové soustavy sil.

Výsledné vektory ***R*** a ***Mr*** spolu svírají v počátku soustavy souřadnic úhel ψ, pro který platí vztah

$$\cos\psi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = \frac{R_x M_{rx} + R_y M_{ry} + R_z M_{rz}}{R M_r} \neq 0\,.$$

V případě $\Psi = \pi/2$ je ***R*** kolmé na ***Mr*** a platí podmínka ortogonality.

Závěr:
Obecnou soustavu sil F1…Fn lze nahradit silou R, která prochází počátkem souřadnicové soustavy o≡m a dvojicí sil o momentu Mr, který má stejnou velikost jako statický moment všech sil soustavy k počátku souřadnicové soustavy. Jedná se o tzv. bivektor (dynamu) R, Mr. Výsledný účinek je popsán šesti nezávislými veličinami – Rx, Ry, Rz, Mrx, Mry, Mrz, pro které platí vztah

$$R_x M_{rx} + R_y M_{ry} + R_z M_{rz} \neq 0$$

ÚLOHA Č.2 – Nahrazení výslednic (*R*, *Mr*)

Vektor ***Mr*** lze rozložit v rovině ρ vymezené vektory ***R*** a ***Mr*** do dvou na sebe navzájem kolmých složek ***Mrv*** a ***Mrn***, tak že vektor ***Mrv*** splývá s paprskem síly ***R***.

$$M_{rv} = M_r \cos\psi = konst., \quad M_{rn} = M_r \sin\psi$$

1. Vektor momentu ***Mrn*** lze v rovině $\Phi \perp \rho$ nahradit dvojicí sil R působících na rameni ***r = Mrn/R***, přičemž jedna síla prochází počátkem souřadnicové soustavy ***o***. Tuto dvojici sil lze v rovině Φ posunout a pootočit tak, aby paprsek jedné síly dvojice byl totožný s paprskem ***R***, který prochází počátkem souřadnicové soustavy ***o***. Po této úpravě je *výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil charakterizován silou **R** působící v centrální ose **C** a hlavním momentem **Mrv** || **R***. Tento účinek se také nazývá ***šroub*** *(posun ve směru centrální osy a otáčení okolo téže osy)*.

2. Vektor hlavního momentu ***Mrv*** lze nahradit dvojicí sil ***T*** působících na rameni ***p = Mrv/T***. Dvojici sil ***T*** působící v rovině $\Delta \perp \rho$ je možné posunout a pootočit tak, aby jedna síla z dvojice sil ***T*** protnula sílu ***R*** v bodě ***m*** na centrální ose ***C***. Vektorovým součtem ***R*** a ***T*** se získá síla ***V***, která svírá s osou C úhel δ.

$$V=\sqrt{T^2+R^2}\,,\quad \cos\delta=\frac{R}{V},\quad \sin\delta=\frac{T}{V}.$$

Uplatněním tohoto postupu je bivektor (dynama) ***R*** a ***Mr*** nahrazen dvojicí mimoběžných sil ***T*** a ***V***, tzv. ***silovým křížem***. Toto nahrazení lze provést nekonečně mnoha způsoby, protože lze volit buď velikost síly ***T*** nebo ramene ***p***; ***Mrv = T·p***.

Závěr: Obecnou soustavu sil F1…Fn lze také nahradit:
- ***šroubem – silou R působící v centrální ose C a hlavním momentem Mrv || R***
- ***silovým křížem – dvěma mimoběžnými silami T, V.***

Podmínky rovnováhy:

Obecná soustava sil ***Fi*** (***i=1…n***) působící na tuhé těleso je v rovnováze pouze tehdy, když algebraické součty všech sil do všech souřadnicových os jsou rovny nule a algebraické součty statických momentů všech sil soustavy ke stejným osám jsou také rovny nule.

$$R_x=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=\sum_{i=1}^{n}F_i\cos\alpha_i=0$$

$$R_y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}=\sum_{i=1}^{n}F_i\cos\beta_i=0$$

$$R_z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}=\sum_{i=1}^{n}F_i\cos\gamma_i=0$$

silové podmínky rovnováhy

$$M_{rx}=\sum_{i=1}^{n}M_{ix}=\sum_{i=1}^{n}F_i(y_i\cos\gamma_i-z_i\cos\beta_i)=0$$

$$M_{ry}=\sum_{i=1}^{n}M_{iy}=\sum_{i=1}^{n}F_i(z_i\cos\alpha_i-x_i\cos\gamma_i)=0$$

$$M_{rz}=\sum_{i=1}^{n}M_{iz}=\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i\cos\beta_i-y_i\cos\alpha_i)=0$$

momentové podmínky rovnováhy

Místo 3 silových a 3 momentových podmínek rovnováhy lze použít i jiné kombinace vždy do celkového součtu 6.

ÚLOHA – Rozklad síly nebo prostorové soustavy sil šesti silami zadanými paprsky

Jedná se o úlohu, kdy obecnou sílu ***F=R*** zadanou velikostí, působištěm ***m***(***x,y,z***) a směrovými úhly α, β, γ nahrazujeme její výsledný účinek pomocí šesti sil ***Fk*** (***k=1…6***), které působí v zadaných paprscích.

Síla ***R*** je popsána průměty do tří souřadnicových os (***Rx***, ***Ry***, ***Rz***) a statickými momenty ***Mx***, ***My***, ***Mz*** vztažené k souřadnicovým osám. Při řešení dané úlohy se nejdříve libovolně zvolí smysly všech „náhradních“ sil ***Fk*** (***k=1…6***), kterým odpovídají směrové úhly ***αk***, ***βk***, ***γk*** a působiště ***mk***. Velikosti a správné smysly „náhradních“ sil ***Fk*** lze zjistit pomocí 6 statických podmínek ekvivalence, které lze napsat mezi soustavou sil ***Fk*** a silou ***F=R***. Tato úloha je řešitelná, je-li determinant soustavy rovnic různý od nuly, tj. matice je regulární (*det A* $\neq$ *0*).

$$\sum_{k=1}^{6}F_{kx}=R_x,\qquad \sum_{k=1}^{6}F_{ky}=R_y,\qquad \sum_{k=1}^{6}F_{kz}=R_z$$

$$\sum_{k=1}^{6}M_{kx}=M_x,\qquad \sum_{k=1}^{6}M_{ky}=M_y,\qquad \sum_{k=1}^{6}M_{kz}=M_z$$

rovnice představují statické podmínky ekvivalence

ÚLOHA – Zrušení síly nebo prostorové soustavy sil šesti silami zadanými paprsky

Jedná se o úlohu, kdy obecnou sílu ***F=R*** zadanou velikostí, působištěm ***m***(***x***,***y***,***z***) a směrovými úhly α, β, γ se snažíme zrušit pomocí šesti sil ***Fk*** (***k=1…6***), které působí v zadaných paprscích. Řešení je stejné jako v předcházejícím bodě, pouze zde se sestavuje 6 statických podmínek rovnováhy.

$$\sum_{k=1}^{6} F_{kx} + R_x = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} F_{ky} + R_y = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} F_{kz} + R_z = 0$$

$$\sum_{k=1}^{6} M_{kx} + M_x = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} M_{ky} + M_y = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} M_{kz} + M_z = 0$$

rovnice představují statické podmínky rovnováhy

ÚLOHA – Nahrazení a zrušení síly obecné prostorové soustavy sil

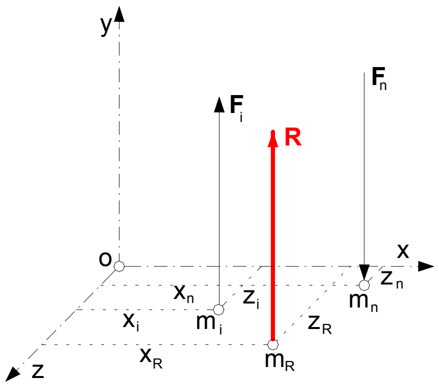
Jedná se o úlohu, kdy obecnou soustavu sil ***Pi*** (***i=1…a***) zadanou velikostí, působištěm ***mi***(***xi***,***yi***,***zi***) a směrovými úhly α_i, β_i, γ_i se snažíme zrušit pomocí šesti sil ***Fk*** (***k=1…6***), které působí v zadaných paprscích. Řešení je stejné jako v předcházejících dvou bodech. *Tento typ úlohy se používá při výpočtu reakcí vazeb tuhého tělesa.*

Soustava rovnoběžných sil v prostoru

Jedná se o zvláštní případ soustavy sil působící v prostoru na bod, který leží v nekonečnu nebo také o případ obecné prostorové soustavy sil.

Výsledný účinek soustavy sil (výslednice soustavy sil *R*)

Ke stanovení výslednice ***R*** je nutné orientovat pravoúhlý systém souřadnic tak, aby jedna souřadnicová osa byla rovnoběžná s paprsky sil soustavy ***F1…Fn*** (např. osa ***y***). Potom se velikost výslednice soustavy rovnoběžných sil ***R*** určí algebraickým součtem všech sil. Směr (resp. poloha působiště výslednice ***R***) působení výslednice ***R*** se určí tak, aby znaménko statického momentu výslednice ***R*** k příslušné ose bylo stejné jako znaménko statického momentu celé soustavy sil ke stejné ose. Polohu výslednice m_R lze určit pomocí momentové věty z momentových podmínek ekvivalence k osám ***x*** a ***z***.



$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i\,, \quad M_x = Rz_R = \sum_{i=1}^{n} F_i z_i\,, \quad M_z = Rx_R = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i\,.$$

rovnice představují statické podmínky ekvivalence soustavy rovnoběžných sil v prostoru

Souřadnice působiště paprsku $m_R(x_R; z_R)$ výslednice sil ***R*** v souřadnicové rovině vymezené osami souřadnic lze určit pomocí vztahů $x_R = \dfrac{M_z}{R} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$ $\qquad z_R = \dfrac{M_x}{R} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$.

2/8 

Podmínky rovnováhy:

Soustava rovnoběžných sil v prostoru ***F1…Fn***, které jsou rovnoběžné např. s osou souřadnic ***y***, je v rovnováze pouze tehdy, když algebraický součet všech sil a součet statických momentů všech sil soustavy ke dvěma osám, které leží v rovině kolmé na paprsky sil je roven nule.

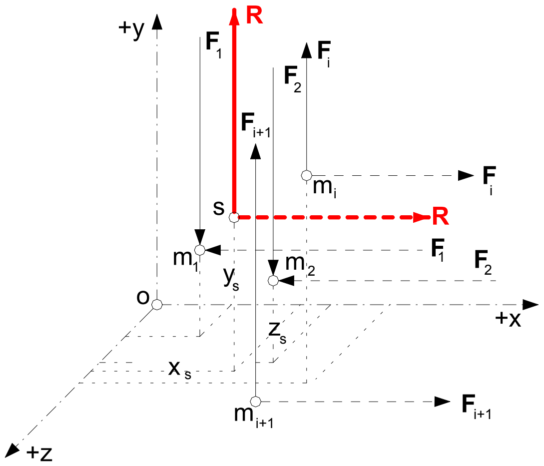
$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} F_i z_i = 0, \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i = 0$$

silová a momentové podmínky rovnováhy

Rozklad a zrušení síly R (F) třemi silami v zadaných paprscích
Úlohu rozkladu a zrušení síly R (F) pomocí tří sil v zadaných paprscích lze řešit pomocí tří statických podmínek ekvivalence a tří podmínek rovnováhy.

Statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru

Statický střed soustavy s rovnoběžných sil v prostoru je bod okolo kterého se otáčí výslednice rovnoběžných sil R. Lze jej určit jako průsečík paprsků výslednic soustavy rovnoběžných sil pro tři na sebe navzájem kolmé směry. Souřadnice statického středu soustavy rovnoběžných sil lze určit pomocí vztahů



$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}.$$

Maticový zápis podmínek ekvivalence a rovnováhy silových soustav

Nejobecnějším typem soustavy sil je **prostorová soustava sil *Fi* (*i=1…n*)**. Pro tento typ soustavy sil bylo uvedeno **6 podmínek ekvivalence** a **6 podmínek rovnováhy**. Pomocí tohoto typu soustavy lze popsat jednodušší typy silových soustav (rovinné, rovnoběžné, působící ve společném bodě…).

Podmínky ekvivalence a rovnováhy obecné prostorové soustavy sil ***Fi*** (***i=1…n***) lze uspořádat pomocí maticového zápisu. V tomto zápisu je použito následující označení:

- soustava sil uspořádána ve vektoru ***F(1,n)***
  $$F = \{F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n\}^T$$

- matice součinitelů soustavy sil ***A(6,n)***
  $$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i, & \cos\alpha_2, & \ldots, \cos\alpha_n \\ \cos\beta_1, & \cos\beta_2, & \ldots, \cos\beta_n \\ \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2, & \ldots, \cos\gamma_n \\ y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1, & y_2\cos\gamma_2 - z_2\cos\beta_2, & \ldots, y_n\cos\gamma_n - z_n\cos\beta_n \\ z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1, & z_2\cos\alpha_2 - x_2\cos\varphi_2, & \ldots, z_n\cos\alpha_n - x_n\cos\gamma_n \\ x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1, & x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2, & \ldots, x_n\cos\beta_n - y_n\cos\alpha_n \end{bmatrix}$$

- vektor výsledného silového účinku ***Sr(6,1)***

  $R = \{R_x, R_y, R_z\}^T, \qquad M_r = \{M_{rx}, M_{ry}, M_{rz}\}^T$

  $S_r = \{R, M_r\}^T = \{R_x, R_y, R_z, M_{rx}, M_{ry}, M_{rz}\}^T$

Podmínky ekvivalence obecné prostorové soustavy sil ***Fi*** (***i=1…n***) lze zapsat ve tvaru

$$\underset{(6,1)}{S_r} = \underset{(6,n)}{A}\,\underset{(n,1)}{F}$$

Výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil ***Fi*** (***i=1…n***) je nulový platí-li

$$\underset{(6,1)}{S_r} = \underset{(n,1)}{0}$$

Statické podmínky rovnováhy obecné prostorové soustavy sil ***Fi*** (***i=1…n***) je možné zapsat ve tvaru

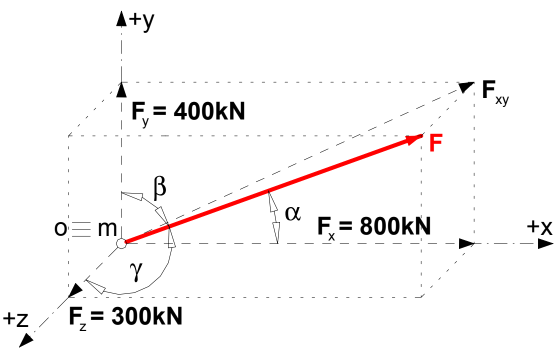
$$\underset{(6,n)}{A}\,\underset{(n,1)}{F} = \underset{(6,1)}{0}$$

*Poznámka: u rovinných silových soustav, které působí v rovině xy se dosazují do matice součinitelů sil **A** vztahy*

$$\cos\beta_i = \sin\alpha_i \quad (i = 1 \ldots n)$$

Příklad č.2/1

Určete sílu ***F*** a odklon této síly od souřadnicových os ***x***, ***y***, ***z***, za předpokladu znalosti složek působících v souřadnicových osách ***Fx = 800kN***, ***Fy = 400kN***, ***Fz = 300kN*** (a). Dále určete jaké směrové úhly by musel svírat paprsek výsledné síly ***F*** se souřadnicovými osami, aby měly průměty ***Fx***, ***Fy*** a ***Fz*** stejnou velikost (b).



a)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F = \sqrt{800^2 + 400^2 + 300^2} = 943{,}398 kN$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{800}{943{,}398} = 0{,}84799 \rightarrow \alpha = 32{,}005^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{400}{943{,}398} = 0{,}42399 \rightarrow \beta = 64{,}912^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{300}{943{,}398} = 0{,}31799 \rightarrow \gamma = 71{,}458^\circ$$

$$\textit{kontrola:}\ \cos^2 32{,}005 + \cos^2 64{,}912 + \cos^2 71{,}458 = 1$$

(b)

$$F_x = F_y = F_z \equiv F \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{F}{F},\ \cos\beta = \frac{F}{F},\ \cos\gamma = \frac{F}{F} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma \equiv \cos\delta$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \rightarrow \quad 3\cdot\cos^2\delta = 1 \rightarrow \cos^2\delta = \frac{1}{3} \rightarrow \cos\delta = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}57735 \rightarrow \delta = 54{,}735^\circ$$

Příklad č.2/2

Určete výslednici ***R*** prostorového svazku sil ***Fi*** (***i=1…3***) – zadání v tabulce.

		směrové úhly						průměty sil Fi do os ***x***, ***y***, ***z***		
i	Fi [kN]	αi [°]	βi [°]	γi [°]	cos(αi)	cos(βi)	cos(γi)	Fix = Fi*cos(αi) [kN]	Fiy = Fi*cos(βi) [kN]	Fiz = Fi*cos(γi) [kN]
1	200,00	0,00	45,00	110,00	1,0000000	0,7071068	-0,3420201	200,000	141,421	-68,404
2	50,00	85,00	270,00	145,00	0,0871557	0,0000000	-0,8191520	4,358	0,000	-40,958
3	400,00	150,00	50,00	20,00	-0,8660254	0,6427876	0,9396926	-346,410	257,115	375,877
								-142,052	**398,536**	**266,515**
								Rx	**Ry**	**Rz**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-142{,}052)^2 + 398{,}536^2 + 266{,}515^2} = 500{,}040 kN$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-142{,}052}{500{,}040} = -0{,}28408 \rightarrow \alpha = 106{,}504^\circ$$

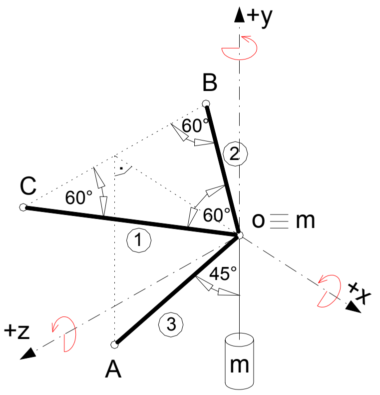
$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{398{,}536}{500{,}040} = 0{,}79701 \rightarrow \beta = 37{,}155^\circ$$

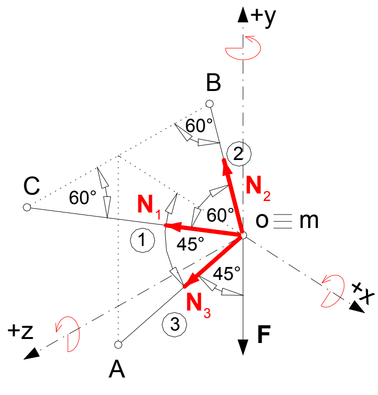
$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{266{,}515}{500{,}040} = 0{,}53299 \rightarrow \gamma = 57{,}792^\circ$$

$$\textit{kontrola:}\ \cos^2 106{,}504 + \cos^2 37{,}155 + \cos^2 57{,}792 = 1$$

Příklad č.2/3

Závaží o hmotnosti ***m = 1000kg*** je zavěšeno na styčníku ***o≡m*** prutové konstrukce tvořené třemi pruty ***1***, ***2***, ***3***. Určete osové síly v prutech ***N1***, ***N2***, ***N3***.





$F = mg = 1000 \cdot 10 = 10kN$

silové podmínky rovnováhy:

$$(1): R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \rightarrow -N_1 \cdot \cos 30^\circ - N_2 \cdot \cos 30^\circ - N_3 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$(2): R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \rightarrow -N_3 \cdot \sin 45^\circ - F = 0$$

$$(3): R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \rightarrow N_1 \cdot \sin 30^\circ - N_2 \cdot \sin 30^\circ = 0$$

rovnice (2): $N_3 = -\dfrac{F}{\sin 45^\circ} = -\dfrac{10}{\sin 45^\circ} = -14{,}142kN$ (tlaková síla – opačná orientace než na obrázku)

rovnice (3): $N_1 = N_2 \cdot \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = N_2 \equiv N \rightarrow N_1 = 5{,}773kN; N_2 = 5{,}773kN$ (tahové síly – orientace podle obrázku)

rovnice (1): $-N_1 \cdot \cos 30^\circ - N_2 \cdot \cos 30^\circ - N_3 \cdot \cos 45^\circ = 0$

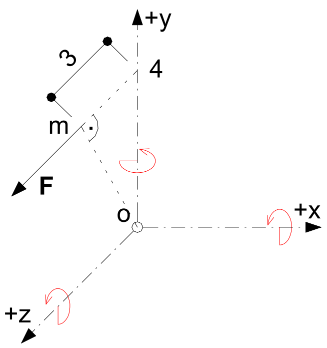
$$-N \cdot \cos 30^\circ - N \cdot \cos 30^\circ - N_3 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$-2N \cdot \cos 30^\circ - N_3 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N = -\frac{N_3}{2} \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = -\frac{-14{,}142}{2} \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = 5{,}773kN$$

Příklad č.2/4

Stanovte statický moment síly ***F*** || ***z*** k počátku soustavy souřadnic ***o*** (***F = 2kN***).



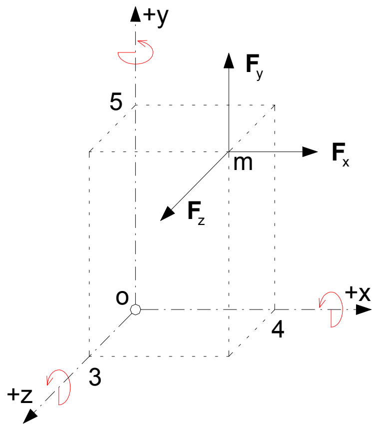
$$r = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = 2{,}645m$$

$$M_o = Fr = 2 \cdot 2{,}645 = 5{,}290kNm$$

$$M_x = Fr = 2 \cdot 2{,}645 = 5{,}290kNm$$

Příklad č.2/5

Sílu ***F***, která je zadaná složkami ***Fx = 5kN***, ***Fy = 3kN*** a ***Fz = 2kN***, působící v bodě ***m(4, 5, 3)*** posuňte do počátku souřadnicové soustavy o tak, aby se na jejím účinku nic nezměnilo.



statické momenty síly ***F*** k souřadnicovým osám:

$$M_x = F_z y - F_y z = 2\cdot 5 - 3\cdot 3 = 1kNm$$

$$M_y = F_x z - F_z x = 5\cdot 3 - 2\cdot 4 = 7kNm$$

$$M_z = F_y x - F_x y = 3\cdot 4 - 5\cdot 5 = -13kNm$$

výsledný vektor statického momentu ***Mo*** síly ***F*** k bodu ***o***:

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-13)^2} = 14{,}798kNm$$

$$\cos\lambda = \frac{M_x}{M_o} = \frac{1}{14{,}798} = 0{,}06757 \rightarrow \lambda = 86{,}125^\circ$$

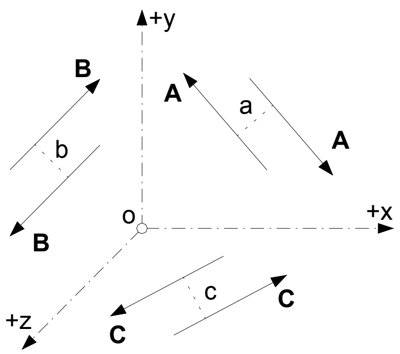
$$\cos\mu = \frac{M_y}{M_o} = \frac{7}{14{,}798} = 0{,}47302 \rightarrow \mu = 61{,}769^\circ$$

$$\cos\upsilon = \frac{M_z}{M_o} = \frac{-13}{14{,}798} = -0{,}87845 \rightarrow \upsilon = 151{,}457^\circ$$

kontrola: $\cos^2 86{,}125 + \cos^2 61{,}769 + \cos^2 151{,}457 = 1$.

Příklad č.2/6

V souřadnicové soustavě ***xyz*** působí podle obrázku tři silové dvojice ***Aa***, ***Bb***, ***Cc***. Nahraďte je jedinou silovou dvojicí. (***A = 0,8kN***; ***B = 1kN***; ***C = 3kN***; ***a = 5m***; ***b = 3m***; ***c = 2m***)



Statické momenty silových dvojic v rovinách:

xy: $M_{rz} = -A\cdot a = -0{,}8\cdot 5 = -4kNm$

xz: $M_{ry} = C\cdot c = 3\cdot 2 = 6kNm$

yz: $M_{rx} = -B\cdot b = -1\cdot 3 = -3kNm$

statický moment silové dvojice:

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-4)^2} = 7{,}810kNm$$

$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r} = \frac{-3}{7{,}810} = -0{,}38412 \rightarrow \lambda = 112{,}589^\circ$$

$$\cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r} = \frac{6}{7{,}810} = 0{,}76825 \rightarrow \mu = 39{,}803^\circ$$

$$\cos\upsilon = \frac{M_{rz}}{M_r} = \frac{-4}{7{,}810} = -0{,}51216 \rightarrow \upsilon = 120{,}808^\circ$$

kontrola: $\cos^2 112{,}589 + \cos^2 39{,}803 + \cos^2 120{,}808 = 1$

Výsledná silová dvojice ***Pp*** o statickém momentu ***Mr = 7,810kNm*** působí v libovolné rovině, která je kolmá na vektor ***Mr***.

Příklad č.2/7

Stanovte výsledný silový účinek prostorové soustavy sil vztažené k souřadnicové soustavě ***xyz***. Vlastní zadání prostorové soustavy sil je v tabulce.

i	Fi [kN]	souřadnice působišť xi [m]	yi [m]	zi [m]	směrové úhly αi [°]	βi [°]	γi [°]	cos(αi)	cos(βi)	cos(γi)
1	8,90	7,40	8,60	0,70	110,05	153,64	106,38	-0,3428400	-0,8960220	-0,2820066
2	10,20	-4,10	4,00	-2,60	97,59	64,73	26,58	-0,1320834	0,4268844	0,8943105
3	12,80	-1,30	-0,70	-4,30	103,38	90,00	13,54	-0,2314083	0,0000000	0,9722067

i	průměty sil Fi do os ***x***, ***y***, ***z*** Fix = Fi*cos(αi) [kN]	Fiy = Fi*cos(βi) [kN]	Fiz = Fi*cos(γi) [kN]	statické momentysil k osám ***x***, ***y***, ***z*** Fiz*yi - Fiy*zi [kNm]	Fix*zi - Fiz*xi [kNm]	Fiy*xi - Fix*yi [kNm]
1	-3,051	-7,975	-2,510	-16,003	16,437	-32,771
2	-1,347	4,354	9,122	47,809	40,903	-12,463
3	-2,962	0,000	12,444	-8,711	28,914	-2,073
Σ	**-7,361**	**-3,620**	**19,056**	**23,095**	**86,254**	**-47,308**
	Rx	**Ry**	**Rz**	**Mrx**	**Mry**	**Mrz**

výslednice ***R***: $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{(-7{,}361)^2+(-3{,}620)^2+19{,}056^2}=20{,}747kN$

$$\cos\alpha=\frac{R_x}{R}=\frac{-7{,}361}{20{,}747}=-0{,}35479\rightarrow\alpha=110{,}781^\circ$$

$$\cos\beta=\frac{R_y}{R}=\frac{-3{,}620}{20{,}747}=-0{,}17448\rightarrow\beta=100{,}049^\circ$$

$$\cos\gamma=\frac{R_z}{R}=\frac{19{,}056}{20{,}747}=0{,}91849\rightarrow\gamma=23{,}293^\circ$$

kontrola: $\cos^2 110{,}781+\cos^2 100{,}049+\cos^2 23{,}293=1$

výslednice ***Mr***: $M_r=\sqrt{M_{rx}^2+M_{ry}^2+M_{rz}^2}=\sqrt{23{,}095^2+86{,}254^2+(-47{,}308)^2}=101{,}050kNm$

$$\cos\lambda=\frac{M_{rx}}{M_r}=\frac{23{,}095}{101{,}050}=0{,}22855\rightarrow\lambda=76{,}788^\circ$$

$$\cos\mu=\frac{M_{ry}}{M_r}=\frac{86{,}254}{101{,}050}=0{,}85358\rightarrow\mu=31{,}397^\circ$$

$$\cos\upsilon=\frac{M_{rz}}{M_r}=\frac{-47{,}308}{101{,}050}=-0{,}46816\rightarrow\upsilon=117{,}915^\circ$$

kontrola: $\cos^2 76{,}788+\cos^2 31{,}397+\cos^2 117{,}915=1$

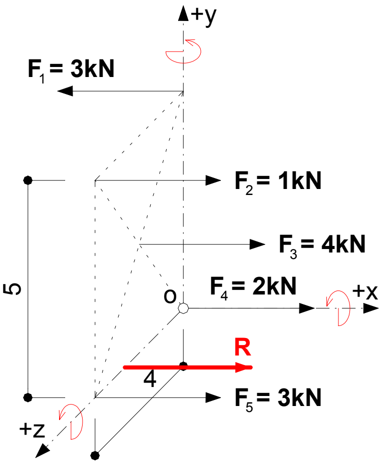
výslednice ***R*** a ***Mr*** spolu svírají úhel:

$$\cos\psi=\frac{(-7{,}361)\cdot 23{,}095+(-3{,}620)\cdot 86{,}254+19{,}056\cdot(-47{,}308)}{20{,}747\cdot 101{,}050}=-0{,}66003\rightarrow\psi=131{,}302^\circ$$

Výsledný účinek zadané prostorové soustavy sil ***F1…F3*** je bivektor ***R*** a ***Mr***, protože platí $\psi\neq\pi/2$.

Příklad č.2/8

Určete výslednici pěti ***F1…F5*** navzájem rovnoběžných sil zadaných podle obrázku. Síly jsou rovnoběžné s osou ***x***.



$$R = \sum_{i=1}^{5} F_i = -3 + 1 + 4 + 2 + 3 = 7kN$$

$$M_y = Rz_R = \sum_{i=1}^{5} F_i z_i = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 24kNm.$$

$$M_z = Ry_R = \sum_{i=1}^{5} F_i y_i = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2{,}5 = 0kNm$$

souřadnice působiště paprsku výslednice R:

$$y_R = \frac{M_z}{R} = \frac{0}{7} = 0m\,; \quad z_R = \frac{M_y}{R} = \frac{24}{7} = 3{,}429m$$