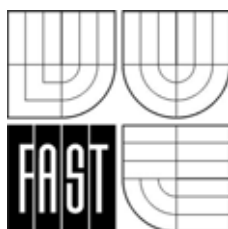


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

ING. JIŘÍ KYTÝR, CSc.
ING. ZBYNĚK KERŠNER, CSc.
ING. ROSTISLAV ZÍDEK
ING. ZBYNĚK VLK

ZÁKLADY
STAVEBNÍ MECHANIKY

MODUL BD01-MO3
STATICKY URČITÉ PRUTOVÉ KONSTRUKCE – ČÁST 1



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

OBSAH

1 Úvod.....	5
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu	5
1.4 Klíčová slova.....	6
2 Nosné stavební konstrukce	7
2.1 Rozdělení stavebních konstrukcí	7
2.2 Analýza prutových konstrukcí	7
2.3 Zatížení stavebních konstrukcí.....	8
2.3.1 Idealizace reálného zatížení	9
2.3.2 Obecné spojitě zatížení na prutu	10
3 Výpočtový model rovinné prutové soustavy	13
3.1 Staticky určené prutové konstrukce.....	13
3.2 Statika hmotných objektů a složených soustav	14
3.3 Typy vazeb v rovině.....	15
3.4 Statická a kinematická určitost	17
3.5 Podepření nosníku.....	18
3.6 Výjimkové případy podepření	18
3.7 Výpočet reakcí vazeb	19
3.7.1 Jednoduché a lomené nosníky	20
3.7.2 Rovinné složené nosníkové soustavy.....	21
3.8 Průběhy složek vnitřních sil	21
4 Analýza vnitřních sil na rovinných prutech.....	23
4.1 Složky výslednice vnitřních sil	23
4.2 Výpočet vnitřních sil	24
4.3 Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu	25
4.4 Diagramy vnitřních sil za obecného zatížení	28
4.4.1 Postup při řešení diagramů vnitřních sil	28
5 Příklady řešení rovinných nosníků a prutových soustav	29
5.1 Jednoduché staticky určené nosníky.....	29
5.1.1 Prostý nosník.....	29
5.1.2 Konzolový nosník	34
5.2 Nosník s převislými konci a šikmý nosník	37
5.3 Lomený nosník.....	39
5.4 Gerberův nosník	41
5.5 Složená nosníková soustava	43
5.5.1 Trojkloubový lomený nosník.....	43
5.5.2 Obecná složená soustava.....	46

6	Studijní prameny	47
6.1	Seznam použité literatury	47
6.2	Seznam doplňkové studijní literatury	47
6.3	Odkazy na další studijní zdroje a prameny.....	47

1 Úvod

1.1 Cíle

V tomto třetím modulu Základů stavební mechaniky se naučíme řešit základní typy nosných staticky určitých stavebních konstrukcí s hlavním zřetelem na prutové konstrukce. Na teoretickém základu statiky hmotných objektů a složených soustav si vysvětlíme posuzování statické a kinematické určitosti výpočtového modelu rovinné prutové soustavy sestavené z přímých prutů. Aplikací podmínek rovnováhy si ukážeme řešení reakcí vazeb při jejich různém uspořádání. Pro obecné vnější zatížení působící na přímý prut a rozložené do pravoúhlých složek vyšetříme průběhy (diagramy) vnitřních sil. Pro vztahy mezi funkcemi jednotlivých vnitřních sil a pro vyšetření extrémů odvodíme diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu.



Naším cílem ve finále budou výpočty nosných stavebních konstrukcí z hlediska poskytnutí údajů pro dimenzování podle jednotlivých materiálů.

1.2 Požadované znalosti

Třetí modul základů stavební mechaniky navazuje na znalosti získané v prvním modulu o rovinných silových soustavách. Budeme aplikovat rozklad sil do pravoúhlých složek, statický moment síly, redukci síly k bodu a statické podmínky rovnováhy sil a momentů sil.



Z matematického aparátu budeme používat goniometrické funkce, diferenciální počet včetně určování extrémů funkce a významu derivace jako směrnice tečny ke křivce a rovněž obecný integrál.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul obsahuje látku probíranou v pěti týdnech semestru. Doba potřebná k nastudování jednotlivých kapitol či odstavců se liší od několika minut do několika desítek minut. Záleží to jednak na předchozí přípravě studenta v příslušné oblasti, jednak na obtížnosti daného tématu. Potřebná doba ke studiu celého textu činí 25 až 40 hodin.



Pro dodržení předepsaného rozsahu tohoto modulu je *většina obrázků zmenšena*. Některé rozsáhlejší obrázky v závěrečných odstavcích jsou zmenšeny téměř až na únosnou míru rozlišitelnosti. Za to se uživatelům omlouváme. Tento problém se však týká pouze tištěné podoby textu. Protože se předpokládá práce se studijním materiálem hlavně v elektronické podobě, domníváme se, že by to nemělo být příliš na závadu.

1.4 Klíčová slova



mechanika, statika, pružnost, síla, statický moment, dvojice sil, silová soustava, rovnováha, ekvivalence, výpočtový model, prutová konstrukce, zatížení, vazby, reakce, složky reakcí, statická a kinematická určitost, výjimečný případ podepření, vnitřní síly, diferenciální podmínky rovnováhy, průběhy a diagramy vnitřních sil, prostý nosník, konzola, lomený prut, Gerberův nosník, trojúhelníkový nosník, složená nosníková soustava

2 Nosné stavební konstrukce

Statika stavebních konstrukcí se zabývá výpočty *nosných* stavebních konstrukcí. Stavební konstrukce je v podstatě prostorový hmotný útvar (těleso). Na nosnou konstrukci jsou kladeny tyto základní požadavky: konstrukce musí bezpečně přenést dané zatížení, nesmí se přitom porušit, nesmí ztratit stabilitu a nesmí doznat nepřípustných tvarových změn.



Pro zjednodušení statického řešení nosné konstrukce nám slouží idealizace konstrukce formou **výpočtového modelu**, který se též označuje jako statický model či statické schéma. Jako teoretický základ řešení využijeme statiku hmotného bodu a tuhé desky v rovině.

2.1 Rozdělení stavebních konstrukcí

Stavební konstrukce z hlediska jejich modelování dělíme na modely

- *jednorozměrné* (1D), kde konstrukčním prvkem je **prut**, **nosník**, sloup a hovoříme tedy o **prutových konstrukcích**; o staticky určitých konstrukcích pojednáme v Základech stavební mechaniky, o staticky neurčitých konstrukcích pak ve Statice,
- *dvojměrné* (2D), kde konstrukčním prvkem je deska, stěna, skořepina, tj. plošné konstrukce; jejich analýzou se zabývá Pružnost a plasticita,
- *trojrozměrné* (3D), u nichž se jedná o masivní útvar, např. blok, základovou patku, opěrnou zeď apod., kdy nelze aplikovat zjednodušení.

2.2 Analýza prutových konstrukcí

V tomto předmětu se budeme zabývat statickou analýzou rovinných a prostorových prutových konstrukcí. Zatížení působící na reálné nosné prutové konstrukce u nich vyvolává *přetvoření* a vznikají *napětí* (vnitřní síly).

Závislost mezi napětím a přetvořením popisují fyzikální rovnice. Obecně jsou fyzikální závislosti nelineární a hovoříme o *fyzikální nelinearitě*. Zjednodušený předpoklad *pružného* chování materiálu lze popsat lineární funkcí (Hookův zákon) a potom se jedná o **fyzikálně lineární řešení**.

Složky přemístění jsou obvykle velmi malé (tzv. *malé deformace*) v porovnání s rozhodujícími rozměry konstrukce. Sestavíme-li podmínky rovnováhy na původní (nezdeformované) konstrukci, dopustíme se jisté chyby, která není pro většinu stavebních konstrukcí významná. V tom případě hovoříme o *teorii prvního řádu* a o **geometricky lineárním chování**.

V případě, že jsou plněny statické podmínky rovnováhy na zdeformované konstrukci, mluvíme o *teorii druhého řádu* a o *geometrické nelinearitě*. Přitom i nadále můžeme považovat deformace za velmi malé. Studium úloh, u nichž jsou přemístění řádově srovnatelná s délkami prutů, se zabývá *teorií konečných deformací*. Jako geometricky nelineární je nutné počítat především konstrukce lanové a takové, u nichž hrozí ztráta stability.

Při lineárním řešení platí princip úměrnosti a superpozice účinků (viz odst. 2.1 prvního modulu). V dalším výkladu budeme při statickém řešení konstrukcí uvažovat výhradně *lineární mechaniku a malé deformace*.



Robert Hook (1635 – 1703) byl anglický fyzik a matematik s mimořádně širokými zájmy. Již za studií v Oxfordu se projevil jako obratný experimentátor. Základní myšlenku svého zákona o úměrnosti mezi silou a přetvořením publikoval v roce 1678.

2.3 Zatížení stavebních konstrukcí



Nosné konstrukce se vyšetřují na zatížení předepsaná normami. Z našich norem to jsou zejména ČSN 73 0035 Zatížení stavebních konstrukcí a ČSN 73 6203 Zatížení mostů. Začínají se uplatňovat též evropské normy Eurokódy (EN), např. EN 1990 Zásady navrhování konstrukcí a EN 1991 Zatížení konstrukcí.

Norma je závazný předpis pro navrhování a výpočty. Shrnuje v sobě zkušenosti projektantů (statiků), výsledky laboratorních zkoušek, materiálové vlastnosti i meteorologické či seismografické údaje a odráží vždy současný stav vývoje a výzkumu. Norma stanovuje způsob zavedení působícího zatížení do výpočtu, kombinace různých druhů zatížení pro vystižení všech nepříznivých účinků (s minimální pravděpodobností) apod.

Stavební konstrukce musí být navržena (a provedena) tak, aby zatížení působící ve všech fázích výstavby i provozu *nezpůsobila zřícení* konstrukce nebo některé její části, *deformace* nepřijatelných hodnot, *poškození* nenosných částí od nepřiměřených deformací nosných částí, popř. poškození nepřiměřené působící příčině (při jakékoliv události).

Zatížení (F) působící na konstrukci je

- **přímé** (síla působící na konstrukci),
- **nepřímé** (vynucené nebo omezené deformace nebo vynucené kmitání, které jsou způsobeny např. změnami teploty, proměnlivou vlhkostí, nerovnoměrným sedáním nebo zemětřesením); může být buď **stálé** (např. sedání podpor) nebo **nahodilé** (např. účinek teploty).

Zatížení se klasifikují (EN)

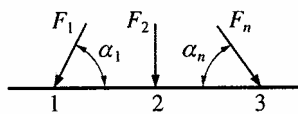
- podle *proměnnosti v čase* na zatížení
 - **stálá** (G), obvykle působící po celou dobu trvání, např. vlastní tíha konstrukcí, pevného vybavení a povrchů silnic, účinky předpětí,
 - **nahodilá** (Q), obvykle nepůsobící po celou dobu trvání, např. užitná zatížení, zatížení větrem nebo sněhem,

- **mimořádná** (A), působící obvykle krátce, např. výbuchy nebo nárazy od vozidel, seismické zatížení,
- podle *proměnnosti v prostoru* na zatížení
 - **pevná**, neměnicí prostorové rozdělení po konstrukci, např. vlastní tíha,
 - **volná**, s libovolným prostorovým rozdělením po konstrukci, např. pohyblivá užitná zatížení, zatížení větrem, zatížení sněhem,
- podle *svého charakteru nebo odezvy konstrukce* na zatížení
 - **statická**, která nezpůsobují významná zrychlení konstrukce,
 - **dynamická**, která způsobují významná zrychlení konstrukce; **kvazistatické zatížení** je dynamické zatížení, které může být popsáno statickými modely,
- podle *charakteru působení* na zatížení
 - **plošné** udávané v jednotkách $[\text{N}\cdot\text{m}^{-2}]$,
 - **přímkové** udávané v jednotkách $[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$,
 - **bodové** udávané v jednotkách $[\text{N}]$;

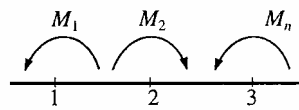
tato zatížení mohou být svislá, vodorovná či obecně působící.

Charakteristická hodnota zatížení je základní reprezentativní hodnota zatížení; může-li být tato hodnota stanovena na základě statistických metod, musí být odvozena z předepsané pravděpodobnosti, že nebude překročena v nepříznivém smyslu během určité doby stanovené s přihlédnutím k návrhové životnosti.

Při návrhu konstrukce se musí uvažovat různé zatěžovací stavy. **Zatěžovací stav** je slučitelná kombinace různých uspořádání zatížení, souborů deformací a imperfekcí, které se mají uvažovat současně. **Kombinace zatížení** je soubor návrhových hodnot použitých pro ověření spolehlivosti konstrukce při současném působení různých zatížení.



Obr. 2.1: Osamělá břemena



Obr. 2.2: Osamělé momenty

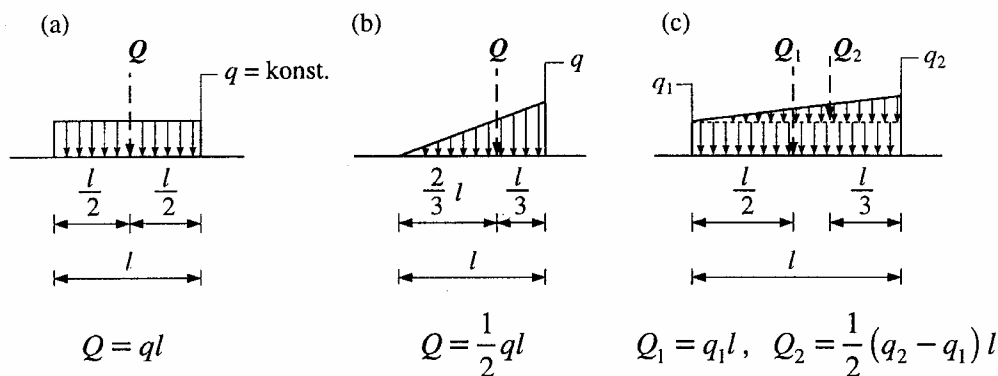
2.3.1 Idealizace reálného zatížení

Pro aplikaci zatížení v prutovém výpočtovém modelu je nutné přistoupit k jeho idealizaci. Předpokládá se působení zatížení přímo na osu prutu. Rovněž podporové vazby (s vyvolanými reakcemi), působí na osu. Reálné zatížení se idealizuje na *liniové* (spojitě rozložené po celé délce nebo části osy), spojitě zatížení soustředěné na velmi malé délce se nahrazuje *osamělou* silou či momentem.

Mezi základní typy idealizovaného zatížení tedy patří

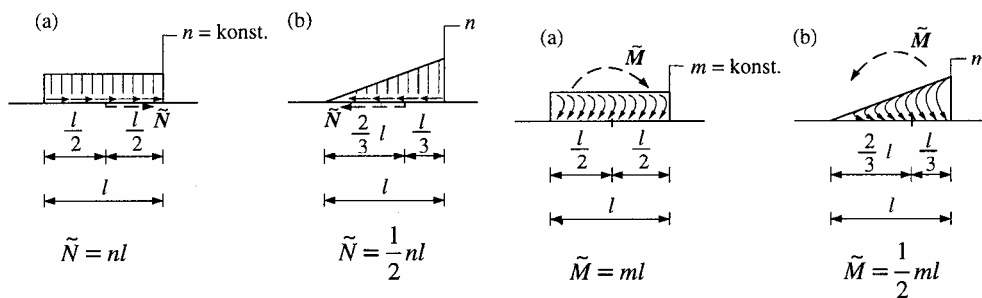
- **osamělá síla** (břemeno) \mathbf{F} (obr. 2.1) o velikosti F $[\text{N}]$,
- **osamělý moment** \mathbf{M} (obr. 2.2) o velikosti M $[\text{Nm}]$,

- **spojité příčné zatížení** (obr. 2.3) o intenzitě q [Nm^{-1}], sleduje směr normály k ose prutu a má náhradní sílu Q ; nejčastěji se vyskytuje spojité zatížení rovnoměrné ($q = \text{konst.}$), méně často zatížení nerovnoměrné popsané funkcí $q(x)$, např. trojúhelníkové, lichoběžníkové, popř. úplně obecné zatížení,
- **spojité osově zatížení** (obr. 2.4) o intenzitě n [Nm^{-1}] má směr tečny k ose prutu s náhradní silou \tilde{N} ,
- **spojité momentové zatížení** (obr. 2.5) o intenzitě m [$\text{Nm} \cdot \text{m}^{-1} = \text{N}$] s náhradním momentem \tilde{M} .



Obr. 2.3: Spojitá příčná zatížení

Pro výpočet reakcí vazeb nosníku lze spojité příčné (osové, resp. momentové) zatížení nahradit *náhradním břemenem* Q (\tilde{N} , resp. momentem \tilde{M}), jehož velikost je rovna obsahu zatěžovacího obrazce, působícím v jeho těžišti.



Obr. 2.4: Spojitá osová zatížení

Obr. 2.5: Spojitá momentová zatížení

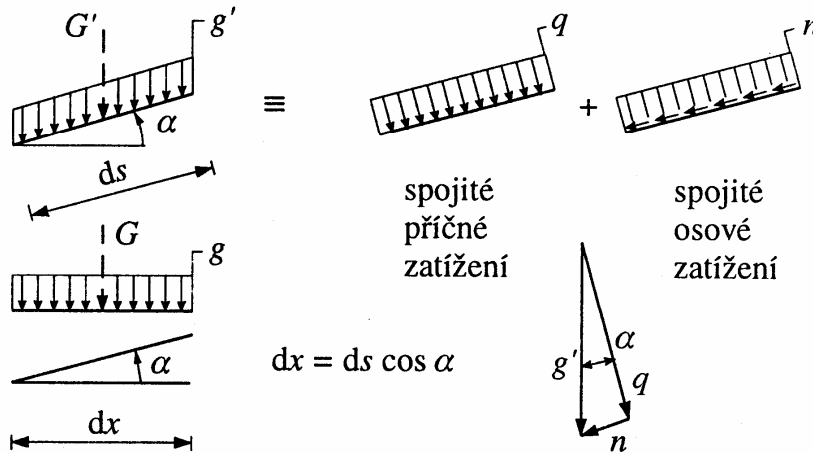
2.3.2 Obecné spojité zatížení na prutu

Spojité zatížení na prutu může být zcela obecné, popsané funkcí $g(x)$. Velmi často bývá idealizováno do tvaru **spojitého rovnoměrného zatížení** $g = \text{konst.}$ Působí-li intenzita spojitého zatížení na prut šikmo, nebo častěji, působí-li spojité zatížení např. ve smyslu gravitace na šikmý prut (nosník), je výhodné toto zatížení rozložit (obr. 2.6) na spojité příčné zatížení o intenzitě q a spojité osové zatížení o intenzitě n .

Spojité rovnoměrné zatížení lze v zásadě zadat dvěma způsoby (na obr. 2.6 uvažováno jako svislé), a to

- **po střednici** s intenzitou g' , např. vlastní tíha, nebo

- **na průmět** (půdorysný) s intenzitou g , např. takto se zadává některé užité zatížení, sníh apod.



Obr. 2.6: Rozklad spojitěho zatížení

Vztah mezi intenzitami g a g' určíme nejnadhěji pomocí **náhradních břemen** G a G' , která musí být pro vzájemný převod stejné velikosti $G = G'$. Např. pro zatížení dle obr. 2.6, kde je střednice odkloněna od vodorovné o úhel α , platí mezi délkou elementu ds a jeho půdorysným průmětem dx vztah

$$dx = ds \cos \alpha . \quad (2.1)$$

Potom pro náhradní břemena platí

$$G' = g' ds , \quad G = g dx = g ds \cos \alpha , \quad (2.2)$$

z čehož plyne vztah

$$\boxed{g' = g \cos \alpha .} \quad (2.3)$$

Svislé spojitě zatížení g' působící po střednici (obr. 2.6) lze rozložit pomocí složek výslednice

$$Q = G' \cos \alpha , \quad \tilde{N} = G' \sin \alpha \quad (2.4)$$

na zatížení *příčné* a *osové*, pro jejichž intenzity platí

$$q = \frac{Q}{ds} = \frac{G' \cos \alpha}{ds} = g' \cos \alpha = g \cos^2 \alpha ,$$

$$n = \frac{\tilde{N}}{ds} = \frac{G' \sin \alpha}{ds} = g' \sin \alpha = g \sin \alpha \cos \alpha , \quad (2.5)$$

takže přehledně je

$$\boxed{q = g \cos^2 \alpha , \quad n = g \sin \alpha \cos \alpha .} \quad (2.6)$$

Při výpočtu reakcí můžeme (zejména při aplikaci momentových podmínek) s výhodou využívat při svisle působícím zatížení svislá náhradní břemena G a G' , jejichž ramena jsou obvykle přímo zadána v náčrtku, aniž bychom museli provádět rozklad pomocí (2.4) na složky Q a \tilde{N} .

Obdobně se postupuje i v případě spojitého zatížení w , resp. w' (např. od větru), působícího na šikmý prut ve vodorovném směru.

Shrnutí



Udělalí jsme si představu o nosných stavebních konstrukcích – jejich rozdělení, vyčlenění konstrukcí prutových – a připravilí jsme si pro budoucí výpočty idealizaci zatížení na těchto konstrukcích.

3 Výpočtový model rovinné prutové soustavy

Prutová konstrukce (prutová soustava) je tvořena nejjednodušším nosným prvkem – prutem, jehož délkový rozměr l značně převládá nad příčnými rozměry d, h . **Výpočtový model** tvoří střednice (osy) prutů, spojující těžiště všech příčných průřezů prutů, dále podepření (způsob uložení, idealizované vazby) a působící zatížení (rovněž idealizované). Konfigurace prutové konstrukce může být obecně *prostorová* (3D) nebo zjednodušeně *rovinná* (2D).



Pruty prutové konstrukce rozdělujeme podle

- změny průřezu na pruty *prizmatické* (konstantního či stálého průřezu) a *neprizmatické* (proměnného průřezu, např. s náběhy),
- polohy střednice a působícího zatížení na pruty *prostorové* (3D) a *rovinné* (2D),
- tvaru střednice na přímé (vodorovné, svislé, šikmé), lomené či zakřivené a pruty obecného tvaru,
- tvaru průřezu na pruty pravidelného průřezu (tvaru obdélníku, čtverce, kruhu apod.), složeného průřezu (včetně válcovaných profilů), popř. tenkostěnné pruty.

Rovinná prutová soustava je taková soustava, u níž v jedné rovině leží střednice všech prutů, zatížení a reakce vazeb (vnitřních i vnějších) a rovněž jedna hlavní centrální osa setrvačnosti každého prutu. Rovinný prut je tedy symetrický podle střednicové roviny. Vyšetřování rovinného prutu je jednodušší než prutu prostorového, proto se budeme nejprve zabývat rovinnými prutovými soustavami.

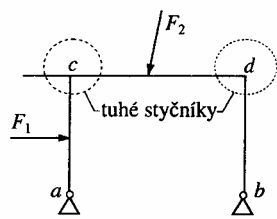
3.1 Staticky určité prutové konstrukce

Každá konstrukce (objekt) uvolněná z vazeb se může pohybovat, je volná a vykazuje jistý **počet stupňů volnosti**. Stupněm volnosti rozumíme možnost objektu se posunout či potočit a zaujmout přitom nekonečně mnoho poloh. Pohyb objektu lze omezit vazbami v příslušném počtu a uspořádání a tím odebrat (zrušit) objektu stupně volnosti. Objekty, které se nemohou vůbec pohybovat, nazýváme *pevně podepřené*. Ve vazbách vznikají reakce.

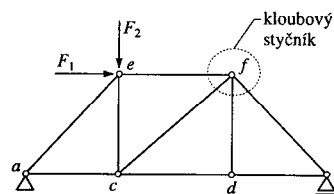
Staticky a současně i kinematicky *určité* prutové konstrukce jsou takové konstrukce, u nichž jsou právě v příslušném počtu jednoznačným způsobem zrušeny všechny stupně volnosti. Pro řešení pak vystačíme s aplikací **podmínek rovnováhy**, které musejí platit mezi prvotními silami (zatížením) a jimi vyvolanými druhotnými silami (reakcemi vazeb). Častěji a stručně hovoříme obvykle o statické určitosti či neurčitosti, kinematické hledisko je však často názornější. Pro posouzení statické určitosti budeme reálné konstrukce idealizovat a přitom využijeme teoretické pojmy, které si vysvětlíme v odst. 3.2.

U staticky *neurčitých* konstrukcí je vazbami odebrán větší počet stupňů volnosti, než konstrukce vykazuje. K jejich řešení musíme navíc k podmínkám rovnováhy přidat ještě přetvárné (deformační) podmínky. Řešením staticky neurčitých prutových konstrukcí se zabývá předmět Statika.

Podrobnosti posuzování statické i kinematické určitosti, neurčitosti a přeúčtosti uvedeme v odst. 3.4.



Obr. 3.1: Rovinný nosník s tuhými styčníky



Obr. 3.2: Rovinná kloubová prutová soustava

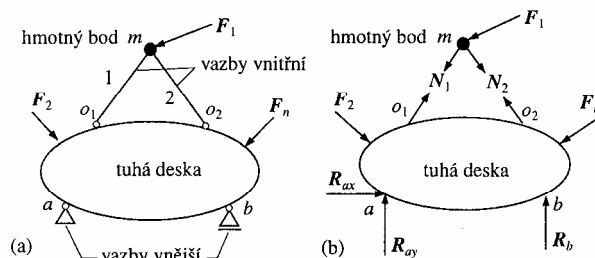
Vzájemné spojení prutů ve styčnicích (uzlech) je ve skutečnosti pružně poddajné s jistou mírou poddajnosti, která se však obtížně stanovuje. Proto se ve výpočtových modelech nejčastěji uvažují obě krajní varianty, a to spojení *monolitické* (tuhé, rámové), viz obr. 3.1 a *kloubové* (nerámové), viz obr. 3.2.

3.2 Statika hmotných objektů a složených soustav

Skutečné konstrukce nebo jejich části idealizujeme v našich úvahách pomocí teoretických pojmů, jakými jsou hmotné objekty či složené soustavy. Hmotným objektem rozumíme hmotný bod, tuhou desku a tuhé těleso (u prostorových konstrukcích). Vzájemným spojením jednotlivých hmotných objektů získáme složenou soustavu.

Polohu **hmotného bodu** v rovině určují dva nezávislé parametry. Volný hmotný bod lze v rovině přemístit dvěma posuny, má tedy **dva stupně volnosti** ($\nu = 2$). Vážeme-li hmotný bod na přímku či křivku, zůstane mu pouze jeden stupeň volnosti ($\nu = 1$).

Polohu **tuhé desky v rovině** určují tři nezávislé parametry, a to dva posuny (translace) a pootočení (rotace). Volná tuhá deska může v rovině zaujmout ∞^3 poloh a má tedy **tři stupně volnosti** ($\nu = 3$).

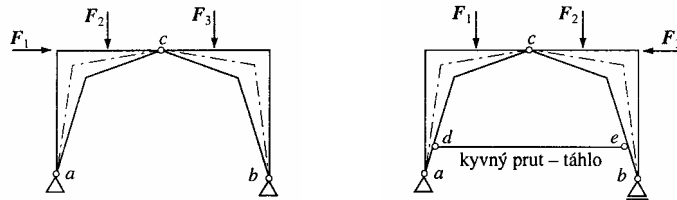


Obr. 3.3: Rovinná složená soustava

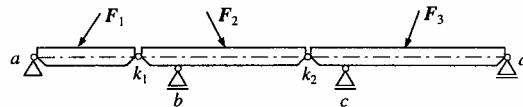
Složená soustava vznikne spojením jednotlivých hmotných objektů navzájem mezi sebou a s pevným útvarem (obr. 3.3). Spojení mezi hmotnými objekty je realizováno vazbami *vnitřními*, spojení s pevným útvarem vazbami *vnějšími* (podporovými).

Mezi **základní typy rovinných složených soustav** (rovinné složené deskové soustavy), kde deska je nahrazena nosníkem nebo prutem, patří

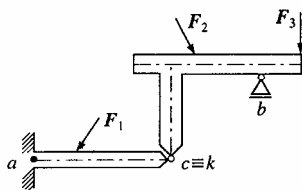
- trojkloubový nosník bez táhla či s táhlem (obr. 3.4),
- Gerberův nosník (obr. 3.5),
- obecná složená nosníková soustava (obr. 3.6),
- kloubová prutová soustava, běžně označovaná jako příhradový nosník (obr. 3.7).



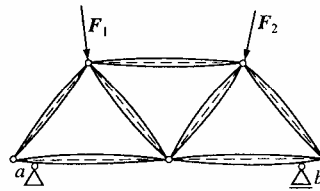
Obr. 3.4: Trojkloubový lomený nosník bez táhla a s táhlem



Obr. 3.5: Gerberův nosník



Obr. 3.6: Složená nosníková soustava



Obr. 3.7: Příhradový nosník

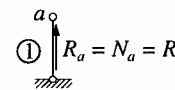

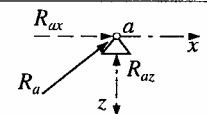
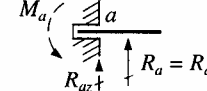
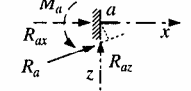
3.3 Typy vazeb v rovině

Pokud jsou hmotné objekty neomezené v pohybu, jsou volné, omezí-li se pohyb, jsou vázané či vedené; úplně nepohyblivé objekty jsou **pevně podepřené**, jejichž řešení je cílem stavební mechaniky.

Vzájemné spojení (spolupůsobení) nosných prvků (prutů) a uložení, tj. připojení celé konstrukce k pevnému útvaru (základům), zajišťují **vazby**, které se pro aplikaci ve výpočtovém modelu rovněž idealizují. Rozlišujeme vazby *vnitřní* a *vnější*.

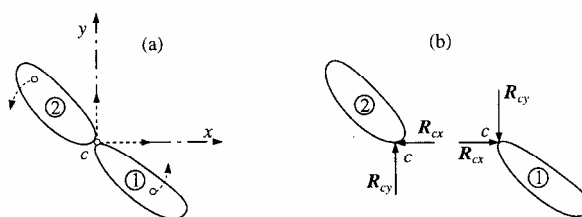
Vazby odebírají (ruší) objektu stupně volnosti. K pevnému podepření je nutné použít tolik vazeb a v takovém uspořádání, aby vhodným způsobem zrušily všechny stupně volnosti. Vnější vazby působí na objekt silami – **reakcemi**, objekty na sebe navzájem působí silami ve vnitřních vazbách – **interakcemi**. Každá vazba vyvoluje tolik složek reakcí, kolik stupňů volnosti ruší. Násobnost vazby tedy vyjadřuje počet složek reakcí nebo počet náhradních jednoduchých vazeb.

Tab. 3.1: Vazby jednoduchého rovinného nosníku

Číslo vazby	Název vazby	Násobnost vazby	Označení vazby se složkami reakcí
1	Kyvný prut	1	
2	Posuvný kloub	1	
3	Neposuvný pevný kloub	2	
4	Posuvné vetknutí	2	
5	Dokonalé vetknutí	3	

Vnější vazby jednoduchých rovinných nosníků (tuhých desek v rovině) mohou být (tabulka 3.1)

- **jednonásobné**, kam řadíme *posuvný kloub* (vedení po hladké přímce) a *kyvný prut*, představovaný přímkou dokonale tuhou nehmotnou tyčí zakončenou na obou koncích kulovými klouby (vedení po kružnici),
- **dvojnásobné**, kam patří *pevný (neposuvný) kloub* či posuvné vetknutí,
- **trojnásobné**, představované *dokonalým vetknutím*.

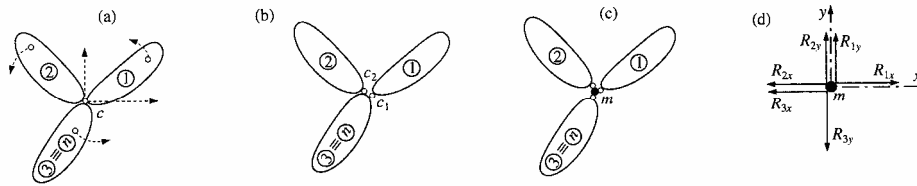


Obr. 3.8: Vnitřní kloub spojující dvě desky

Vnitřní vazby složených rovinných soustav jsou realizovány kyvným prutem (táhlem) a vnitřním kloubem, spojujícím navzájem dvě nebo více tuhých desek. Spojuje-li *vnitřní kloub*

- **dvě tuhé desky** (obr. 3.8), představuje **vazbu dvojnásobnou**, neboť z původního počtu 6 stupňů volnosti dvou desek (viz odst. 3.2) zbyly 4 stupně volnosti (2 společné translace a 2 nezávislé rotace), takže *odebírá dva stupně volnosti*,
- **tři tuhé desky** (obr. 3.9), nahrazuje takový kloub *dva jednoduché vnitřní klouby*, neboť z původních $3 \cdot 3 = 9$ stupňů volnosti zbývá 5 stupňů volnosti (2 společné translace a 3 nezávislé rotace), což odpovídá odebrání čtyř stupňů volnosti pomocí 2 dvojnásobných vazeb,

- **n tuhých desek**, nahrazuje $n-1$ jednoduchých vnitřních kloubů (každý se 2 stupni volnosti), takže celkem odebírá $2(n-1)$ stupňů volnosti a zbývá $3n - 2(n-1) = n + 2$ stupňů volnosti (2 společné translace a n nezávislých rotací).



Obr. 3.9: Vnitřní kloub spojující tři desky

Každá vazba má tolik složek reakcí či interakcí, kolik odebírá stupňů volnosti. Výpočet složek interakcí vnitřních vazeb (obr. 3.9d) je *přehlednější*, uvažujeme-li spojení tuhých desek prostřednictvím hmotného bodu (obr. 3.9c). Spojení n tuhých desek vnitřním kloubem, představující spojení $n-1$ jednoduchými kloubů, je **ekvivalentní** vzájemnému **spojení n desek a jednoho hmotného bodu** prostřednictvím n jednoduchých kloubů. Např. podle obr. 3.9c je $(3 \cdot 3 + 1 \cdot 2) - (3 \cdot 2) = 11 - 6 = 5$ stupňů volnosti, což vychází shodně s variantou podle obr. 3.9a, resp. 3.9b.

3.4 Statická a kinematická určitost

Pohyb objektu lze omezit (znemožnit) vedením či vazbami, které odebírají příslušné stupně volnosti. *Pevné podepření* objektu je takové, při němž vazby ruší všechny stupně volnosti; vazby přitom musejí být vhodně uspořádány (determinant soustavy rovnic $D \neq 0$).

Staticky (a kinematicky) určité podepření **tuhé desky** v rovině nastane, když počet vnějších vazeb je

$$\boxed{a = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 3} \quad (3.1)$$

nebo v úspornějším zápisu

$$a = \sum_k k a_k = 3 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.2)$$

kde a_k představuje k -násobnou vazbu a k je násobnost vazby. Nejjednodušší je převést vícenásobné vazby na jednoduché. Podle odst. 3.2 má tuhá deska (nosník) $v = 3$ stupně volnosti, takže musí platit $v = a$. Objekt má tedy podepření

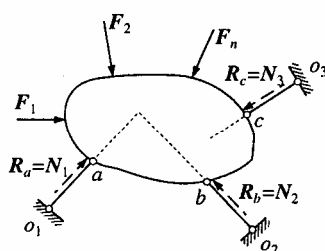
- **staticky (kinematicky) určité** při $\boxed{v = a}$, (3.3)
vyjadřující ze *statického hlediska*, že počet statických podmínek rovnováhy v je roven počtu neznámých složek reakcí a , nebo z *kinematického hlediska*, že počet stupňů volnosti v nepodepřené desky je roven počtu stupňů volnosti a odebraných desce vazbami),
- **staticky neurčité** (kinematicky přeúřčité) při $v < a$, (3.4)
- **staticky přeúřčité** (kinematicky neurčité) při $v > a$; (3.5)
v tomto případě se konstrukce stává **mechanismem** nevhodným pro stavební účely.

Statickou (a kinematickou) určitost **rovinných složených soustav** lze posoudit podle vztahu

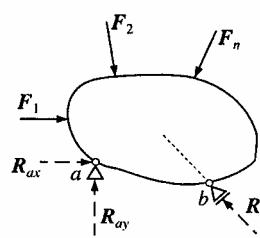
$$\boxed{2b + 3d = a + 2k_1}, \quad (3.6)$$

kde b je počet hmotných bodů, d počet tuhých desek, a počet jednoduchých složek reakcí, resp. interakcí (kyvných prutů, táhel – viz odst. 5.5.1) a k_1 počet jednoduchých vnitřních kloubů (každý ruší dva stupně volnosti). Výraz (3.6) můžeme interpretovat z hlediska *kinematické určitosti* takto: **počet stupňů volnosti nepodepřené soustavy se rovná počtu stupňů volnosti zrušených vnějšími a vnitřními vazbami**. Z hlediska *statické určitosti* pak platí: **celkový počet statických podmínek rovnováhy se rovná počtu neznámých složek reakcí vnějších vazeb a interakcí vnitřních vazeb**.

Při platnosti relace $2b + 3d < a + 2k_1$ je uspořádání a podepření rovinné složené soustavy *staticky neurčité* a kinematicky přeuročité.



Obr. 3.10: Podepření třemi kyvnými pruty



Obr. 3.11: Podepření pevným a posuvným kloubem

3.5 Podepření nosníku

Staticky a kinematicky určité podepření tuhé desky (představující teoreticky nosník) v rovině lze zajistit různou kombinací vazeb tak, aby se zrušily všechny tři stupně volnosti ($v = 3$) tuhé desky v rovině. Možné způsoby podepření jsou:

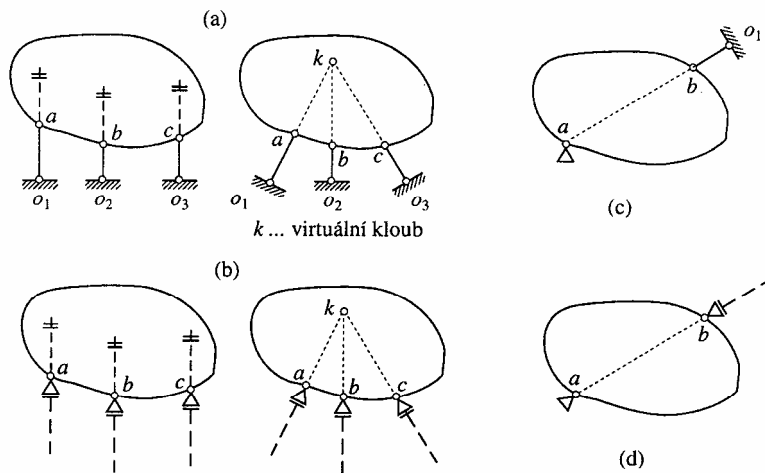
- třemi jednonásobnými vazbami (obr. 3.10), přičemž paprsky reakcí neprocházejí jedním bodem (jedná se o **nosník podepřený ve třech bodech**),
- jednou dvojnásobnou vazbou a jednou jednonásobnou vazbou (obr. 3.11), přičemž paprsek posuvné vazby neprochází neposuvným kloubem (jedná se o **nosník prostý**), nebo
- jednou trojnásobnou vazbou (jde o **nosník konzolový**, konzolu, krakorec).

3.6 Výjimečné případy podepření

Výjimečný případ podepření je nežádoucí a ve stavební praxi **nepřípustný**. Nastane v případě, že determinant soustavy 3 rovnic rovnováhy podepřené tuhé desky (obr. 3.12), resp. soustavy $(2b + 3d)$ rovnic rovnováhy rovinné složené nosníkové soustavy (např. se 3 klouby ležícími v jedné přímce), má hodnotu

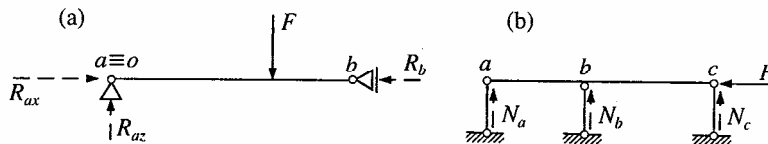
$$D = 0. \quad (3.7)$$

Tato skutečnost prokazuje, že v soustavě existuje lineární kombinace rovnic a soustava nemá jednoznačné řešení.



Obr. 3.12: Výjimečné případy podepření tuhé desky v rovině

Kromě matematického průkazu lze výjimečnost rovněž poznat ze skladby vazeb (obr. 3.13). Vznikne-li *virtuální kloub* k (obr. 3.12), kdy paprsky složek reakcí se protínají v jednom reálném bodu či v nekonečnu, může se nosník pootáčet či neomezeně posouvat v jednom směru. Ve zvláštním případě (obr. 3.12c,d resp. obr. 3.13a) paprsek reakce kyvného prutu prochází pevným kloubem a , takže nosník se může pootáčet kolem tohoto pevného kloubu.



Obr. 3.13: Výjimečné případy podepření nosníku

Otázky

1. Kolik stupňů volnosti má hmotný bod a tuhá deska v rovině?
2. Jaké jsou podmínky staticky a kinematicky určitého podepření tuhé desky v rovině?
3. Jaké známe typy podporových vazeb, kolik odebírají stupňů volnosti?



3.7 Výpočet reakcí vazeb

Pro výpočet reakcí vazeb objekt či složenou soustavu uvolníme z vazeb (vnějších i vnitřních). Účinek odstraněných vazeb na objekt nahradíme příslušnými reakcemi a interakcemi. Zatížení a vyvozené reakce přitom tvoří rovnovážnou soustavu vnějších sil. Rovnováha složené soustavy je splněna, je-li v rovnováze každá její část. Neznámé velikosti složek reakcí a interakcí u staticky určité soustavy vyřešíme ze statických **podmínek rovnováhy** sil působících na jednotlivé uvolněné části soustavy; ty části prutové soustavy, jež nebyly využity k výpočtu, můžeme použít ke kontrole.

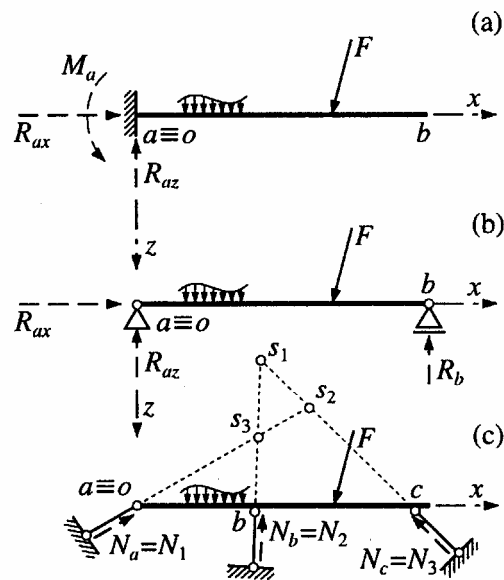


Připomeňme, že pro každý hmotný bod platí dvě podmínky rovnováhy a pro tuhou desku tři podmínky rovnováhy. Při výpočtu interakcí je nutno uplatnit princip akce a reakce. Jednoznačné řešení staticky určitého nosníku, resp. soustavy, získáme jen při platnosti rovnic (3.3), resp. (3.6), a při $D \neq 0$.

Pro výpočet reakcí je vždy vhodné obecné síly rozložit do pravoúhlých složek, tj. na síly vůči nosníku osové a příčné.

3.7.1 Jednoduché a lomené nosníky

U jednoduchých přímých či lomených nosníků získáme složky reakcí vazeb ze tří vhodně zvolených statických podmínek rovnováhy obecné rovinné soustavy sil působící na nosník uvolněný z vazeb. Při jistém způsobu uložení nosníku jsou (zejména při ručním řešení) nevhodnější odpovídající podmínky, jak ukážeme dále.



Obr. 3.14: Základní případy podepření jednoduchých nosníků

Uvedme tvary podmínek rovnováhy pro základní případy podepření (obr. 3.14). Z každé podmínky lze přímo určit naznačenou složku reakce.

- Pro **konzolový nosník** (obr. 3.14a) sestavíme k bodu vetknutí dvě silové a jednu momentovou podmínku ve tvaru

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 \rightarrow R_{ax}, \\ \sum F_{iz} &= 0 \rightarrow R_{az}, \\ \sum M_{ia} &= 0 \rightarrow M_a.\end{aligned}\tag{3.8}$$

- Pro **prostý nosník** (obr. 3.14b) sestavíme jednu silovou podmínku (pro směr spojnice podpor, obvykle vodorovný) a dvě momentové podmínky (k podporovým průřezům)

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 \rightarrow R_{ax}, \\ \sum M_{ia} &= 0 \rightarrow R_b,\end{aligned}$$

$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow R_{az}, \quad (3.9)$$

příčemž zbývá kontrolní silová podmínka $\sum F_{iz} = 0$.

- Pro **nosník podepřený ve třech bodech** (obr. 3.14c) sestavíme tři momentové podmínky (ke třem vhodně zvoleným momentovým středům v průsečicích paprsků jednotlivých kyvných prutů), z nichž přímo určíme osové síly v kyvných prutech, představující složky reakcí

$$\begin{aligned} \sum M_{is1} &= 0 \rightarrow N_a, \\ \sum M_{is2} &= 0 \rightarrow N_b, \\ \sum M_{is3} &= 0 \rightarrow N_c \end{aligned} \quad (3.10)$$

a zbudou kontrolní silové podmínky $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iz} = 0$. Výjimečný případ by nastal, kdyby se momentové středy ztotožnily ($s_1 \equiv s_2 \equiv s_3$) a vznikl by virtuální kloub (reálný nebo v nekonečnu).

3.7.2 Rovinné složené nosníkové soustavy

Řešení reakcí a interakcí složených nosníkových soustav lze zcela obecně určit řešením soustavy $(2b + 3d)$ rovnic, které odpovídají podmínkám rovnováhy.

Při ručním řešení je však výhodné vybírat takové podmínky (zejména momentové) a v takovém pořadí, abychom pokud možno vždy z jedné rovnice získali jednu neznámou složku reakce. Všechny ostatní reálné podmínky rovnováhy (obvykle silové) využijeme ke kontrole řešení.

Otázky

1. Jaké základní typy nosníků rozeznáváme podle typu podepření?



3.8 Průběhy složek vnitřních sil

Průběhy složek vnitřních sil lze určit postupem dále uvedeným v odst. 4.4 s využitím diferenciálních podmínek rovnováhy (odst. 4.3), a to buď



- samostatně na každém **jednotlivém přímém prutu** vyjmutém z prutové konstrukce, na nějž necháme působit koncové síly a dané zatížení, nebo
- samostatně na každé uvolněné části soustavy s následným sestavením do celku, popř.
- na náhradní konstrukci stejného tvaru jako je původní konstrukce, ale bez vnitřních kloubů, přičemž jako kontrolu využíváme podmínku nulového momentu v kloubu pro kteroukoliv část soustavy ($M_k = 0$).

Sestavení celkového průběhu jednotlivých složek výslednice vnitřních sil na komplikovanějších prutových soustavách bývá často nepřehledné. Proto se nejčastěji analyzují vnitřní síly na samostatných prutech, jak to odpovídá i dimenzování po jednotlivých prutových prvcích.

Shrnutí



Definovali jsme si výpočtový model rovinné prutové soustavy se vším potřebným zázemím – statickou určitostí konstrukce, hmotnými objekty a složenými soustavami, typy vnějších i vnitřních vazeb a výpočty reakcí těchto vazeb.

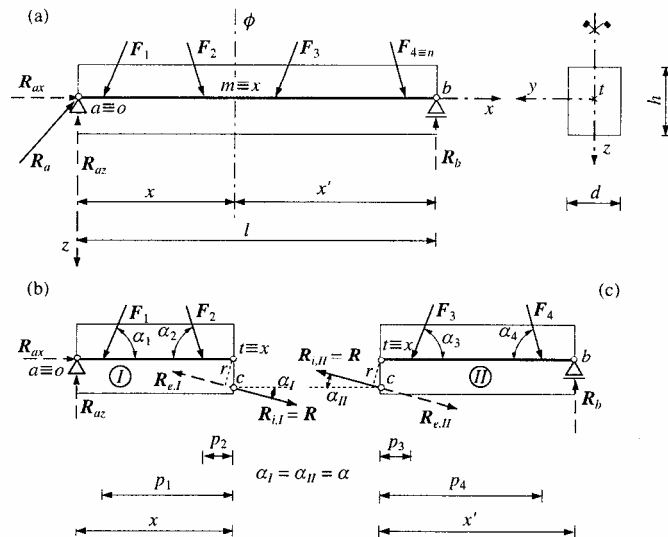
4 Analýza vnitřních sil na rovinných prutech

Při zatěžování prutu jsou v každém jeho průřezu spojitě rozloženy složky napětí. Jejich integrací po plošném obsahu průřezu získáme složky výslednice vnitřních sil ve vyšetřovaném průřezu. Jsou jakýmsi reprezentantem namáhání průřezu od působícího zatížení, i když neurčují konkrétní rozložení napětí po průřezu. V této kapitole se naučíme určovat složky výslednice vnitřních sil rovinných *přímých* prutů.



4.1 Složky výslednice vnitřních sil

Na přímý nosník (prut) působí vnější síly (obr. 4.1a), a to libovolné zatížení F_k (tzv. primární síly) a složky reakcí vnějších vazeb event. koncové síly (interakce) R_k (tzv. sekundární síly). Všechny vnější síly, působící na část nosníku rozděleného řezem ϕ , mají výslednici R_e .



Obr. 4.1: Výslednice vnitřních sil v průřezu nosníku

Libovolným bodem střednice nosníku vedeme řeznou rovinu ϕ (kolmou ke střednici), která rozdělí nosník na části *I* a *II*. Uvolníme jednu část, odstraníme druhou a její účinek na první část nahradíme silou R_i (**výslednice vnitřních sil** působící v obecné poloze). Na každé části tvoří výslednice vnitřních sil R_i a výslednice vnějších sil R_e *rovnovážnou soustavu*.

Pro část *II* napíšeme podmínku rovnováhy

$$\mathbf{R}_{i,II} + \mathbf{R}_{e,II} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{i,II} = -\mathbf{R}_{e,II} \quad (4.1)$$

a rovněž pro část *I*

$$\mathbf{R}_{i,I} + \mathbf{R}_{e,I} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{i,I} = -\mathbf{R}_{e,I}. \quad (4.2)$$

Podle principu akce a reakce platí pro výslednice vnitřních sil (můžeme si je představit jako reakce *vzájemného vetknutí* obou částí do sebe) vztah

$$\mathbf{R}_{i,I} + \mathbf{R}_{i,II} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{i,I} = -\mathbf{R}_{i,II} = \mathbf{R} \quad (4.3)$$

a dále platí

$$\mathbf{R}_{i,I} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_{e,II}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{R}_{i,II} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_{e,I}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{R}_{e,I} + \mathbf{R}_{e,II} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}_{e,I} = -\mathbf{R}_{e,II}. \quad (4.6)$$

Pro určení výslednice $\mathbf{R}_{i,I}$ na části I (nebo $\mathbf{R}_{i,II}$ na části II) můžeme použít tři statické podmínky rovnováhy $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iz} = 0$, $\sum M_{it} = 0$ sil na části I (nebo na části II).

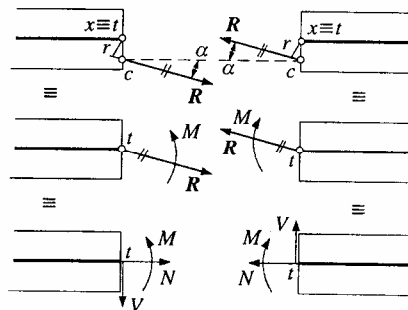
Složky výslednice vnitřních sil získáme tak, že výslednici vnitřních sil \mathbf{R} (obr. 4.2) na jedné (nebo druhé) části přeložíme do těžiště průřezu, tj.

- posuneme rovnoběžně s paprskem síly \mathbf{R} a doplníme dvojicí sil o velikosti

$$M = R \cdot r, \quad (4.7)$$

- sílu \mathbf{R} v těžišti rozložíme do pravouhlých složek o velikostech

$$N = R \cos \alpha, \quad V = R \sin \alpha. \quad (4.8)$$



Obr. 4.2: Složky výslednice vnitřních sil

Ekvivalentní náhrada výslednice je provedena třemi složkami (vztaženými ke střednici nosníku), kterými jsou v průřezu nosníku

- normálová síla N ,
- posouvající síla V ,
- ohybový moment M .

4.2 Výpočet vnitřních sil

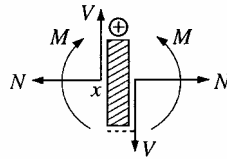
Vnitřní síly jsou tedy síly, jimiž na sebe vzájemně (podle principu akce a reakce) působí dvě části prutu oddělené libovolným (myšleným) řezem. Jak bylo uvedeno výše, tvoří výslednice vnitřních sil v průřezu prutu spolu s vnějším zatížením představovaným primárními silami (daným vnějším zatížením) a sekundárními silami (reakcemi, interakcemi či koncovými silami) na každé oddělené části prutu *rovnovážnou soustavu sil*. Z jednotlivých podmínek rovnováhy pak můžeme přímo určit složky výslednice vnitřních sil v kterémkoli vyšetřovaném průřezu prutu.

Při běžném rutinním vyšetřování složek výslednice vnitřních sil v průřezu prutu (nosníku) se vychází z následujících *pravidel*:

- **normálová síla N** je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, *do směru osy prutu*,

- **posouvající síla** V je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, *do směru kolmého k ose prutu*,
- **ohybový moment** M je určen algebraickým součtem *statických momentů* všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, k těžišti průřezu.

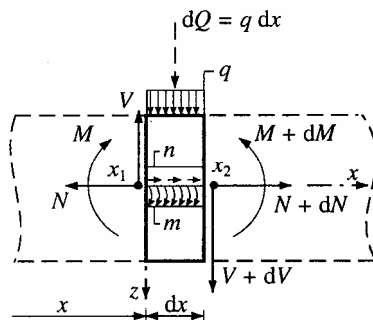
Podle těchto pravidel lze pro složky výslednice vnitřních sil (obr. 4.3) definovat **znaménkovou konvenci**, která je označována jako **pružnostní**: kladná normálová síla N působí z průřezu (vyvozuje tah), kladná posouvající síla V otáčí elementem nosníku ve smyslu chodu hodinových ručiček a kladný ohybový moment M natahuje zvolená spodní (konvenční) vlákna nosníku.



Obr. 4.3: Kladné vnitřní síly

4.3 Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu

Uvažujme přímý prut zatížený libovolným spojitým zatížením (příčným q , osovým n , momentovým m), osamělými silami F a osamělými momenty M . Diferenciální element nosníku (obr. 4.4) je vytnut dvěma myšlenými rovnoběžnými řezy. Element volíme mimo místa působení osamělých sil či momentů. Na element délky dx působí části spojitého zatížení $q dx$, $n dx$, $m dx$, v levém průřezu působí složky výslednice vnitřních sil N , V , M a v pravém průřezu složky $N + dN$, $V + dV$, $M + dM$.



Obr. 4.4: Uvolněný element nosníku

Veškeré zatížení působící na uvolněný element musí tvořit rovnovážnou soustavu sil. Sestavme podmínky rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0 : -N + (N + dN) + n dx = 0 ,$$

$$\sum F_{iz} = 0 : -V + (V + dV) + q dx = 0 ,$$

$$\sum M_{ix2} = 0 : -M + (M + dM) - V dx + q dx \frac{dx}{2} - m dx = 0 . \quad (4.9)$$

Zanedbáme-li velmi malý člen druhého řádu $\frac{q dx^2}{2}$ ve třetí rovnici (4.9), získáme po úpravě **diferenciální podmínky rovnováhy**

$$\boxed{\frac{dN}{dx} = -n, \quad \frac{dV}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = V + m.} \quad (4.10)$$

V častém případě, kdy intenzita spojitého momentového zatížení $m = 0$, se třetí výraz (4.10) zjednoduší na tvar

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V,} \quad (4.11)$$

který je označován jako **Schwedlerova věta**: *Derivace ohybového momentu podle nezávisle proměnné x je rovna posouvající síle.*



Johann Wilhelm Schwedler (1823 – 1896) byl německým stavebním inženýrem, pracujícím v oblasti teorie i praktických realizací příhradových konstrukcí. Svoji větu o “derivaci momentu podle úsečky” uveřejnil v roce 1851 a užil ji ke hledání nejúčinnější polohy zatížení.

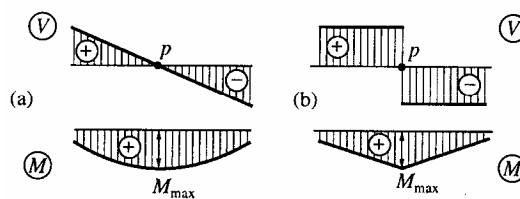


Z diferenciálních podmínek rovnováhy (4.10) plynou důležité **závěry**:

- **Lokální extrém** funkcí $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ získáme pomocí nulové první derivace funkce, takže

$$\frac{dN}{dx} = -n = 0, \quad \frac{dV}{dx} = -q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = V + m = 0. \quad (4.12)$$

Lokální extrém normálové síly N (posouvající síly V) nastane v průřezu, v němž je intenzita osového zatížení n (příčného zatížení q) nulová. Lokální extrém funkce ohybového momentu M nastane v tzv. **přechodném** (nebezpečném) **průřezu** (obr. 4.5), v němž je nulová pořadnice posouvající síly $V = 0$ (resp. při $m \neq 0$ platí $V = -m$).



Obr. 4.5: Přechodný průřez nosníku

- Funkce vnitřních sil lze získat **integrací diferenciálních podmínek** rovnováhy (4.10)

$$\begin{aligned} N(x) &= -\int n(x) dx + C_1, \\ V(x) &= -\int q(x) dx + C_2, \\ M(x) &= \int V(x) dx + C_3 \quad [\text{při } m(x) = 0], \end{aligned} \quad (4.13)$$

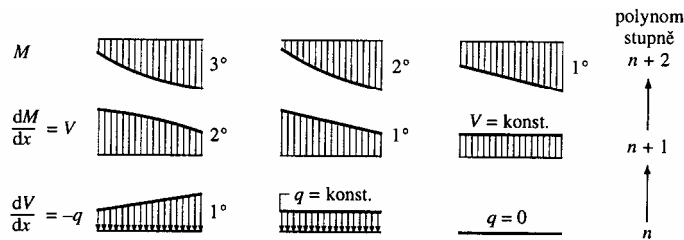
kde integrační konstanty C_1 až C_3 se určí z okrajových podmínek platných pro konkrétní uložení nosníku.

Z diferenciálních podmínek rovnováhy (4.10) a ze vztahů (4.13) plyne **derivačně – integrační schéma**

$$\begin{array}{ccc}
 & | & -q \quad \uparrow \\
 \text{integrace} & | & V \quad | \quad \text{derivace.} \\
 & | & M \quad | \\
 & \downarrow & \\
 & &
 \end{array}
 \quad (4.14)$$

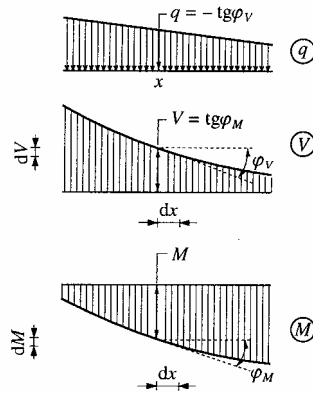
Ze vztahů (4.13) a schématu (4.14) vyplývá, že čára normálových sil N (posouvajících sil V) je integrační čarou osového zatížení n (příčného zatížení q). Dále, že čára ohybových momentů M je integrační čarou posouvajících sil V .

Naopak, čára posouvajících sil V je diferenciální čarou ohybových momentů M a čára příčného zatížení q (osového zatížení n) je diferenciální čarou posouvajících sil V (normálových sil N).



Obr. 4.6: Závislost mezi funkcemi

- **Závislost mezi funkcemi** příčného zatížení q , posouvajících sil V a ohybových momentů M , plynoucí z derivačně integračního schématu, znázorňuje obr. 4.6. Je-li příčné zatížení q dáno polynomem n -tého stupně, pak posouvající síla V je dána polynomem $n + 1$ stupně a ohybový moment M polynomem $n + 2$ stupně.



Obr. 4.7: Sklon tečen k čarám V a M

- **Sklon tečen k čarám** posouvajících sil V a ohybových momentů M v libovolném průřezu nosníku můžeme podle (4.10) zapsat

$$\frac{dV}{dx} = -q = \text{tg } \varphi_V, \quad (4.15)$$

$$\frac{dM}{dx} = V = \text{tg } \varphi_M, \quad (4.16)$$

kde φ_V a φ_M jsou úhly sklonu tečen k čarám posouvajících sil V a ohybových momentů M v libovolném průřezu x (obr. 4.7). Jinak řečeno, diagram příčného zatížení q (posouvajících sil V) zobrazuje průběh směrnice tečny v obrazci posouvajících sil V (ohybových momentů M).

4.4 Diagramy vnitřních sil za obecného zatížení

Diagramy (resp. obrazce) vnitřních sil zobrazují průběh složek vnitřních sil po celé délce prutu. Pořadnice diagramů se vynášejí od základní čáry (osy nosníku) v charakteristických průřezech; mezi těmito průřezy platí funkční závislosti odpovídající danému zatížení. Spojením koncových bodů pořadnic pak získáme **čáru** (diagram) vnitřních sil. Plocha omezená čarou a základnou (s krajními pořadnicemi) se označuje jako **obrazec** vnitřních sil. Normálové síly N a posouvající síly V musejí být *opatřeny znaménkem* (kladné se u vodorovného prutu vynášejí nad osu), ohybové momenty M se vynášejí *na stranu skutečně tažených vláken*.

4.4.1 Postup při řešení diagramů vnitřních sil

U prutu vyjmutého z prutové konstrukce určíme koncové síly (interakce), u nosníku nejprve vyřešíme podporové reakce. Prut rozdělíme na úseky se zatížením popsaným jednou zatěžovací funkcí (nezatížené úseky, spojitá zatížení). Jako další dělicí body volíme i působíště osamělých sil F a osamělých zatěžovacích momentů M . V těchto dělicích bodech určíme *skutečné hodnoty* složek vnitřních sil. Mezi nimi sestrojíme průběhy N , V , M v jednotlivých úsecích.

Zejména pro *obrazce ohybových momentů*, kde se vyskytují funkce vyšších stupňů, je výhodný následující postup. Spojitá příčná (ale i osová) zatížení nahradíme **náhradními břemeny**. Pro jejich polohy vypočteme *pomocné hodnoty* (pořadnice), jejichž pomocí získáme v úseku mezi dělicími body **tečnový polygon** usnadňující sestavení skutečného průběhu funkce podle působícího zatížení. Tyto průběhy budou známy z řešení jednoduchých staticky určitých nosníků v 5. kapitole. Přehledně jsou uvedeny v tabulkách 5.1 a 5.2.

Složky výslednice vnitřních sil se pak vyšetřují na jakémkoli prutu (nosníku) *podle stejných zásad* bez ohledu na způsob podepření.

Základem pro analýzu vnitřních sil je vyšetřování průběhů vnitřních sil na *jednoduchých nosnících*. Jedná se zejména o prostý nosník, konzolový nosník (konzolu), nosník s převislými konci, nosník podepřený ve třech bodech a šikmý nosník. U lomeného nosníku či rámu pak ještě sledujeme, zda je dodržena rovnováha ve styčnicích.

Shrnutí



Krok za krokem jsme se naučili určovat složky výslednice vnitřních sil na rovinných přímých prutech – normálových a posouvajících sil, ohybových momentů. Předmětem našeho zájmu byly i diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu a možnosti jejich využití při konstrukci diagramů vnitřních sil.

5 Příklady řešení rovinných nosníků a prutových soustav

V této kapitole si ukážeme řešení základních případů staticky určitých prutových konstrukcí. Nejprve si probereme nejjednodušší případy nosníků. Průběhy vnitřních sil u těchto nosníků jsou základním grafickým motivem, s nímž se budeme setkávat ve všech složitějších případech. Tyto základní motivy se pak jednoduše vynášejí od *posunuté základní čáry*, tvořené spojnicí pořadnic vynešených v dělicích bodech.



Zvládnutí řešení jednoduchých nosníků je tedy nezbytným předpokladem k analýze složitějších typů prutových soustav. Platí to nejen u staticky určitých, ale i u staticky neurčitých prutových konstrukcí, což využijeme později v předmětu Statika.

Členění látky je poplatné tradiční klasifikaci prutových konstrukcí, vycházející ze specifických přístupů k výpočtu reakcí vazeb. Některé případy popíšeme obecně, u dalších jsou kompletně vyřešené okomentované numerické příklady.

5.1 Jednoduché staticky určité nosníky

V numerických příkladech jsou hodnoty vnitřních sil v některých průřezech vyznačeny dvěma indexy. První index představuje průřez, v němž složku výslednice vnitřní síly počítáme. V případě, kdy příslušná složka výslednice vnitřních sil není v daném průřezu definována (např. normálová a posouvající síla pod osamělou zatěžovací silou, ohybový moment pod osamělým zatěžovacím momentem), rozlišuje se hodnota těsně zleva nebo těsně zprava průřezu. K vyjádření těchto dvou rozdílných hodnot slouží druhý index, který představuje směr orientace. Je-li průběh vnitřní síly konstantní, může dvojice indexů vyjadřovat platnost hodnoty vnitřní síly pro celý interval mezi oběma průřezy. V takovém případě předpokládáme rovnost veličin $S_{ab} = S_{ba}$ a pro úsporu místa pracujeme obvykle pouze s první veličinou.

5.1.1 Prostý nosník

Průběhy složek výslednice vnitřních sil vyřešených podle 4. kapitoly pro základní jednoduché případy zatížení prostého nosníku jsou uvedeny bez odvození v tabulce 5.1. Uvedme dále numerické řešení nosníku s nejčastějším typem zatížení (viz případ 4 v tab. 5.1) a další nosník se složitějším zatížením, na nichž by měl student pochopit konkrétní postup řešení.

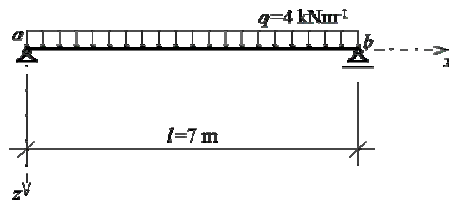
Příklad 5.1

Zadání

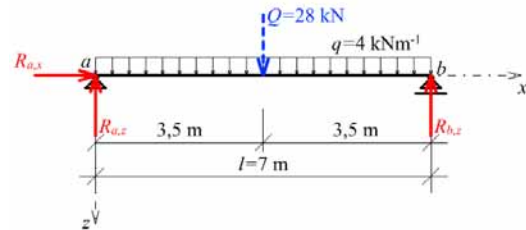
Určete reakce a vykreslete průběhy vnitřních sil na prostém nosníku délky $l = 7$ m podle obrázku 5.1, jenž je zatížen spojitým rovnoměrným zatížením $q = 4$ kNm⁻¹. V rámci řešení úlohy odvoďte obecné vztahy, do kterých násled-



ně dosadíte zadané hodnoty. Stanovte přechodný průřez a maximální mezipodporový moment.



Obr. 5.1: Zadání příkladu 5.1



Obr. 5.2: Složky reakcí z příkladu 5.1

Řešení



Nejprve je třeba stanovit složky reakcí v podporách a , b . V pevné podpoře a jsou dvě složky reakcí $R_{a,x}$ a $R_{a,z}$, v posuvné podpoře b je jedna složka reakce $R_{b,z}$ (viz obr. 5.2). Pro výpočet reakcí nahradíme spojitě rovnoměrné zatížení q náhradním břemenem Q o velikosti $Q = q \cdot l = 4 \cdot 7 = 28$ kN, jež působí uprostřed rozpětí nosníku. Složky reakcí určíme ze tří podmínek rovnováhy (jedna silová a dvě momentové):

$$1. \sum_i F_{i,x} = 0: R_{a,x} = 0$$

$$2. \sum_i M_{i,a} = 0: -Q \cdot \frac{l}{2} + R_{b,z} \cdot l = 0$$

$$R_{b,z} = \frac{Q \cdot \frac{l}{2}}{l} = \frac{Q}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ kN}$$

$$3. \sum_i M_{i,b} = 0: Q \cdot \frac{l}{2} - R_{a,z} \cdot l = 0$$

$$R_{a,z} = \frac{Q \cdot \frac{l}{2}}{l} = \frac{Q}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ kN}$$

Ke kontrole užijeme druhou silovou podmínku:

$$\sum_i F_{i,z} = 0: R_{a,z} + R_{b,z} - Q = 0$$

$$14 + 14 - 28 = 0$$

$$0 = 0$$

Známe-li složky reakcí, můžeme přistoupit k vyčíslení a vykreslení průběhů vnitřních sil.

Normálové síly N :

$$N_a = N_b = 0 \text{ kN}.$$

Posouvající síly V :

$$V_a = R_{a,z} = 14 \text{ kN}, \quad V_b = R_{a,z} - Q = -14 \text{ kN} = -R_{b,z}.$$

Tab. 5.1: Průběhy vnitřních sil na prostém nosníku

<p>1</p> <p> $R_a = V_a = \frac{Fd}{l}, R_b = -V_b = \frac{Fc}{l}$ $M_1 = M_{\max} = \frac{Fcd}{l}$ </p>	<p>2</p> <p> $R_a = V_a = F, R_b = -V_b = F$ $M_1 = M_2 = Fc$ </p>	<p>3</p> <p> $R_a = R_b = \frac{Fd}{l} = V_a = V_b$ $M_1 = -M_2 = \frac{Fcd}{l}$ </p>
<p>4</p> <p> $R_a = V_a = \frac{1}{2}ql, R_b = -V_b = \frac{1}{2}ql$ $x_p = \frac{l}{2}, M_p = \frac{1}{8}ql^2$ </p>	<p>5</p> <p> $R_a = V_a = \frac{1}{6}ql, R_b = -V_b = \frac{1}{3}ql$ $x_p = \frac{l}{\sqrt{3}}, M_p = \frac{\sqrt{3}}{27}ql^2$ </p>	<p>6</p> <p> $R_a = V_a = \frac{1}{3}ql, R_b = -V_b = \frac{1}{6}ql$ $x_p' = \frac{l}{\sqrt{3}}, M_p = \frac{\sqrt{3}}{27}ql^2$ </p>
<p>7</p> <p> $R_a = R_b = \frac{M_1}{l}, V_a = V_b = -\frac{M_1}{l}$ $M_{1a} = -\frac{M_1}{l}c, M_{1b} = \frac{M_1}{l}d$ </p>	<p>8</p> <p> $R_a = R_b = m, V_a = V_b = -m$ $N \equiv M$ </p>	<p>9</p> <p> $N_a = H_a = -nl, N_b = 0$ $V \equiv M$ </p>

Polohu x_p přechodného průřezu p , kde $V_p = 0$, určíme z obecného zápisu posouvající síly ve vzdálenosti x_p od levé podpory

$$V_p = R_{a,z} - q \cdot x_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{R_{a,z}}{q} = \frac{l}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ m.}$$

Ohybové momenty M :

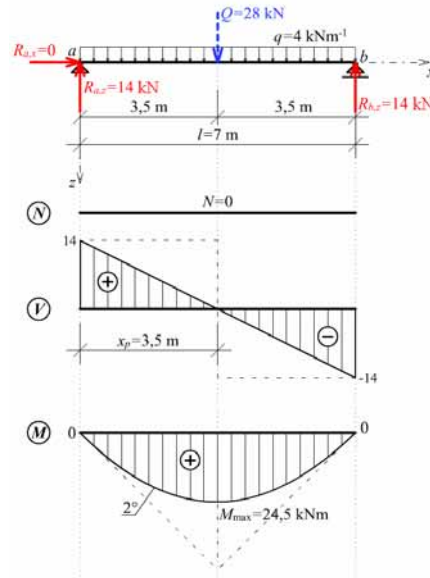
$$M_a = M_b = 0,$$

$$M_p = M_{\max} = R_{a,z} \cdot x_p - q \cdot x_p \cdot \frac{x_p}{2} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}ql^2 = 24,5 \text{ kNm.}$$

Průběhy vnitřních sil N , V , M jsou vykresleny na obr. 5.3. Odvozený vztah pro maximální moment na prostém nosníku od spojitého rovnoměrného zatížení celého nosníku daný výrazem

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2$$

je vhodné si pamatovat.



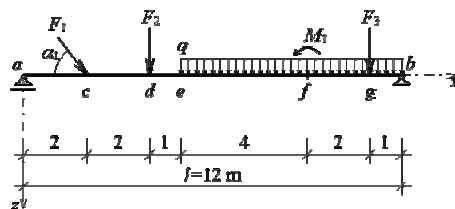
Obr. 5.3 Reakce a průběhy vnitřních sil pro příklad 5.1

Příklad 5.2

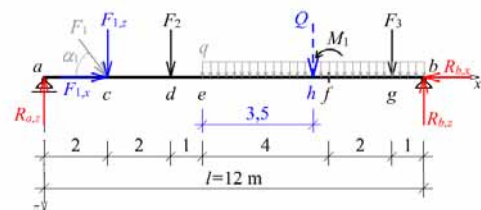
Zadání



Určete reakce a vykreslete průběhy vnitřních sil na prostém nosníku délky $l=12$ m, jenž je zatížen šikmou silou $F_1=5$ kN působící pod úhlem $\alpha_1=53,13^\circ$, svislými silami $F_2=7$ kN, $F_3=10$ kN, osamělým momentem $M_1=5$ kNm a rovnoměrným spojitým zatížením $q=3$ kNm $^{-1}$ podle obrázku 5.4. Stanovte přechodný průřez a velikost maximálního mezipodporového momentu.



Obr. 5.4: Zadání příkladu 5.2



Obr. 5.5: Složky reakcí z příkladu 5.2

Řešení



Nejprve rozložíme šikmou sílu F_1 na svislou a vodorovnou složku.

$$F_{1,x} = F_1 \cos \alpha_1 = 5 \cdot \cos 53,13^\circ = 3 \text{ kN},$$

$$F_{1,z} = F_1 \sin \alpha_1 = 5 \cdot \sin 53,13^\circ = 4 \text{ kN}.$$

Pro výpočet reakcí nahradíme spojitě rovnoměrné zatížení jedním náhradním břemenem Q působící v bodě h (viz obr. 5.5)

$$Q = q \cdot l_{eb} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ kN}.$$

Dále pro jednotlivé složky reakcí $R_{a,z}$, $R_{b,x}$, $R_{b,z}$ (obr. 5.5) v podporách určíme z podmínek rovnováhy jejich velikosti:

$$1. \sum_i F_{i,x} = 0: F_{1,x} - R_{b,x} = 0 \Rightarrow R_{b,x} = F_{1,x} = 3 \text{ kN}$$

$$2. \sum_i M_{i,a} = 0: -2F_{1,z} - 4F_2 - 8,5Q + M_1 - 11F_3 + 12R_{b,z} = 0$$

$$R_{b,z} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 8,5 \cdot 21 - 5 + 11 \cdot 10}{12} = 26,625 \text{ kN}$$

$$3. \sum_i M_{i,b} = 0: -12R_{a,z} + 10F_{1,z} + 8F_2 + 3,5Q + M_1 + 1F_3 = 0$$

$$R_{a,z} = \frac{10 \cdot 4 + 8 \cdot 7 + 3,5 \cdot 21 + 5 + 1 \cdot 10}{12} = 15,375 \text{ kN}$$

Ke kontrole užijeme silovou podmínku ve směru svislém:

$$\sum_i F_{i,z} = 0: F_{1,z} + F_2 + Q + F_3 - R_{a,z} - R_{b,z} = 0$$

$$4 + 7 + 21 + 10 - 26,625 - 15,375 = 0$$

$$0 = 0$$

Před výpočtem vnitřních sil nahradíme spojitě rovnoměrné zatížení v jednotlivých úsecích $e-f$, $f-g$, $g-b$ náhradními břemeny $Q_1 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kN}$, $Q_2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kN}$, $Q_3 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ kN}$ působícími v bodech r , s , t (obr. 5.6). Průběhy vnitřních sil pak můžeme s výhodou počítat a vykreslovat nejprve pro náhradní břemena (hodnoty v závorkách a čárkovaný průběh na obr. 5.6) a poté dokreslit skutečný průběh podle zadaného spojitěho zatížení. Postup s využitím náhradních břemen je výhodný zejména pro vykreslení průběhů ohybových momentů.

Normálové síly N :

$$N_{a-c} = 0 \text{ kN}, N_{c-b} = -F_{1,x} = -3 \text{ kN}.$$

Posouvající síly V :

$$V_{a-c} = R_{a,z} = 15,375 \text{ kN}, \quad V_{c-d} = R_{a,z} - F_{1,z} = 11,375 \text{ kN},$$

$$V_{d-e} = (V_{d-r}) = R_{a,z} - F_{1,z} - F_2 = (V_{c-d}) - F_2 = 4,375 \text{ kN},$$

$$(V_{r-s}) = R_{a,z} - F_{1,z} - F_2 - Q_1 = (V_{d-r}) - Q_1 = (-7,625 \text{ kN}),$$

$$(V_{s-g}) = R_{a,z} - F_{1,z} - F_2 - Q_1 - Q_2 = (V_{r-s}) - Q_2 = (-13,625 \text{ kN}),$$

$$(V_{g-t}) = R_{a,z} - F_{1,z} - F_2 - Q_1 - Q_2 - F_3 = (V_{s-g}) - F_3 = (-23,625 \text{ kN}),$$

$$V_b = (V_{t-b}) = (V_{g-t}) - Q_3 = -26,625 \text{ kN} = -R_{b,z}.$$

Polohu x_p přechodého průřezu p (od začátku spojitěho zatížení), kde $V_p = 0$, určíme z obecného zápisu posouvající síly v poli $e-r$

$$V_p = V_{d-e} - q \cdot x_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{V_{d-e}}{q} = \frac{4,375}{3} = 1,458\bar{3} \text{ m}.$$

Ohybové momenty M :

$$M_a = M_b = 0 \text{ kNm},$$

$$M_c = 2R_{a,z} = 30,75 \text{ kNm},$$

$$M_d = 4R_{a,z} - 2F_{1,z} = 53,5 \text{ kNm},$$

$$M_e = 5 \cdot R_{a,z} - 3 \cdot F_{1,z} - 1 \cdot F_2 = 57,875 \text{ kNm},$$

$$(M_r) = 7 \cdot R_{a,z} - 5 \cdot F_{1,z} - 3 \cdot F_2 = (66,625 \text{ kNm}),$$

$$M_f^l = 9 \cdot R_{a,z} - 7 \cdot F_{1,z} - 5 \cdot F_2 - 2 \cdot Q_1 = 51,375 \text{ kNm},$$

$$M_f^p = 9 \cdot R_{a,z} - 7 \cdot F_{1,z} - 5 \cdot F_2 - 2 \cdot Q_1 - M_1 = 49,375 \text{ kNm},$$

$$(M_s) = 2 \cdot R_{b,z} - 1,5 \cdot Q_3 - 1 \cdot F_3 = (38,750 \text{ kNm}),$$

$$M_g = 1 \cdot R_{b,z} - 0,5 \cdot Q_3 = 25,125 \text{ kNm},$$

$$(M_t) = 0,5 \cdot R_{b,z} = (13,3125 \text{ kNm}),$$

$$\begin{aligned} M_p = M_{\max} &= (5 + x_p) \cdot R_{a,z} - (3 + x_p) \cdot F_{1,z} - (1 + x_p) \cdot F_2 - q \frac{x_p^2}{2} = \\ &= 61,065 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Výsledné průběhy vnitřních sil N , V , M jsou vykresleny na obr. 5.7.

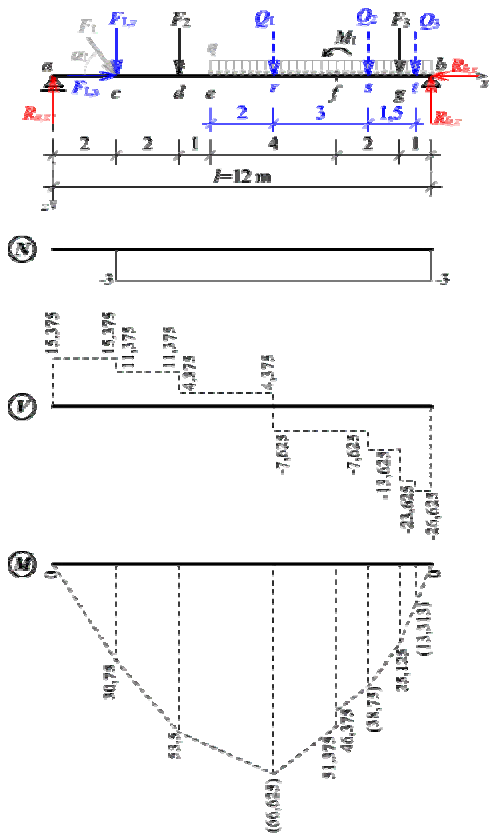
Při výpočtu a vykreslování průběhů vnitřních sil můžeme postupovat i bez výpočtu pomocných hodnot od náhradních břemen (uvedených výše v závorkách). V tom případě počítáme hodnoty vnitřních sil v místech působení osamělých sil a momentů a v místech změny intenzity spojitěho zatížení. U ohybových momentů pak průběh pro spojitě zatížení vykreslíme od posunutě základní čáry (dané krajními pořadnicemi) jako na prostém nosníku s rozpětím rovném délce spojitěho zatížení (viz odst. 4.4.1).

5.1.2 Konzolový nosník

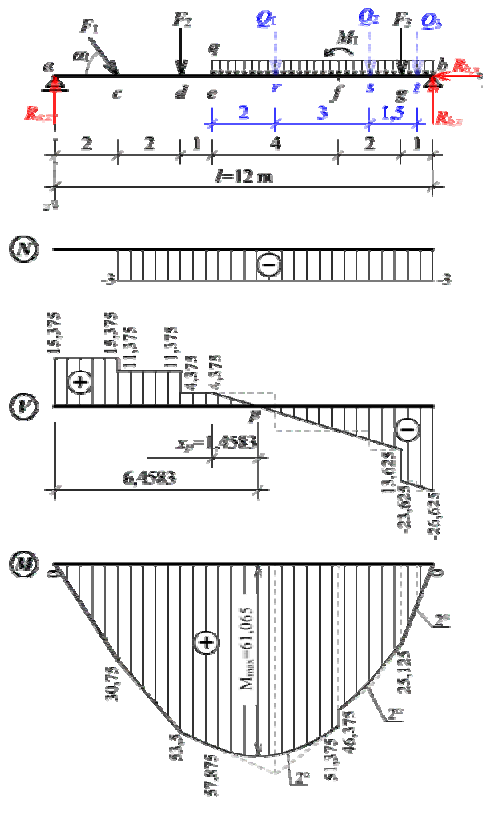


Složky výslednice vnitřních sil v libovolném průřezu konzolového nosníku lze s výhodou řešit postupem od volného konce konzoly, přičemž není potřeba předem určit složky reakcí ve vetknutí. V koncovém průřezu ve vetknutí je však potřeba (stejně jako např. u lomeného prutu) zkontrolovat rovnováhu.

Průběhy vnitřních sil pro základní jednoduché případy zatížení konzoly jsou přehledně bez odvození uvedeny v tabulce 5.2.



Obr. 5.6: Příprava průběhů vnitřních sil

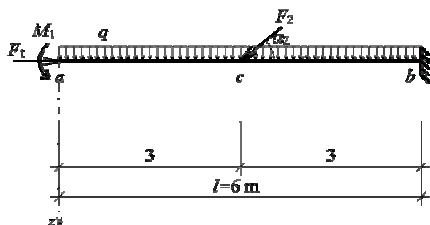


Obr. 5.7: Vnitřní síly pro příklad 5.2

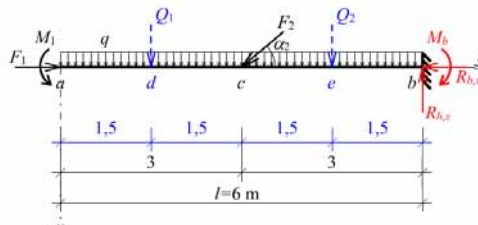
Příklad 5.3

Zadání

Určete reakce a vykreslete průběhy vnitřních sil na konzole délky $l = 6$ m, jež je zatížena vodorovnou silou $F_1 = 2$ kN, šikmou silou $F_2 = 4$ kN působící pod úhlem $\alpha_2 = 40^\circ$, osamělým momentem $M_1 = 2$ kNm a rovnoměrným spojitým zatížením $q = 1$ kNm⁻¹ podle obrázku 5.8.



Obr. 5.8: Zadání příkladu 5.3



Obr. 5.9: Složky reakcí z příkladu 5.3

Řešení

Pravoúhlé složky osamělého břemene F_2 jsou

$$F_{2,x} = F_2 \cos \alpha_2 = 4 \cdot \cos 40^\circ = 3,06 \text{ kN},$$

$$F_{2,z} = F_2 \sin \alpha_2 = 4 \cdot \sin 40^\circ = 2,57 \text{ kN}.$$



Tab. 5.2: Průběhy vnitřních sil na konzole

<p>1</p> <p> $V_a = V_b = -F$ $M_b = -Fl$ </p>	<p>2</p> <p> $V_a = V_b = 0$ $M_a = M_b = -M$ </p>	<p>3</p> <p> $V_b = -ql$ $M_b = -\frac{1}{2}ql^2$ </p>
<p>4</p> <p> $V_b = -\frac{1}{2}ql$ $M_b = -\frac{1}{6}ql^2$ </p>	<p>5</p> <p> $V_b = -\frac{1}{2}ql$ $M_b = -\frac{1}{3}ql^2$ </p>	<p>6</p> <p> $V_b = -\frac{1}{2}(q_1 + q_2)l$ $M_b = -\frac{1}{6}(2q_1 + q_2)l^2$ </p>

Náhradní břemena

$$Q_1 = Q_2 = 3 \cdot q = 3 \cdot 1 = 3 \text{ kN}.$$

Reakce (viz obr. 5.9) určíme z podmínek rovnováhy

$$1. \sum_i F_{i,x} = 0: F_1 - F_{2,x} + R_{b,x} = 0 \Rightarrow R_{b,x} = 1,06 \text{ kN},$$

$$2. \sum_i F_{i,z} = 0: Q_1 + F_{2,z} + Q_2 - R_{b,z} = 0 \Rightarrow R_{b,z} = 8,57 \text{ kN},$$

$$3. \sum_i M_{i,b} = 0: M_1 + 4,5 \cdot Q_1 + 3 \cdot F_{2,z} + 1,5 \cdot Q_2 - M_b = 0$$

$$M_b = 27,71 \text{ kN}$$

Normálové síly N :

$$N_{a-c} = -F_1 = -2 \text{ kN}, \quad N_{c-b} = -F_1 + F_{2,x} = 1,06 \text{ kN} = R_{b,x}.$$

Posouvající síly V :

$$V_a = 0 \text{ kN}, V_c^l = -Q_1 = -3 \text{ kN}, V_c^p = V_c^l - F_{2,z} = -5,57 \text{ kN},$$

$$V_b = V_c^p - Q_2 = -8,57 \text{ kN} = -R_{b,z}.$$

Ohybové momenty M :

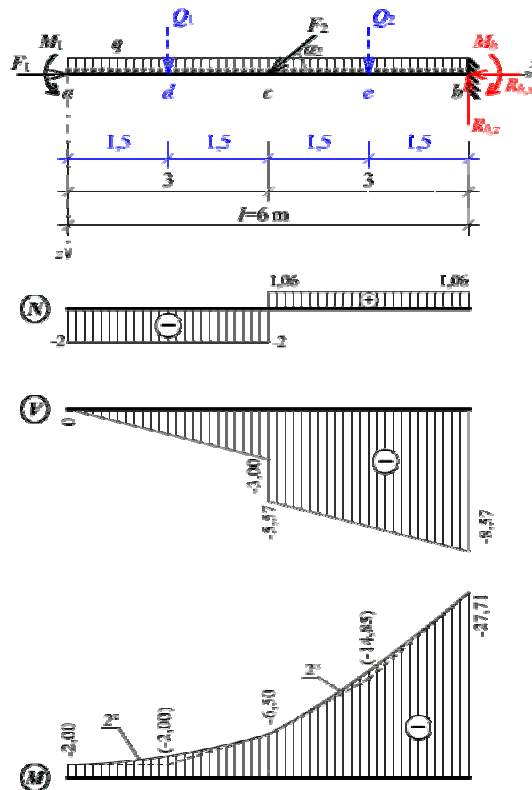
$$M_a = -2 \text{ kNm}, M_c = -M_a - 1,5 \cdot Q_1 = -6,5 \text{ kNm},$$

$$M_b = -M_a - 4,5 \cdot Q_1 - 3 \cdot F_{2,z} - 1,5 \cdot Q_2 = -27,71 \text{ kNm},$$

$$(M_d) = M_a = (-2 \text{ kNm}),$$

$$(M_e) = M_a - 3 \cdot Q_1 - 1,5 \cdot F_{2,z} = (-14,85 \text{ kNm}).$$

Výsledné průběhy vnitřních sil N , V , M jsou vykresleny na obr. 5.10.



Obr. 5.10: Průběhy vnitřních sil pro příklad 5.3

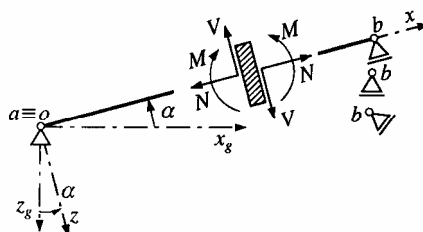
5.2 Nosník s převislými konci a šikmý nosník

Řešení prostého **nosníku s převislými konci** se v zásadě neliší od výpočtu prostého nosníku bez převislých konců. Pro určení složek reakcí se využijí stejné podmínky rovnováhy. Vzhledem k tomu, že se reakce rovněž řadí mezi vnější síly působící na nosník, odpovídají průběhy složek vnitřních sil konfiguraci rozložení vnějších sil (zatížení) na prutu, určované podle stejných zásad.



Průběhy vnitřních sil na levém či pravém převislém konci nosníku musejí být ale shodné s průběhy vnitřních sil na odpovídající samostatné konzole vetknuté na pravém či levém konci.

Šikmý nosník má obvykle ve srovnání s vodorovným prostým nosníkem obecně působící zatížení, které je nutné rozložit u osamělých sil na pravouhlé složky vůči lokálním osám x, z (obr. 5.11) a v případě spojitého zatížení na zatížení *příčné* q a *osové* n , pro jejichž intenzity platí vztahy (2.6) z odst. 2.3.2. S osamělými zatěžovacími momenty není nutné činit žádné úpravy.



Obr. 5.11: Šikmý prostý nosník

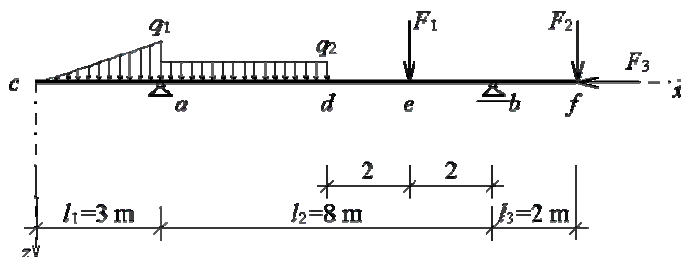
Složky reakcí se řeší pomocí podmínek rovnováhy podle způsobu uložení (odst. 3.7.1). Přitom záleží na způsobu podepření posuvnou kloubovou podporou (viz varianty podpory b v obr. 5.11). Vnitřní síly je možné vykreslovat na kolmicích při šikmé základní čáře, výhodnější je nosník pootočit do vodorovné polohy (lokální souřadnicová soustava x, z se ztotožní s globální soustavou x_g, z_g) a vnitřní síly vynášet jako na ostatních typech nosníků.

Příklad 5.4

Zadání



Určete reakce a vykreslete průběhy vnitřních sil na prostém nosníku s převislými konci podle obr. 5.12, jenž je zatížen silami $F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$, $F_3 = 1 \text{ kN}$, spojitým trojúhelníkovým zatížením $q_1 = 2 \text{ kNm}^{-1}$ a spojitým rovnoměrným zatížením $q_2 = 1 \text{ kNm}^{-1}$.



Obr. 5.12: Zadání příkladu 5.4

Řešení



Náhradní břemena jsou

$$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot q_1 = 3 \text{ kN}, \quad Q_2 = 4 \cdot q_2 = 4 \text{ kN}.$$

Složky reakcí (obr. 5.13) určíme z podmínek rovnováhy:

$$1. \sum_i F_{i,x} = 0: R_{a,x} - F_3 = 0 \Rightarrow R_{a,x} = 1 \text{ kN}$$

$$2. \sum_i M_{i,a} = 0: 1 \cdot Q_1 - 2 \cdot Q_2 - 6 \cdot F_1 + 8 \cdot R_{b,z} - 10 \cdot F_2 = 0$$

$$R_{b,z} = 7,625 \text{ kN}$$

$$3. \sum_i M_{i,b} = 0: 9 \cdot Q_1 - 8 \cdot R_{a,z} + 6 \cdot Q_2 + 2 \cdot F_1 - 2 \cdot F_2 = 0$$

$$R_{a,z} = 7,375 \text{ kN}$$

Normálové síly N :

$$N_{c-a} = 0 \text{ kN}, N_{a-f} = -R_{a,x} = -1 \text{ kN} = -F_3.$$

Posouvající síly V :

$$V_c = 0 \text{ kN}, V_a^l = -Q_1 = -3 \text{ kN}, V_a^p = V_a^l + R_{a,z} = 4,375 \text{ kN},$$

$$V_{d-e} = V_a^p - Q_2 = 0,375 \text{ kN}, V_{e-b} = V_{d-e} - F_1 = -5,625 \text{ kN},$$

$$V_{b-f} = V_{e-b} + R_{b,z} = 2 \text{ kN} = F_2.$$

Ohybové momenty M :

$$M_c = M_f = 0 \text{ kNm}, M_a = -Q_1 \cdot 1 = -3 \text{ kNm},$$

$$M_d = -Q_1 \cdot 5 + R_{a,z} \cdot 4 - Q_2 \cdot 2 = 6,50 \text{ kNm},$$

$$M_e = -Q_1 \cdot 7 + R_{a,z} \cdot 6 - Q_2 \cdot 4 = 7,25 \text{ kNm},$$

$$M_b = -F_2 \cdot 2 = -4 \text{ kNm},$$

$$(M_g) = 0 \text{ kNm}, (M_h) = -Q_1 \cdot 3 + R_{a,z} \cdot 2 = 5,75 \text{ kNm}.$$

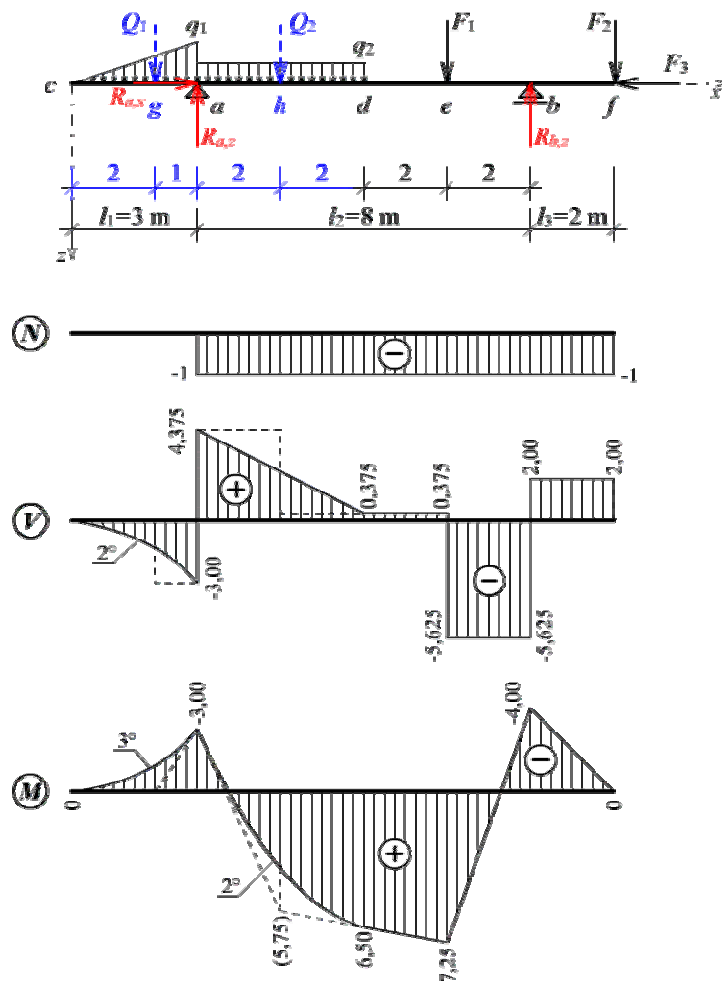
Výsledné průběhy vnitřních sil N , V , M jsou vykresleny na obr. 5.13.

5.3 Lomený nosník

Za rovinný lomený nosník se považuje rovinná prutová konstrukce (rám) složená z přímých prutů vzájemně spojených v uzlech. Staticky určité podepření celého lomeného nosníku umožňuje určit složky reakcí z globálních podmínek rovnováhy podle typu uložení (viz odst. 3.7.1). Každý prut je umístěn ve své *lokální souřadnicové soustavě* x, z (obr. 5.14a), čímž je určena orientace prutu (tj. levý a pravý konec) a volba označených (spodních) vláken (obr. 5.14b).



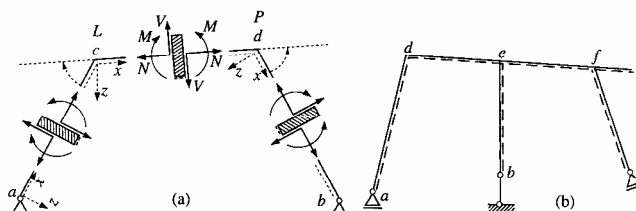
Průběhy vnitřních sil je výhodné řešit samostatně na každém prutu. Normálové síly N a posouvající síly V (vždy opatřené znaménky) je vhodné vynášet na příslušnou stranu osy prutu podle lokální souřadnicové soustavy, ohybové momenty M se vynášejí vždy na stranu skutečně tažených vláken a označená (spodní) vlákna jsou pomocná pro výpočet.



Obr. 5.13: Průběhy vnitřních sil pro příklad 5.4

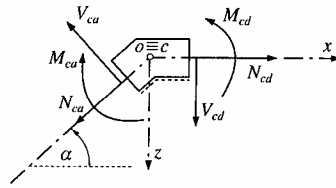
Pro kontrolu řešení je nutné ověřit **rovnováhu** v každém **uzlu** pro všechny složky vnitřních sil N , V , M lomeného nosníku. Podle principu akce a reakce se proto koncové síly všech prutů jdoucích do společného uzlu převedou na síly působící v uzlu. Např. pro uvolněný uzel c (obr. 5.15) platí podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 &: -N_{ca} \cos \alpha - V_{ca} \sin \alpha + N_{cd} = 0, \\ \sum F_{iz} = 0 &: N_{ca} \sin \alpha - V_{ca} \cos \alpha + V_{cd} = 0, \\ \sum M_{ic} = 0 &: -M_{ca} + M_{cd} = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$



Obr. 5.14: Rovinné lomené nosníky

Je-li uzel zatížen osamělou silou F nebo osamělým zatěžovacím momentem M , je nutné tyto osamělé účinky rovněž zahrnout do podmínek rovnováhy.

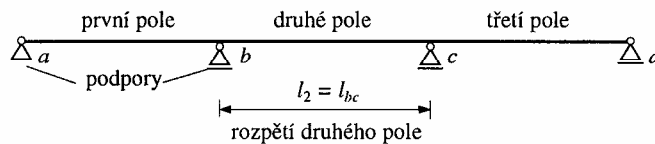


Obr. 5.15: Uvolněný uzel lomeného nosníku

5.4 Gerberův nosník

Je to spojitý nosník s vnitřními klouby, kde vložené vnitřní klouby odstraňují statickou neurčitost původního staticky neurčitého spojitého nosníku (obr. 5.16). Vedle tří statických podmínek rovnováhy celého nosníku (jedné tuhé desky) se navíc ke každému kloubu váže další momentová podmínka ($M_k = 0$). Podle (3.1) musí počet vložených kloubů odpovídat stupni statické neurčitosti původního spojitého nosníku

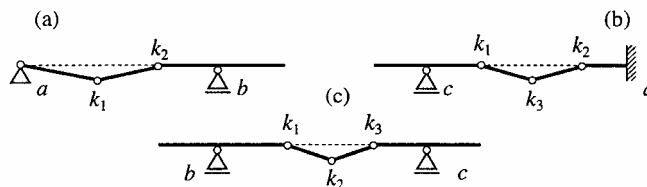
$$n_s = a - 3 . \quad (5.2)$$



Obr. 5.16: Spojitý nosník o třech polích

Vkládáním vnitřních kloubů mezi podpory spojitého nosníku nesmí vzniknout *nestabilní* část (obr. 5.17) nebo *staticky neurčitá* část. Z toho vyplývají tyto **zásady vkládání kloubů** do staticky neurčitého spojitého nosníku:

- do krajního pole zakončeného podporovým kloubem lze vložit maximálně jeden vnitřní kloub,
- do krajního pole zakončeného vetknutím lze vložit maximálně dva vnitřní klouby, avšak minimálně jeden vnitřní kloub,
- do vnitřního pole nosníku můžeme vložit maximálně dva vnitřní klouby.

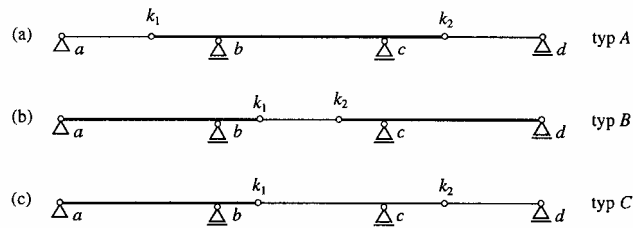


Obr. 5.17: Nestabilní části nosníku

Dodržením výše uvedených zásad můžeme pro spojitý nosník o třech polích z obr. 5.16 (původně $n_s = 2$) získat tyto tři základní typy uspořádání Gerberova nosníku (obr. 5.18):

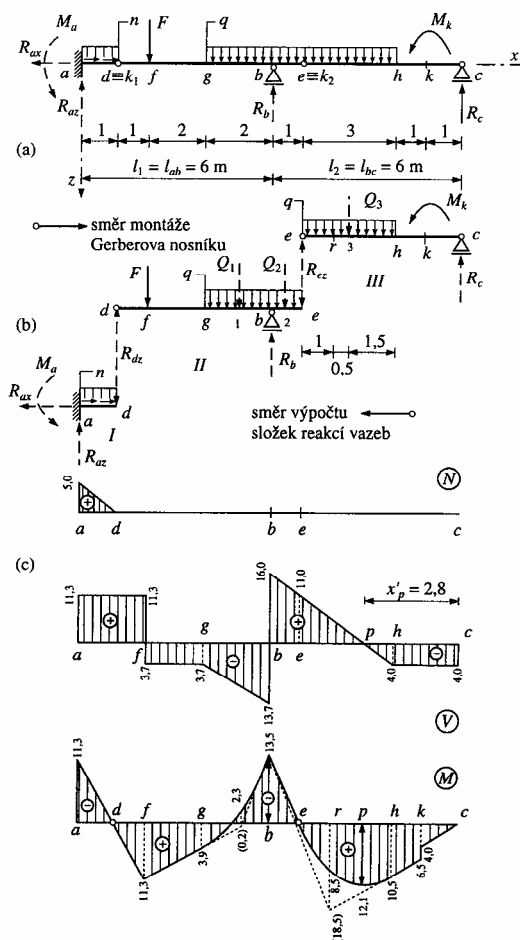
- typ A, kde jsou vnitřní klouby vloženy do obou krajních polí (mostní typ),
- typ B, kde jsou oba vnitřní klouby vloženy do středního pole (mostní typ),

- typ C, kde jeden vnitřní kloub je vložen do středního pole a druhý do libovolného krajního pole (aplikace v pozemním stavitelství).



Obr. 5.18: Gerberův nosník o třech polích

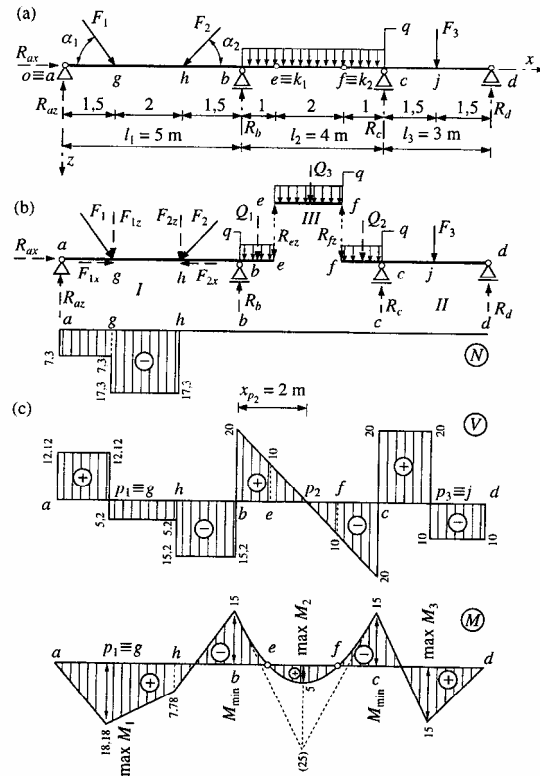
Pro výpočet reakcí vazeb Gerberova nosníku (např. z obr. 5.19a) rozčleníme nosník na příslušné části, z nichž každou lze řešit samostatně aplikací podmínek rovnováhy. Jednotlivé části představují prosté nosníky, konzoly či nosníky s převislými konci.



Obr. 5.19: Gerberův nosník o dvou polích s vetknutým koncem

Rozlišujeme **části základní** (podporující, nesoucí), které mohou existovat samostatně (ve schématu je kreslíme níže – viz obr. 5.19b) a může jich být i více na stejné úrovni (obr. 5.20), a **části vedlejší** (podporované, nesené), které jsou připojeny k částem základním. Vedlejší část však může být nosoucí pro jinou část nesenou. Nejlépe je to patrné ze schéma *montáže*, kde je zřejmý postup od

základních částí k vedlejším. Řešení reakcí a interakcí probíhá právě opačně, od částí vedlejších k základním. Obvykle se Gerberův nosník řeší samostatně jen pro svislé zatížení, neboť osové namáhání přebírá jediná vodorovná složka pevného kloubu či vetknutí).



Obr. 5.20: Členění Gerberova nosníku na části

Průběh vnitřních sil (obr. 5.19, 5.20) je možné určit na jednotlivých částech Gerberova nosníku, nebo i na fiktivním náhradním spojitým nosníku (bez kloubů).

5.5 Složená nosníková soustava

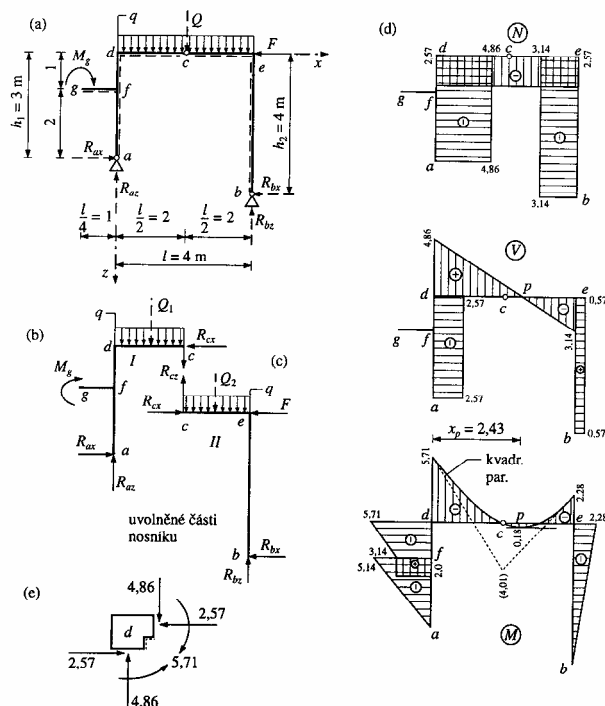
Nejjednodušším typem rovinné složené nosníkové soustavy je trojkloubový lomený nosník bez táhla či s táhlem. Táhlo můžeme považovat za jednonásobnou vnitřní vazbu typu kyvného prutu. Obecná složená nosníková soustava může mít rozmanité uspořádání. Z obecného hlediska je řešení reakcí a interakcí stejné, liší se pouze v případě ručního řešení, kdy se snažíme vyhnout větší soustavě rovnic.

5.5.1 Trojkloubový lomený nosník

Trojkloubový nosník bez táhla je složená rovinná soustava, která je tvořena dvěma pruty (teoreticky tuhými deskami) libovolného geometrického tvaru (obr. 5.21a). Pruty bývají nejčastěji přímé, mohou být i lomené, zakřivené, příhradové apod. Pruty jsou vzájemně spojeny *jedním vnitřním kloubem* a sou-

stava je připojena k pevnému útvaru *dvěma vnějšími* pevnými klouby. Tyto tři klouby **nesmí ležet v jedné přímce**, jinak se jedná o *výjimečný případ*.

Statickou určitost posoudíme, když do vztahu (3.6) dosadíme $b = 0$, $d = 2$, $a = 4$, $k_1 = 1$, takže číselně je $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 4 + 2 \cdot 1$ a rovnost je splněna.



Obr. 5.21: Trojkloubový lomený nosník bez táhla

Výpočet reakcí vazeb provedeme tak, že uvolníme jednotlivé části trojkloubového nosníku (obr. 5.21b). Pro levou (*l*) uvolněnou část sestavíme podmínky

$$\sum {}^l F_{ix} = 0, \quad \sum {}^l F_{iz} = 0, \quad \sum {}^l M_{ia} = 0 \quad (5.3)$$

a pro pravou (*p*) část podobně sestavíme podmínky

$$\sum {}^p F_{ix} = 0, \quad \sum {}^p F_{iz} = 0, \quad \sum {}^p M_{ib} = 0, \quad (5.4)$$

kde každá ze 6 rovnic obsahuje obecně 2 neznámé složky reakcí či interakcí. Vyřešením soustavy 6 rovnic získáme všech 6 neznámých složek. Při volbě vhodných podmínek ve vhodném pořadí se soustava rovnic může rozpadnout na menší nezávislé soustavy rovnic nebo samostatné rovnice. Při ručním řešení můžeme např. aplikovat následující postup:

$$\begin{aligned} \text{– momentové podmínky} \quad & \sum M_{ib} = 0, \quad \sum {}^l M_{ic} = 0 \Rightarrow R_{ax}, R_{az}, \\ & \sum M_{ia} = 0, \quad \sum {}^p M_{ic} = 0 \Rightarrow R_{bx}, R_{bz}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\text{– kontrola} \quad \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0, \quad (5.6)$$

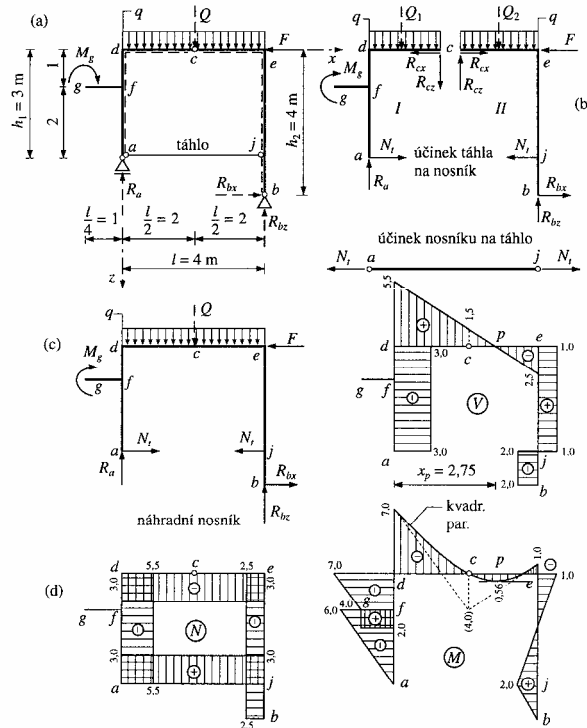
$$\text{– složky interakcí (např.)} \quad \sum {}^l F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{cx}, \quad \sum {}^l F_{iz} = 0 \Rightarrow R_{cz}, \quad (5.7)$$

$$\text{– kontrola} \quad \sum {}^p F_{ix} = 0, \quad \sum {}^p F_{iz} = 0. \quad (5.8)$$

Ještě jednodušší situace nastane při řešení trojkloubového nosníku s *patními klouby ve stejné úrovni*.

Trojkloubový nosník s táhlem (obr. 5.22) je složená rovinná soustava, která je tvořena dvěma pruty (teoreticky tuhými deskami) libovolného geometrického tvaru, přičemž pruty jsou vzájemně spojeny *vnitřním kloubem a táhlem* (kyvným prutem) a soustava je k pevnému útvaru připojena *pevným a posuvným kloubem*.

Statickou určitost posoudíme, když do vztahu (3.6) dosadíme $b = 0$, $d = 2$, $a = 3 + 1$, $k_1 = 1$. Přitom mezi jednoduché složky reakcí a jsme započítali tři vnější reakce i jednu interakci (osovou sílu) v táhle. Číselně pak je $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = (3 + 1) + 2 \cdot 1$ a rovnost je splněna.



Obr. 5.22: Trojkloubový lomený nosník s táhlem

Výpočet reakcí vazeb můžeme provést stejně jako u trojkloubového nosníku bez táhla pomocí rovnic (5.3) a (5.4). Při ručním řešení můžeme využít skutečnosti, že soustava je navenek staticky určitá se třemi neznámými složkami reakcí. Pro uvolněný trojkloubový nosník (včetně táhla) z vnějších vazeb jako celek sestavíme podmínky

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum M_{ia} = 0, \quad \sum M_{ib} = 0 \quad (5.9)$$

s běžnou kontrolou svislých složek reakcí

$$\sum F_{iz} = 0. \quad (5.10)$$

Pro zvolenou část (např. I) sestavíme podmínky

$$\sum {}^I M_{ic} = 0, \quad \sum {}^I F_{ix} = 0, \quad \sum {}^I F_{iz} = 0, \quad (5.11)$$

z nichž určíme tři složky interakcí, a to dvě ve vnitřním kloubu c a osovou sílu v táhle. Druhá část (II) pak slouží jen ke kontrole

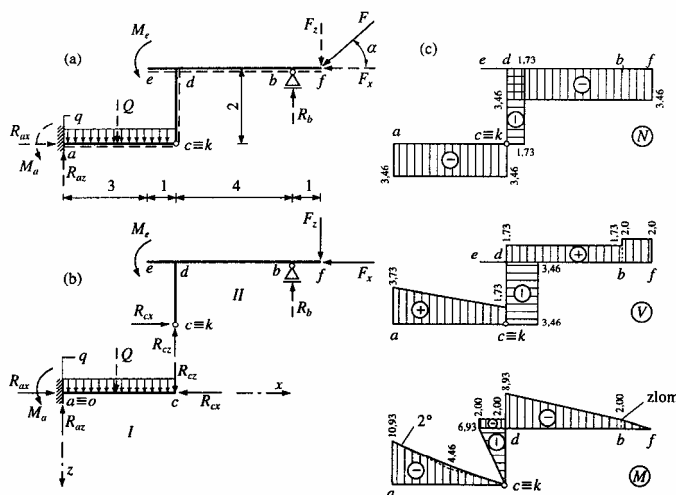
$$\sum {}^P M_{ic} = 0, \quad \sum {}^P F_{ix} = 0, \quad \sum {}^P F_{iz} = 0. \quad (5.12)$$

5.5.2 Obecná složená soustava

Obecná rovinná složená nosníková soustava sestává z rovinných prutů ve tvaru jednoduchých přímých, lomených či zakřivených prutů, částí tvořených Gerberovým nosníkem, trojkloubovým nosníkem bez táhla či s táhlem, popř. i příhradovou soustavou apod.

Statickou a kinematickou určitost (obvykle při uvažování $b = 0$) prokážeme podle vztahu (3.6).

Složky reakcí vazeb určíme tak, že složenou soustavu rozčleníme na jednodušší části (event. základní a vedlejší), odstraníme všechny vnější a vnitřní vazby a nahradíme je složkami reakcí. Pro každou uvolněnou část sestavíme příslušné podmínky rovnováhy. V obecném případě řešíme soustavu $(2b + 3d)$ rovnic. V individuálních případech (např. u jednoduché soustavy na obr. 5.23) je možné vhodnou volbou zejména momentových podmínek k vnitřním kloubům získat samostatné rovnice nebo malé soustavy rovnic pro určení složek reakcí a interakcí (např. na obr. 5.23 podmínku $\sum^P M_{ic} = 0$ pro určení R_b). Jako *kontrolu* využijeme globální podmínky rovnováhy celé prutové soustavy.



Obr. 5.23: Obecná složená nosníková soustava

Průběhy složek výslednice vnitřních sil podle daného zatížení a vypočtených složek reakcí řešíme nejvhodněji samostatně na jednotlivých prutech či částech složené soustavy nebo, popř. u jednodušších konfigurací (obr. 5.23) celkově na náhradní nosníkové soustavě bez ohledu na uspořádání vnitřních kloubů.

Shrnutí



Po studiu této kapitoly si dovedeme poradit s řešením reakcí a vnitřních sil na prostém nosníku, konzole i nosníku s převislými konci. Tato řešení jsou pak odrazovým můstkem při analýze nosníku šikmého, lomeného, jakož i při řešení složených nosníkových soustav.

6 Studijní prameny

6.1 Seznam použité literatury

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky. Staticky určité prutové konstrukce*. Druhé vydání. VUTIUM, Brno 2000
- [2] Novotná, H., Cais, S., Ptáček, M. *Teoretická mechanika*. SNTL/ALFA, Praha 1983



6.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [3] Halliday, D., Resnick, R. a Walker, J. *Fyzika*. VUTIUM, Brno 2000
- [4] Juliš, K., Brepta, R. *Mechanika I. Statika a kinematika*. Technický průvodce 65. SNTL, Praha 1986
- [5] Meriam, J. L. *Engineering Mechanics. Statics and Dynamics*. John Wiley & Sons, New York 1978
- [6] Cais, S. *Statika stavebních konstrukcí – Dějiny stavební mechaniky*. Doplňková skripta. ČVUT, Praha 1991



6.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [7] <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians>



Poznámky