

Definice: Matice, vektor

Matice typu (m, n) má m řádků a n sloupců. Sloupcový n -rozměrný vektor je matice typu $(n, 1)$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (a_{i,j}) \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

Definice: Norma matice, vektoru

- Řádková norma

$$\|\mathbf{A}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \|\vec{x}\|_m = \max_i |x_i|$$

- Sloupcová norma

$$\|\mathbf{A}\|_\ell = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \quad \|\vec{x}\|_\ell = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- Euklidovská norma

$$\|\mathbf{A}\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \|\vec{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definice: Vlastní číslo

Necht' \mathbf{A} je čtvercová matice. Potom každé $\lambda \in \mathbb{C}$ pro které platí

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

se nazývá vlastní číslo matice \mathbf{A} a \vec{x} je pak jemu příslušný vlastní vektor.

Definice: Charakteristický polynom

Charakteristický polynom čtvercové matice \mathbf{A} stupně n je definován vztahem

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n$$

kde $\mathbf{I} = \text{diag}(1)$ je jednotková matice stupně n .

Věta: Vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou kořeny jejího charakteristického polynomu.

$$\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}) \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Definice: Spektrum matice

Spektrum matice \mathbf{A} je množina všech vlastních čísel této matice.

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \mathbf{A}\vec{x} = \lambda_i\vec{x}; \quad i = 1, \dots, n\}$$

Definice: Spektrální poloměr matice

Spektrální poloměr matice je definován jako absolutní hodnota největšího vlastního čísla.

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_i \{|\lambda_i| \in \sigma(\mathbf{A}); \quad i = 1, \dots, n\}$$

Definice: Iterační metoda

Metoda pro generaci posloupnosti vektorů $\vec{x}^{(k)}$, které konvergují k řešení \vec{x}^* soustavy rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Obecnou iterační metodu lze zapsat ve tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = F_k(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k-1)}, \dots, \vec{x}^{(0)})$$

Ve speciálním případě kdy je zobrazení F lineární a užívá pouze hodnoty z předchozí iterace $\vec{x}^{(k)}$, jedná se o lineární jedнокrokovou metodu. Každá taková metoda může být přepsána do tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{v}$$

Matice \mathbf{U} je tzv. iterační matice příslušná dané iterační metodě.

Věta: Nutná a postačující podmínka konvergence

Lineární jedнокroková metoda $\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{v}$ konverguje pro libovnou volbu počáteční aproximace $\vec{x}^{(0)}$ právě tehdy, když je spektrální poloměr iterační matice \mathbf{U} menší než jedna.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^* \quad \forall \vec{x}^{(0)} \in \mathcal{R}^n \iff \rho(\mathbf{U}) < 1$$

Věta: Postačující podmínka konvergence

Necht' některá z norem iterační matice \mathbf{U} je menší než jedna, potom iterační metoda konverguje pro libovnou volbu počáteční aproximace $\vec{x}^{(0)}$.

$$\|\mathbf{U}\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^* \quad \forall \vec{x}^{(0)} \in \mathcal{R}^n$$

Navíc platí následující odhad chyby (v téže normě)

$$\begin{aligned} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(*)}\| &\leq \frac{\|\mathbf{U}\|}{1 - \|\mathbf{U}\|} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\| \\ \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(*)}\| &\leq \frac{\|\mathbf{U}\|^k}{1 - \|\mathbf{U}\|} \|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\| \end{aligned}$$

Definice: Iterační metody

Je dána soustava rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Necht' matice \mathbf{A} je rozložena následujícím způsobem

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{P}$$

kde \mathbf{L} je ostře dolní trojúhelníková matice, \mathbf{D} je diagonální matice a \mathbf{P} je ostře horní trojúhelníková matice. Jednotkovou matici označíme \mathbf{I} .

Potom můžeme zapsat jednotlivé varianty obecné lineární jedнокrokové metody $\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{v}$, resp. různé jim příslušné iterační matice \mathbf{U} v následujícím tvaru:

- Prostá iterační metoda

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}_{PI}\vec{x}^{(k)} + \vec{v}_{PI} \quad \text{kde} \quad \mathbf{U}_{PI} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad \vec{v}_{PI} = \vec{b}$$

- Jacobiho metoda

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}_J\vec{x}^{(k)} + \vec{v}_J \quad \text{kde} \quad \mathbf{U}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{P}) \quad \vec{v}_J = \mathbf{D}^{-1}\vec{b}$$

- Gauss-Seidelova metoda

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}_G\vec{x}^{(k)} + \vec{v}_G \quad \text{kde} \quad \mathbf{U}_G = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{P} \quad \vec{v}_G = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\vec{b}$$

Definice: Diagonálně dominantní matice (řádkově)

Matici \mathbf{A} nazveme ostře diagonálně dominantní, pokud platí

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \quad i = 1, \dots, n$$

Věta: Postačující podmínka konvergence Jacobiho metody

Je dána soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Pokud je matice \mathbf{A} ostře diagonálně dominantní, potom Jacobiho metoda konverguje pro libovonou volbu počáteční aproximace $\vec{x}^{(0)}$.

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \quad i, j = 1, \dots, n \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^* \quad \forall \vec{x}^{(0)} \in \mathcal{R}^n$$

Lemma: Vlastní čísla iterační matice \mathbf{U}_J

$$\det(\mathbf{U}_J - \lambda \mathbf{I}) = 0 \iff \det(\mathbf{L} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{P}) = 0$$

Definice: Pozitivně definitní matice

Matici \mathbf{A} nazveme pozitivně definitní, pokud jsou všechny její hlavní minory kladné

$$a_{1,1} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(\mathbf{A}) > 0$$

Věta: Postačující podmínka konvergence Gauss-Seidelovy metody

Je dána soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Pokud je splněna některá z následujících podmínek pro matici \mathbf{A}

- (a) matice \mathbf{A} je ostře diagonálně dominantní
- (b) matice \mathbf{A} je symetrická a pozitivně definitní

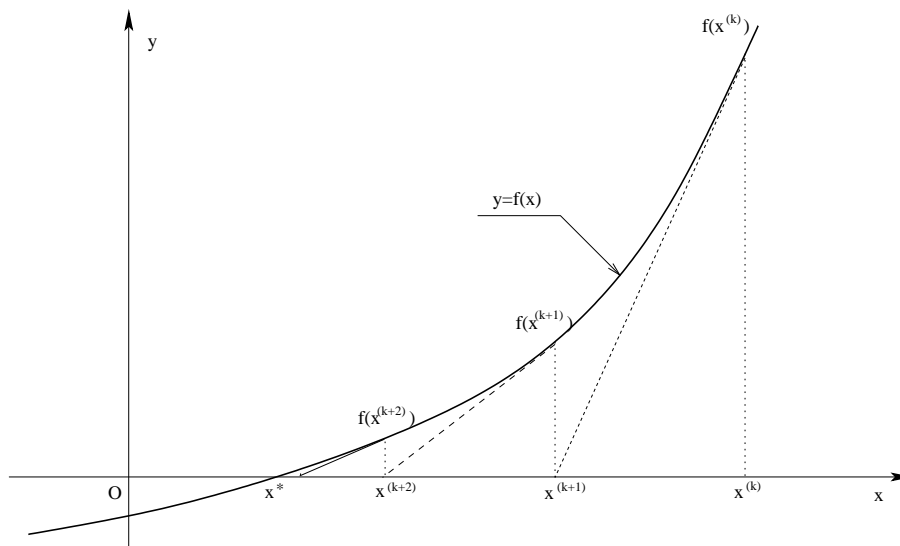
potom Gauss-Seidelova metoda konverguje pro libovonou volbu počáteční aproximace $\vec{x}^{(0)}$.

Lemma: Vlastní čísla iterační matice \mathbf{U}_G

$$\det(\mathbf{U}_G - \lambda \mathbf{I}) = 0 \iff \det(\lambda \mathbf{L} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{P}) = 0$$

Motivace: Newtonova iterační metoda v \mathcal{R}^1

Hledejme řešení rovnice $f(x) = 0$, kde $f : \mathcal{R}^1 \mapsto \mathcal{R}^1$ je (reálná, obecně nelineární) funkce jedné (reálné) proměnné.



Na základě výše uvedeného schematického znázornění lze odvodit následující iterační proces - Newtonovu metodu

$$\frac{f(x^{(k)})}{x^{(k)} - x^{(k+1)}} = f'(x^{(k)}) \implies x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(f'(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

Aby měl tento výraz smysl je třeba zajistit aby $f'(x^{(k)}) \neq 0$.

Rozšíření: Newtonova iterační metoda v \mathcal{R}^n

Hledejme řešení rovnice $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$, kde $\vec{f} : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^n$ je n -rozměrná vektorová funkce n proměnných. Rozpisem po složkách získáme následující soustavu

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Na základě analogie s jednorozměrným případem lze odvodit následující (n -rozměrné) zobecnění Newtonovy metody

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(f'(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)}) \implies \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left(\vec{f}'(\vec{x}^{(k)})\right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

Aby měl tento výraz smysl je třeba zajistit aby $\det(\vec{f}'(\vec{x}^{(k)})) \neq 0$.

Symbolem $\vec{f}'(\vec{x}^{(k)})$ značíme Jacobiho matici zobrazení $\vec{f}(\vec{x}^{(k)})$, tj.

$$\vec{f}'(\vec{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definice: Kubický interpolační spline

Je dána množina uzlů $x_i \in \langle a; b \rangle \subset \mathcal{R}$ tak, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$. Dále pak mějme ke každému x_i $i = 0, \dots, k$ hodnotu $y_i \in \mathcal{R}$.

Kubický interpolační spline $s(x)$ je funkce definovaná následovně

- (A) $s(x) \in \mathcal{C}^2(\langle a, b \rangle)$
- (B) $s(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$ pro $x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$
- (C) $s(x_i) = y_i$

Poznámka: Koeficienty kubického interpolačního splinu

Na základě výše uvedené definice lze odvodit následující vztahy pro koeficienty kubického interpolačního splinu.

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{6h_i}(s''_{i+1} - s''_i) \\ b_i &= \frac{s''_i}{2} \\ c_i &= \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}(s''_{i+1} + 2s''_i) \\ d_i &= y_i \end{aligned} \right\} \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

Neznámé hodnoty s''_i $i = 0, \dots, k$ určíme ze soustavy rovnic

$$h_{i-1}s''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)s''_i + h_i s''_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \quad i = 1, \dots, k-1$$

Tuto soustavu $k-1$ rovnic pro $k+1$ neznámých je nutné pro jednoznačnou řešitelnost doplnit dvěma okrajovými podmínkami. Funkce získaná v případě volby $s''(a) = s''(b) = 0$ se nazývá přirozený kubický interpolační spline.

Úloha: Aproximace metodou nejmenších čtverců

Je dána množina uzlů $x_i \in \langle a; b \rangle \subset \mathcal{R}$ (ne nutně od sebe různých) a dále pak mějme ke každému x_i $i = 1, \dots, k$ přiřazenou hodnotu $y_i \in \mathcal{R}$.

Cílem je najít funkci $f(x)$ (z předem vhodně zvoleného prostoru funkcí) tak, aby co nejlépe aproximovala danou tabulku hodnot $[x_i, y_i]$.

• Funkce $f(x)$ obvykle vybíráme z nějakého konečnědimenzionálního podprostoru funkcí s jednoduchou strukturou. Nejčastěji používané jsou např:

Algebraické polynomy nejvýše stupně n $f(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$

Trigonometrické polynomy nejvýše stupně n $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$

Zobecněné polynomy nejvýše stupně n $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j g_j(x)$ kde $g_j(x)$ jsou báze funkce

• Měřítkem "kvality" aproximace je výraz, jež by vhodným způsobem vyjádřil pojem "vzdálenost funkce $f(x)$ od dané množiny bodů $[x_i, y_i]$ ". Takovýmto měřítkem je v případě metody nejmenších čtverců kvadratická odchylka definovaná pro danou tabulku hodnot výrazem $\delta^2(f) = \sum_{i=1}^k (f(x_i) - y_i)^2$

Řešení: Aproximace algebraickými polynomy

1. Volba prostoru funkcí $f(x) \rightarrow$ Algebraické polynomy nejvýše stupně n

$$f(x) = p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$

2. Zápis kvadratické odchylky $\rightarrow \delta^2(f) = \sum_{i=1}^k (f(x_i) - y_i)^2$

$$\delta^2(p_n(x)) = \sum_{i=1}^k (\sum_{j=0}^n a_j x_i^j - y_i)^2 = \sum_{i=1}^k (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i)^2$$

3. Nalezení minima kvadratické odchylky

Kvadratická odchylka je funkcí hledaných koeficientů a_j ; naopak hodnoty x_i, y_i jsou zadány. Nutné podmínky pro lokální minimum $\delta^2(p_n(x))$ proto jsou:

$$\frac{\partial(\delta^2(p_n))}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^k (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i) \cdot 1 & = 0 \\ \sum_{i=1}^k (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i) x_i & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i) x_i^n & = 0 \end{cases}$$

4. Soustava normálních rovnic Výše uvedená podmínky tvoří soustavu $n + 1$ lineárních algebraických rovnic pro $n + 1$ neznámých koeficientů a_0, a_1, \dots, a_n .

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^k 1 + a_1 \sum_{i=1}^k x_i + \dots + a_n \sum_{i=1}^k x_i^n &= \sum_{i=1}^k y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^k x_i + a_1 \sum_{i=1}^k x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^k x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^k x_i y_i \\ &\vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^k x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^k x_i^{n+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^k x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^k x_i^n y_i \end{aligned}$$

5. Zápis polynomu nejlepší aproximace

$$p_n^*(x) = a_0^* + a_1^* x^1 + \dots + a_n^* x^n$$

6. Výpočet kvadratické odchylky

$$\delta^2(p_n^*(x)) = \sum_{i=1}^k (a_0^* + a_1^* x_i + \dots + a_n^* x_i^n - y_i)^2$$

Definice: Cauchyova úloha pro ODR 1.řádu

Nalezněte funkci $y = y(x)$ pro kterou platí

$$y' = f(x, y) \quad x \in \langle a, b \rangle \subset \mathcal{R}$$

($y : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$, $f : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$) a pro kterou je splněna počáteční podmínka $y(a) = {}^0y$.

Definice: Cauchyova úloha pro systém ODR 1.řádu

Nalezněte funkci $\vec{y} = \vec{y}(x)$ pro kterou platí

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad x \in \langle a, b \rangle \subset \mathcal{R}$$

($\vec{y} : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^m$, $\vec{f} : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \mapsto \mathcal{R}^m$) a pro kterou je splněna počáteční podmínka $\vec{y}(a) = {}^0\vec{y}$.

Definice: Cauchyova úloha pro ODR m.řádu

Nalezněte funkci $y = y(x)$ pro kterou platí

$$y^{(m)} = g(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad x \in \langle a, b \rangle \subset \mathcal{R}$$

($y : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$, $g : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \mapsto \mathcal{R}$) a jsou splněny počáteční podmínky $y(a) = {}^0y$, $y'(a) = {}^0y'$, ..., $y^{(m-1)}(a) = {}^0y^{(m-1)}$.

Poznámka: Převod ODR m.řádu na soustavu ODR 1.řádu

Mám: $y^{(m)} = g(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ $y(a) = {}^0y$, $y'(a) = {}^0y'$, ..., $y^{(m-1)}(a) = {}^0y^{(m-1)}$

Chci: $\vec{y}' = \vec{f}(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ $y_1(a) = {}^0y_1$, $y_2(a) = {}^0y_2$, ..., $y_m(a) = {}^0y_m$

Zavedu substituci:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_m = y^{(m-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_m' = g(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^0y_1(a) = {}^0y \\ {}^0y_2(a) = {}^0y' \\ \vdots \\ {}^0y_m(a) = {}^0y^{(m-1)} \end{array} \right.$$

Věta: Existence a jednoznačnost řešení

Necht' je dána soustava m diferenciálních rovnic v normálním tvaru $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ a necht' funkce $f_i(x, \vec{y})$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ jsou spojité v oblasti $\Omega \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m$. Potom pro každý bod $[x_0, \vec{y}_0] \in \Omega$ existuje právě jedno maximální řešení dané soustavy, splňující počáteční podmínku $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. Toto řešení je definováno v intervalu I takovém, že $x_0 \in I$ a pro každé $x \in I$ leží bod $[x, \vec{y}(x)]$ v oblasti Ω .

Definice: Obecná jednokroková metoda

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h) \quad y(x_0) = y_0$$

Přírůstková funkce ϕ musí splňovat podmínku konzistence $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$.

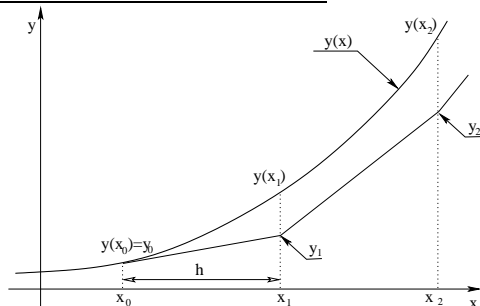
Věta: Konvergence obecné jednokrokové metody

Necht' jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ a funkce ϕ a $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ jsou spojité na množině

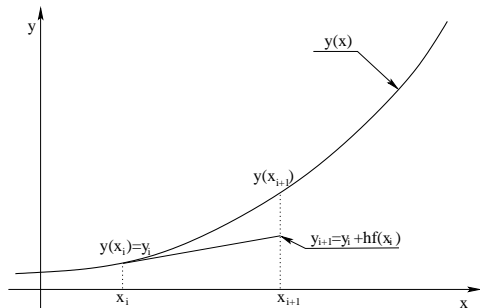
$$D \equiv \left\{ [x, y, h] : x \in \langle x_0, b \rangle; y \in \mathcal{R}; 0 \leq h \leq h_0, h_0 > 0 \right\}$$

Potom

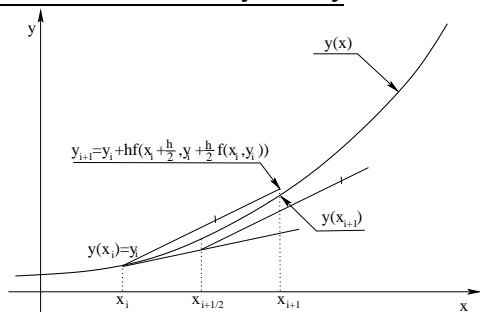
Obecná jednokroková metoda je konvergentní $\iff \phi(x, y, 0) = f(x, y) \quad \forall [x, y] \in \{ \langle x_0, b \rangle \times \mathcal{R} \}$

Obecná jednokroková metoda

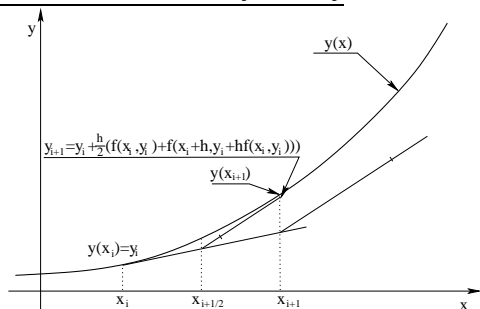
$$\begin{aligned}\phi(x, y) &\approx f(x, y) \\ \phi(x, y, h) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x, y) \\ y_{i+1} &= y_i + h\phi(x_i, y_i, h)\end{aligned}$$

Eulerova metoda

$$\begin{aligned}\phi(x_i, y_i, h) &= \underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{vlevo}} \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i)\end{aligned}$$

1. Modifikace Eulerovy metody

$$\begin{aligned}\phi(x_i, y_i, h) &= f\left(\underbrace{x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)}_{\text{vprostřed}}\right) \\ y_{i+1} &= y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)\end{aligned}$$

2. Modifikace Eulerovy metody

$$\begin{aligned}\phi(x_i, y_i, h) &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{vlevo}} + \underbrace{f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))}_{\text{vpravo}} \right) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \left(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)) \right)\end{aligned}$$

Definice: Okrajová úloha pro lineární ODR 2.řádu

Nalezněte funkci $y = y(x)$ pro kterou platí

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x) = f_3(x) \quad x \in \langle a, b \rangle \subset \mathcal{R}, f_i \in C(\langle a, b \rangle) \quad i = 1, 2, 3$$

a zároveň jsou splněny okrajové podmínky typu

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y(a) &= \alpha_3 \\ \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) &= \beta_3 \end{aligned}$$

kde koeficienty $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{R}$ splňují následující relace:

$$i = 1, 2 \quad \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0 \quad \alpha_i + \beta_i \neq 0$$

Poznámka: Okrajové podmínky

Výše uvedené obecné okrajové podmínky se nazývají *Sturmovy*. V jednotlivých konkrétních případech rozlišujeme jejich následující varianty:

- a) *Dirichletovy* $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$
- b) *Neumannovy* $y'(a) = \alpha, y'(b) = \beta$
- c) *Newtonovy* $y(a) = \alpha, y'(b) = \beta$

Věta: Převod na samoadjungovaný tvar

Necht' je dána rovnice

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x) = f_3(x) \quad (1)$$

kde $f_i \in C(\langle a, b \rangle) \quad i = 1, 2, 3$. Potom ji lze převést do *samoadjungovaného tvaru*:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

kde $p(x) = e^{\int f_1(x) dx}$, $q(x) = -f_2(x)p(x)$, $f(x) = -f_3(x)p(x)$.

Návod: Převod na samoadjungovaný tvar

1. Násob (1) $-p(x)$

$$-p(x)y'' - p(x)f_1(x)y' - p(x)f_2(x)y = -p(x)f_3(x)$$

2. "Rozderivuj" (2)

$$-p(x)y'' - p'(x)y' + q(x)y = f(x)$$

3. Srovnej koeficienty u stejných derivací y

$$\begin{aligned} -p(x)f_1(x) = -p'(x) &\Rightarrow p(x) = e^{\int f_1(x) dx} \\ -p(x)f_2(x) = q(x) &\Rightarrow q(x) = -p(x)f_2(x) \\ -p(x)f_3(x) = f(x) &\Rightarrow f(x) = -p(x)f_3(x) \end{aligned}$$

Věta: Existence a jednoznačnost řešení

Uvažujme lineární diferenciální rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$$

Necht' navíc platí:

- a) $q, f \in C(\langle a, b \rangle), p \in C^1(\langle a, b \rangle)$
- b) $p(x) > 0, q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Potom existuje právě jedno řešení splňující Sturmovy okrajové podmínky (s výjimkou případu $\alpha_2 = \beta_2 = 0, q(x) \equiv 0$ v $\langle a, b \rangle$).

Definice: Metoda sítí pro Dirichletovu úlohui) **Úloha**

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \quad x \in (a, b) \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ii) **Sít'** Ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b \rangle \equiv \langle x_0, x_n \rangle$ s krokem $h = \frac{b-a}{n}$

$$T \equiv \{x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \dots, n\}$$

iii) **Značení**

$$Y_i \approx y(x_i) \quad f_i = f(x_i) \quad q_i = q(x_i) \quad p_i = p(x_i)$$

iv) **Diskretizace**(a) Aproximace $(p(x)y')$ v bodech $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$ centrálně, užitím hodnot v bodech x_{i-1}, x_i, x_{i+1} .

$$(p(x)y')_{i-1/2} \approx p_{i-1/2} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h} \quad (p(x)y')_{i+1/2} \approx p_{i+1/2} \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}$$

(b) Nahrazení vnější derivace ve výrazu $(p(x)y')'$ centrálním diferencním podílem výše uvedených aproximací

$$(p(x)y')' \approx \frac{(p(x)y')_{i+1/2} - (p(x)y')_{i-1/2})}{h} \approx \frac{p_{i+1/2} \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h} - p_{i-1/2} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h}}{h}$$

(c) Sestavení diskrétní aproximace

$$-\left(\frac{p_{i+1/2} \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h} - p_{i-1/2} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h}}{h} \right) + q_i Y_i = f_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

v) **Soustava** Úpravou a přeskupením členů předchozí rovnici dostaneme

$$-p_{i-1/2} Y_{i-1} + (p_{i-1/2} + p_{i+1/2} + h^2 q_i) Y_i - p_{i+1/2} Y_{i+1} = h^2 f_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

Poznámka: Vlastnosti soustavy

Výslednou soustavu lineárních algebraických rovnic lze zapsat v maticovém tvaru, kde matice je třídiagonální, symetrická a pozitivně-definitní. To zaručuje jednoznačnou řešitelnost diskrétní úlohy.

Definice: Lineární PDE 2.řádu (ve 2 proměnných)

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y) \quad (1)$$

Definice: Klasifikace lineárních PDE 2.řádu

Pro rovnici ve tvaru (1) definujeme

$$r(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$$

Rovnice je v bodě $[x_0, y_0]$

- a) *Elíptická* $\iff r(x_0, y_0) < 0$
- b) *Parabolická* $\iff r(x_0, y_0) = 0$
- c) *Hyperbolická* $\iff r(x_0, y_0) > 0$

Poznámka: Příklady rovnic

- a) *Elíptická* $\implies \Delta u = f \dots$ Poissonova rovnice
- b) *Parabolická* $\implies \frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots$ Rovnice vedení tepla
- c) *Hyperbolická* $\implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots$ Vlnová rovnice

Úloha:

Dána oblast $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega$ a funkce $f(x, y)$ definovaná na oblasti $\bar{\Omega}$.
Nalezněte funkci $u = u(x, y)$ takovou, aby splňovala Poissonovu rovnici

$$\Delta u = f \quad \forall x \in \Omega$$

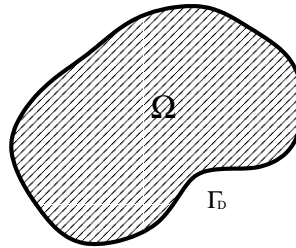
a okrajové podmínky dle typu úlohy.

Dirichletova úloha

$$\Omega \subset \mathcal{R}^2 \quad \partial\Omega \equiv \Gamma_D$$

$$\Delta u = f \quad \forall x \in \Omega$$

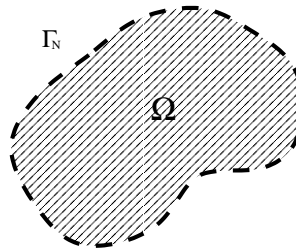
$$u|_{\Gamma_D} = \phi_D(x, y)$$

**Neumannova úloha**

$$\Omega \subset \mathcal{R}^2 \quad \partial\Omega \equiv \Gamma_N$$

$$\Delta u = f \quad \forall x \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_N} = \phi_N(x, y)$$

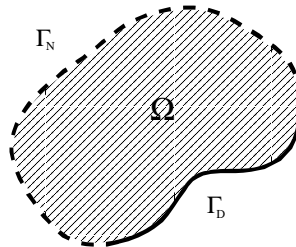
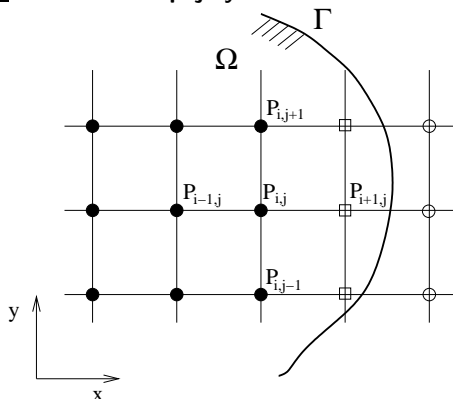
**Smíšená úloha**

$$\Omega \subset \mathcal{R}^2 \quad \partial\Omega \equiv \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

$$\Delta u = f \quad \forall x \in \Omega$$

$$u|_{\Gamma_D} = \phi_D(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_N} = \phi_N(x, y)$$

**Definice: Metoda sítí - pojmy**

- $\Omega \subset \mathcal{R}^2 \dots$ oblast
- $\Gamma \equiv \partial\Omega \dots$ hranice oblasti
- $P_{i,j} \dots$ uzly sítě
- ... regulární uzel
- ... neregulární uzel
- ... vnější ("zahraniční") uzel

Definice: Metoda sítí pro Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici**i) Regulární uzel**

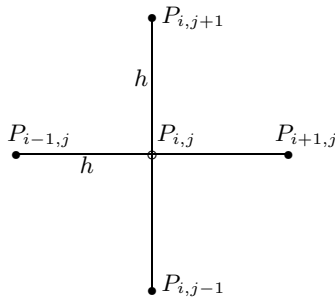
Z Taylorova rozvoje funkce $u(x)$ zřejmě platí:

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\implies \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Zanedbáme-li člen $\mathcal{O}(h^2)$, dostaneme aproximaci, která je 2.řádu přesnosti.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = f \implies \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

$$\implies U_{i-1,j} + U_{i+1,j} - 4U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} = h^2 f_{i,j}$$

ii) Neregulární uzel (lineární interpolace)

Z Taylorova rozvoje funkce $u(x)$ zřejmě platí:

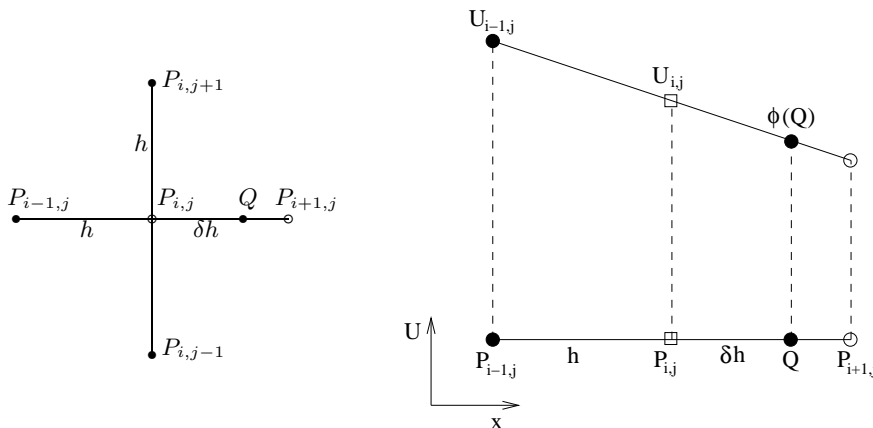
$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$u(Q) = \phi(Q) = u(x) + \delta hu'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

První rovnici vynásobíme δ a přičteme ke druhé.

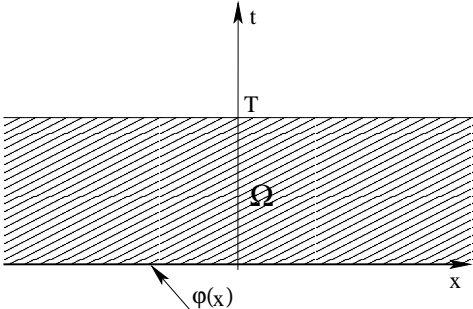
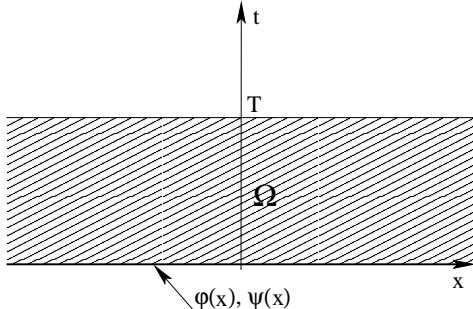
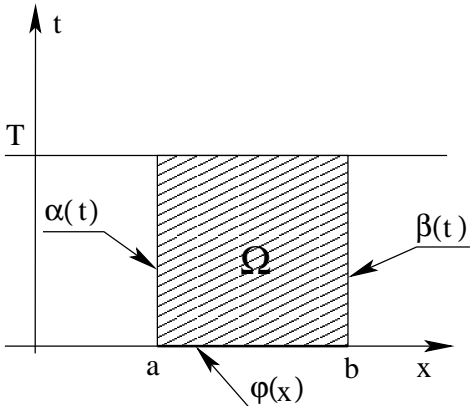
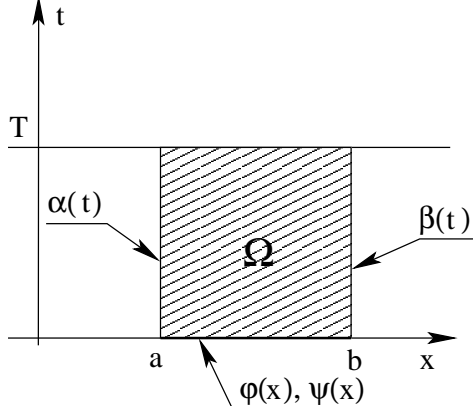
$$\delta u(x-h) + \phi(Q) = (1+\delta)u(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Zanedbáme-li člen $\mathcal{O}(h^2)$, dostaneme aproximaci, která je 2.řádu přesnosti.



$$\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} = \frac{\phi(Q) - U_{i,j}}{\delta h}$$

$$\implies (1+\delta)U_{i,j} - \delta U_{i-1,j} = \phi(Q)$$

<p style="text-align: center;"><u>ROVNICE VEDENÍ TEPLA</u></p> $u_t = p u_{xx} + f(x, t)$	<p style="text-align: center;"><u>VLNOVÁ ROVNICE</u></p> $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$
<p><u>Cauchyova úloha</u></p> <p>Oblast: $\Omega = \mathcal{R} \times (0, T)$ nebo $\Omega = \mathcal{R} \times (0, \infty)$</p>  <p>Počáteční podmínka: $u(x, 0) = \varphi(x)$</p>	<p><u>Cauchyova úloha</u></p> <p>Oblast: $\Omega = \mathcal{R} \times (0, T)$ nebo $\Omega = \mathcal{R} \times (0, \infty)$</p>  <p>Počáteční podmínka: $u(x, 0) = \varphi(x)$</p>
<p><u>Smíšená úloha</u></p> <p>Oblast: $\Omega = (a, b) \times (0, T)$ nebo $\Omega = (a, b) \times (0, \infty)$</p>  <p>Počáteční podmínka: $u(x, 0) = \varphi(x)$</p> <p>Okrajové podmínky: $u(a, t) = \alpha(t)$ $u(b, t) = \beta(t)$</p> <p>Podmínky souhlasu: $\varphi(x = a) = \alpha(t = 0)$ $\varphi(x = b) = \beta(t = 0)$</p>	<p><u>Smíšená úloha</u></p> <p>Oblast: $\Omega = (a, b) \times (0, T)$ nebo $\Omega = (a, b) \times (0, \infty)$</p>  <p>Počáteční podmínka: $u(x, 0) = \varphi(x)$ $u_t(x, 0) = \psi(x)$</p> <p>Okrajové podmínky: $u(a, t) = \alpha(t)$ $u(b, t) = \beta(t)$</p> <p>Podmínky souhlasu: $\varphi(x = a) = \alpha(t = 0)$ $\varphi(x = b) = \beta(t = 0)$ $\alpha_t(t = 0) = \psi(x = a)$ $\beta_t(t = 0) = \psi(x = b)$</p>

SCHEMATA PRO ROVNICI VEDENÍ TEPLA

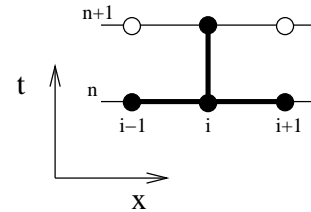
$$u_t = p u_{xx}$$

Explicitní schema

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = p \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}$$

$$U_i^{n+1} = \sigma U_{i-1}^n + (1 - 2\sigma) U_i^n + \sigma U_{i+1}^n$$

$$\mathbf{I} U^{n+1} = \mathbf{A}_E U^n$$



$$\sigma = p \frac{\tau}{h^2} < 0.5$$

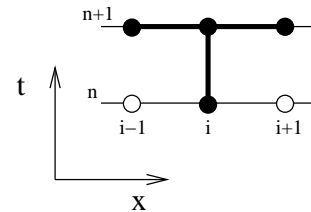
$$\mathcal{O}(h^2, \tau)$$

Implicitní schema

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = p \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$-\sigma U_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\sigma) U_i^{n+1} - \sigma U_{i+1}^{n+1} = U_i^n$$

$$\mathbf{A}_I U^{n+1} = \mathbf{I} U^n$$



$$\sigma = p \frac{\tau}{h^2} > 0$$

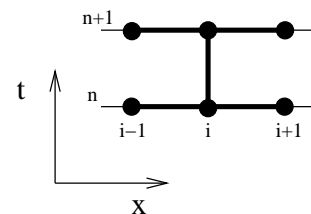
$$\mathcal{O}(h^2, \tau)$$

Crank-Nicolsonovo schema

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{p}{2} \left[\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right]$$

$$-\sigma U_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\sigma) U_i^{n+1} - \sigma U_{i+1}^{n+1} = \sigma U_{i-1}^n + (1 - 2\sigma) U_i^n + \sigma U_{i+1}^n$$

$$\mathbf{A}_I U^{n+1} = \mathbf{A}_E U^n$$



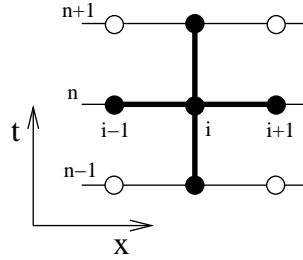
$$\sigma = p \frac{\tau}{h^2} > 0$$

$$\mathcal{O}(h^2, \tau^2)$$

SCHEMATA PRO VLNOVOU ROVNICI

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f$$

Explicitní schema



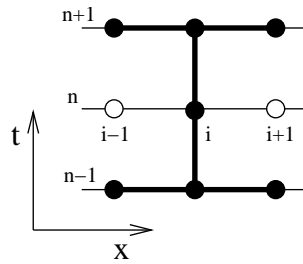
$$\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1$$

$$\mathcal{O}(h^2, \tau^2)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n$$

$$U_i^{n+1} = \sigma^2 U_{i-1}^n + 2(1 - \sigma^2) U_i^n + \sigma^2 U_{i+1}^n - U_i^{n-1} + \tau^2 f_i^n$$

Implicitní schema



$$\sigma = \frac{c\tau}{h} > 0$$

$$\mathcal{O}(h^2, \tau^2)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}}{h^2} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right] + f_i^n$$

$$-\sigma^2 U_{i-1}^{n+1} + 2(1 + \sigma^2) U_i^{n+1} - \sigma^2 U_{i+1}^{n+1} = \sigma^2 U_{i-1}^{n-1} - 2(1 + \sigma^2) U_i^{n-1} + \sigma^2 U_{i+1}^{n-1} + 4U_i^n + 2\tau^2 f_i^n$$

Náhrada počáteční podmínky

i) Náhrada řádu $\mathcal{O}(\tau)$

$$u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \tau) - u(x_i, 0)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau)$$

$$\implies \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = \psi(x_i)$$

$$\implies U_i^1 = \varphi(x_i) + \tau \psi(x_i)$$

ii) Náhrada řádu $\mathcal{O}(\tau^2)$

$$u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \mathcal{O}(\tau^3)$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \tau) - u(x_i, 0)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0)}_{c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) + f(x_i, 0)} + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$\implies \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = \frac{c^2 \tau}{2} \frac{U_{i+1}^0 - 2U_i^0 + U_{i-1}^0}{h^2} + \frac{\tau}{2} f_i^0 + \psi(x_i)$$

$$\implies U_i^1 = \frac{\sigma^2}{2} [\varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i+1})] + (1 - \sigma^2) \varphi(x_i) + \tau \psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2} f_i^0$$