

Polynomy

1. Definice **Reálný polynom stupně n** (neboli mnohočlen) je funkce tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \text{ kde } a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}, a_n \neq 0,$$

která každému komplexnímu číslu x přiřazuje komplexní číslo $p(x)$.

a_0, \dots, a_n se nazývají koeficienty.

a_0 je absolutní člen.

x je proměnná.

n je stupeň polynomu.

2. Pojmy Polynom, který má za koeficienty a_0, \dots, a_n komplexní čísla, se nazývá **komplexní polynom**.

Připouštíme-li hodnoty za proměnnou x z reálného oboru (tj. $x \in \mathbf{R}$), mluvíme o reálném (případně komplexním) polynomu **v reálném oboru**.

Připouštíme-li hodnoty za proměnnou x z komplexního oboru (tj. $x \in \mathbf{C}$), mluvíme o reálném (případně komplexním) polynomu **v komplexním oboru**.

3. Definice Každé číslo α (reálné i komplexní, podle oboru v jakém pracujeme) takové, že splňuje $p(\alpha) = 0$ se nazývá **kořen polynomu $p(x)$** .

4. Poznámka Každý kořen je tedy řešením rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

které říkáme **algebraická rovnice n -tého stupně**.

5. Příklad Výraz $p(x) = x^2 + 3x - 5$ je reálný polynom 2. stupně.

Rovnice $x^2 + 3x - 5 = 0$ je algebraická rovnice 2. stupně (kvadratická rovnice).

6. Poznámka Je tedy jasné, že graf funkce $p(x)$ protíná osu x v bodech, které jsou reálnými kořeny polynomu $p(x)$. Toho se dá s výhodou využít například při řešení kvadratických nerovnic grafickou cestou.

7. Příklad Určete kořeny polynomu $p(x)$ v komplexním oboru:

a) $p(x) = x^2 + x - 2$;

b) $p(x) = x^4 - 1$;

c) $p(x) = x^3 + 1$.

Řešení

a) Polynom si zapíšeme ve tvaru algebraické rovnice, tj. $x^2 + x - 2 = 0$, což je „obyčejná“ kvadratická rovnice, kterou vyřešíme. Nalezneme dva reálné (což znamená, že jsou zároveň i komplexní) kořeny $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = -2$.

b) Řešíme algebraickou rovnicí $x^4 - 1 = 0$. Tu upravíme na tvar $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$. Odtud již snadno získáme kořeny $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = i$, $\alpha_4 = -i$.

c) $p(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1) \left(x - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Otázkou tedy je, zda existuje nějaký univerzální algoritmus na hledání kořenů polynomu? Již v 16. století byly známy vzorce pro polynom stupně 1, 2, 3 a 4. Dlouhou dobu se potom matematikové snažili nalézt podobné vzorce pro kořeny polynomů stupně 5. Teprve v polovině 19. století bylo dokázáno, že takové vzorce pro polynomy většího nebo rovného pěti neexistují.

Při odhadování racionálních a celočíselných kořenů u polynomů s celočíselnými koeficienty a nenulovým absolutním členem nám výrazně pomůže následující věta. Upozorníme však na podstatný detail. Tvrzení věty nám dává pouze nutnou, nikoli však postačující podmínku pro to, aby číslo $\frac{r}{s}$ bylo kořenem polynomu.

8. Věta Nechť číslo $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbf{Z}$ a $s \in \mathbf{N}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ a $a_0 \neq 0$. Pak platí

$$r | a_0 \wedge s | a_n.$$

9. Poznámka Pro ověřování, zda je číslo kořenem polynomu se s výhodou používá **Hornerovo schema**. Pomocí něj se také snadno zjišťuje násobnost kořene.

10. Příklad Nalezněte všechny racionální a celočíselné kořeny polynomu $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$.

Řešení

Podle Věty 8 si vytipujeme čísla r a s takto:

$$r | -3 \implies r = 1, -1, 3, -3;$$

$$s | 4 \implies s = 1, 2, 4.$$

Dále si vypíšeme všechny možné hodnoty $\frac{r}{s}$.

$$\frac{r}{s} : 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}.$$

Ověření, zda se jedná o kořeny polynomu $g(x)$ provedeme Hornerovým schématem, podle něhož zjistíme, že $-\frac{1}{2}$ je dvojnásobným kořenem a 3 je kořenem jednoduchým.

11. Věta Nechť $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbf{Z}$ a $s \in \mathbf{N}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ a $a_0 \neq 0$. Potom pro libovolné celé číslo m platí:

$$(r - ms) | f(m).$$

Speciálně tedy: $(r - s) | f(1)$, resp. $(r + s) | f(-1)$.

12. Příklad Rozhodněte, které vytipované kořeny polynomu $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$ z předchozího příkladu nemá smysl vyšetřovat Hornerovým schématem.

Řešení Určíme funkční hodnotu $g(1) = 4 - 8 - 11 - 3 = -18$ a $g(-1) = -4 - 8 + 11 - 3 = -4$. Podíváme se na vytipované hodnoty $\frac{r}{s}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{r}{s} : & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{1} & \frac{-3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \\ r+s : & 2 & 0 & 3 & 1 & 5 & 3 & 4 & -2 & 5 & -1 & 7 & 1 \\ r-s & 0 & -2 & -1 & -3 & -3 & -5 & 2 & -4 & 1 & -5 & -1 & -7 \end{array} \left| \begin{array}{l} g(-1) = -4 \\ g(1) = -18 \end{array} \right.$$

Z této tabulky je zřejmé, že Hornerovým schématem není nutno vyšetřovat tyto hodnoty $\frac{r}{s}$: $\frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$.

Je tedy vidět, že počet potenciálních kořenů se nám výrazně zredukoval a k ověření Hornerovým schématem zůstávají pouze titi adepti: $\frac{-1}{2}, \frac{3}{1}$.

13. Věta (Bézoutova věta) Nechť $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ je libovolný polynom stupně $n \geq 1$. Potom číslo α je kořenem $p(x) \iff p(x) = (x - \alpha)q(x)$, kde $q(x)$ je polynom stupně $n - 1$.

Následující věta měla pro celou algebru opravdu základní význam v dobách, kdy se algebra zabývala studiem číselných struktur. Platnost této věty tušili již italské matematikové v 16. století, ale první její správný a úplný důkaz našel teprve K. F. Gauss v roce 1799.

14. Věta (Základní věta algebry) Každý nekonstantní komplexní polynom má v komplexním oboru alespoň jeden kořen.

15. Věta (D'Alembertova věta o rozkladu na kořenové činitele v oboru komplexních čísel)

Pro každý polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ stupně $n \geq 1$ existuje právě n komplexních čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (která od sebe nemusí být různá) takových, že

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n). \quad (1)$$

Uvědomme si jen, že všechna čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou kořeny polynomu $p(x)$.

16. Poznámka Pokud v rozkladu (1) vystupuje stejný činitel $(x - \alpha_i)$ právě k -krát, řekneme, že α_i je k -násobným kořenem polynomu $p(x)$.

17. Příklad Určete kořeny (i jejich násobnost) polynomů v komplexním oboru:

a) $p(x) = x^2 - 2x + 1$;

b) $p(x) = x^4 + x^3$;

c) $p(x) = x^2 + 1$.

Řešení

a) $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, tedy 1 je dvojnásobným kořenem.

b) $p(x) = x^4 + x^3 = x^3(x - 1)$, tedy 0 je trojnásobným kořenem a 1 jednoduchým kořenem.

c) $p(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, tedy jednoduchými kořeny jsou čísla $-i$ a i .

18. Věta Má-li reálný polynom $p(x)$ komplexní kořen $\alpha = a + bi$, pak má i komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha} = a - bi$. Násobnosti obou kořenů jsou stejné.

19. Příklad Určete rozklad reálného polynomu $p(x) = x^2 + x + 1$ v komplexním oboru.

Řešení

Přepíšeme polynom $p(x) = x^2 + x + 1$ jako algebraickou rovnici $x^2 + x + 1 = 0$. Ta má diskriminant $D = -3$, a proto jsou jejím řešením dva kořeny $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ a $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Rozklad polynomu vypadá následovně: $p(x) = x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

20. Příklad Určete polynom nejnižšího stupně tak, aby $\alpha_1 = 0$ byl jednoduchý kořen, $\alpha_2 = -1$ byl dvojnásobný kořen, $\alpha_3 = i$ a $\alpha_4 = -i$.

Řešení

$$p(x) = (x - 0)(x - (-1))^2(x - i)(x - (-i)) = x(x + 1)^2(x - i)(x + i) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x.$$

21. Poznámka Pokud máme určit rozklad reálného polynomu pouze reálném oboru, tak kvadratické trojčleny $x^2 + px + q$ se záporným diskriminantem nerozkládáme.

22. Věta (O rozkladu reálného polynomu v reálném oboru) Nechť $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ je reálný polynom stupně $n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ jsou všechny jeho reálné kořeny, každý s násobností $k_i, i = 1, \dots, r$. Pak rozkladem reálného polynomu v reálném oboru rozumíme vztah

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}, \quad (2)$$

kde $x^2 + p_j x + q_j, j = 1, \dots, s$ jsou nerozložitelné kvadratické trojčleny se záporným diskriminantem, které odpovídají komplexním kořenům.

Platí $k_1 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$.

23. Příklad Rozložte polynomy v reálném oboru:

a) $a(x) = x^4 - 1$;

b) $b(x) = 16x^4 - 9$;

c) $c(x) = x^2 + 2x + 5$;

- d) $d(x) = x^3 + 1$;
 e) $e(x) = x^4 + 1$;
 f) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$.

Řešení

- a) $a(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.
 b) $b(x) = 16x^4 - 9 = 16\left(x^4 - \frac{9}{16}\right) = 16\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 16\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 c) $c(x) = x^2 + 2x + 5$ nelze v reálném oboru rozložit, protože příslušná kvadratická rovnice má $D < 0$.
 d) $d(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.
 e) $e(x) = x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$.
 f) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^2(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + x^3 - 1 = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)^2$.

Funkce reálná racionální lomená

24. Definice Necht' $p(x)$ je reálný polynom stupně m a $q(x)$ nenulový reálný polynom stupně n . Pak funkce

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

se nazývá reálná **racionální lomená funkce**.

Je-li $m < n$, pak mluvíme o **ryze racionální lomené funkci**.

Je-li $m \geq n$, pak mluvíme o **neryze racionální lomené funkci**.

- 25. Příklad** a) $\frac{x^2+1}{x^3-2x-1}$ je ryze racionální lomená funkce (krátce: ryze lomená).
 b) $\frac{x^4+x-2}{x^2-x-1}$ je neryze racionální lomená funkce (krátce: neryze lomená).

26. Poznámka Každá neryze racionální lomená funkce se dá zapsat jako součet polynomu a ryze racionální lomené funkce ve tvaru

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{s(x)}{t(x)}$$

27. Příklad Vyjádřete racionální funkce jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce:

- a) $r(x) = \frac{-4x^2+10x-1}{x^2-3x+6}$;
 b) $r(x) = \frac{2x^5-x^4+3x^2-x+1}{x^2-2x+4}$.

Řešení

Polynomy vydělíme tak, jak jsme zvyklí ze střední školy a výsledek dělení zapíšeme ve tvaru:

- a) $r(x) = -4 + \frac{23-2x}{x^2-3x+6}$;
 b) $r(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x+53}{x^2-2x+4}$.

28. Definice Zlomky tvaru

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \quad \text{a} \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l}, \quad \text{kde } p^2 - 4q < 0$$

nazýváme **parciální zlomky**.

29. Věta (Rozklad ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky)

Každou ryze racionální lomenou funkci $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.

1. Jmenovatel $q(x)$ rozložíme v reálném oboru:

$$q(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}.$$

2. Pak každému faktoru $(x - \alpha_i)^{k_i}$, $i = 1, \dots, r$ odpovídá skupina k_i zlomků ve tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha_i)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{k_i}}{(x - \alpha_i)^{k_i}}$$

a faktoru $(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}$, $j = 1, \dots, s$ odpovídá skupina zlomků ve tvaru

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \cdots + \frac{M_{l_j}x + N_{l_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}}.$$

3. Funkci $r(x)$ zapíšeme pomocí součtu odpovídajících skupin zlomků, kterému se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Na příkladu si ukážeme, jakým způsobem vypočítáme příslušné konstanty A_k , M_l a N_l .

30. Příklad Rozložte na parciální zlomky funkci $r(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2}$.

Řešení

$r(x)$ je ryze lomená racionální funkce.

1. Rozložíme jmenovatel v reálném oboru, tj. $q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 2x + 2)$, kde kvadratický výraz $x^2 - 2x + 2$ má záporný diskriminant.

2. Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar:

$$\frac{x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 - 2x + 2}. \quad (3)$$

3. Určíme konstanty A_1, A_2, M_1, N_1 . Vynásobíme rovnici (3) společným jmenovatelem $x^2(x^2 - 2x + 2)$. Dostaneme

$$x^2 - 2 = A_1x(x^2 - 2x + 2) + A_2(x^2 - 2x + 2) + (M_1x + N_1)x^2. \quad (4)$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin proměnné x na levé a pravé straně rovnice (4) dostáváme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} A_1 + M_1 &= 0 \\ -2A_1 + A_2 + N_1 &= 1 \\ 2A_1 - 2A_2 &= 0 \\ 2A_2 &= -2, \end{aligned}$$

ze které je přímo vidět, že $A_1 = -1$, $A_2 = -1$, $M_1 = 1$, $N_1 = 0$. Tedy rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 2}.$$

31. Příklad Rozložte na parciální zlomky funkci $r(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$.

Řešení $r(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{2}{(x-1)^2}$.

32. Příklad Rozložte na parciální zlomky funkci $r(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^3 + x}$.

Řešení $r(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x}$.

Připomínky a upozornění na chyby laskavě pište na adresu: hoderova@fme.vutbr.cz. Děkuji.