

Základní vlastnosti funkcí

V příkladech 1 až 6 nakreslete grafy příslušných funkcí, určete dále definiční obor a obor hodnot. Grafy nakreslete postupně v jednotlivých krocích pomocí posunutí a překlopení grafů v základním tvaru, tj. bez použití kalkulačky. U každého obrázku vyznačte souřadnicové osy a případné asymptoty a dále průsečíky grafu se souřadnicovými osami.

1. Exponenciální funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 2 - 3^{-(x-1)}, & \text{b) } f(x) = -3^{-x}, & \text{c) } f(x) = |3^{|x+1|} - 5|, \\ \text{d) } f(x) = \pi^{2-x}, & \text{e) } f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{-x-5}, & \text{f) } f(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} - 1\right|, \\ \text{g) } f(x) = |3^{1-x} - 1|, & \text{h) } f(x) = \left|\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{|x+1|} - 5\right|, & \text{i) } f(x) = |2 - 3^{|1-x|}|. \end{array}$$

2. Logaritmická funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \log_{\frac{1}{3}} |x+2| - 1, & \text{b) } f(x) = 1 - \log(-x), & \text{c) } f(x) = |\log |x| - 1| - 1, \\ \text{d) } f(x) = |\log_{\pi}(3-x) - 5|, & \text{e) } f(x) = -\log_{0.3} x, & \text{f) } f(x) = |\log_{\frac{1}{3}}(5-x) - 4| + 2, \\ \text{g) } f(x) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}\right) - 2, & \text{h) } f(x) = \log_5(5^x), & \text{i) } f(x) = 5^{\log_5 x}. \end{array}$$

3. Funkce mocninná:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = |5 - (x-2)^5|, & \text{b) } f(x) = \frac{1}{x-1} + 2, & \text{c) } f(x) = \frac{2x+3}{x+1}, \\ \text{d) } f(x) = \sqrt{x-1} + 2, & \text{e) } f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2, & \text{f) } f(x) = (x+5)^{-\frac{2}{3}} - 1, \\ \text{g) } f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 5, & \text{h) } f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^3} + 3, & \text{i) } f(x) = \sqrt[3]{(x-5)^4}, \\ \text{j) } f(x) = x\sqrt{x}, & \text{k) } f(x) = -1 - \frac{1}{(x+2)^2}, & \text{l) } f(x) = 2 - \sqrt[5]{(x+2)^3}, \\ \text{m) } f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}, & \text{n) } f(x) = \frac{x+5}{2-x}. \end{array}$$

4. Funkce goniometrické:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = |\sin(x-1)| - 2, & \text{b) } f(x) = 1 + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{c) } f(x) = -\frac{3}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right), \\ \text{d) } f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1, & \text{e) } f(x) = 2 - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{f) } f(x) = -\cotg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2. \end{array}$$

5. Funkce cyklometrické:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \left|\frac{\pi}{2} - \arcsin(x-3)\right|, & \text{b) } f(x) = \operatorname{arccotg}(x-2) - 1, & \text{c) } f(x) = 3 - \arccos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \\ \text{d) } f(x) = \sin(\arcsin x), & \text{e) } f(x) = \arcsin(\sin x). \end{array}$$

6. Různé funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = ||x-5| + 1|, & \text{b) } f(x) = \frac{x}{x^2}, & \text{c) } f(x) = \sqrt{x^2}, \\ \text{d) } f(x) = \frac{x}{|x|}, & \text{e) } f(x) = |x-1| + 2|x-2| - |x|, & \text{f) } f(x) = \frac{|x-1|}{1+|x|}, \\ \text{g) } f(x) = \sinh x, & \text{h) } f(x) = \cosh x. \end{array}$$

7. Příklad

Určete definiční obor následujících funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \sqrt{3x-x^3}; & \text{Výsledek: } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}). \\ \text{b) } f(x) = \sqrt{2+x-x^2}; & \text{Výsledek: } \langle -1, 2 \rangle. \\ \text{c) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}; & \text{Výsledek: } \mathbf{R} - \{-2, -3\}. \\ \text{d) } f(x) = \ln(1-e^x); & \text{Výsledek: } (-\infty, 0). \\ \text{e) } f(x) = 5 + e^{\frac{1}{x-2}}; & \text{Výsledek: } x \neq 2. \\ \text{f) } f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e}; & \text{Výsledek: } (0, \infty). \\ \text{g) } f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}; & \text{Výsledek: } \langle 0, \infty \rangle. \\ \text{h) } f(x) = \arccos(2x); & \text{Výsledek: } \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle. \\ \text{i) } f(x) = \arcsin \frac{1}{x}; & \text{Výsledek: } (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle. \\ \text{j) } f(x) = \arcsin(\ln \frac{x}{e}); & \text{Výsledek: } \langle 1, e^2 \rangle. \\ \text{k) } f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; & \text{Výsledek: } \langle -1, 1 \rangle. \end{array}$$

8. Příklad

K dané funkci určete funkci inverzní:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = 3x; & \text{Výsledek: } \frac{x}{3}. \\ \text{b) } f(x) = \frac{x-1}{1-3x}; & \text{Výsledek: } \frac{3x+1}{3x+1}. \end{array}$$

- c) $f(x) = -2x^3$; $Výsledek: -\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$.
 d) $f(x) = \ln \frac{3}{x-1}$; $Výsledek: 1 + 3e^{-x}$.
 e) $f(x) = \sin 2x$; $Výsledek: \frac{1}{2} \arcsin x$.
 f) $f(x) = \frac{1}{x} \sqrt[5]{x^2}$; $Výsledek: x^{-\frac{5}{3}}$.
 g) $f(x) = 1 - 2^{-x}$; $Výsledek: \frac{-\ln(1-x)}{\ln 2}$.

9. Příklad Rozhodněte o sudosti (lichosti) funkce:

- a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; $Výsledek: L$.
 b) $f(x) = 2^x$; $Výsledek: \text{ani S ani L}$.
 c) $f(x) = 2 \sin(x^2) - 17$; $Výsledek: S$.
 d) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$; $Výsledek: L$.
 e) $f(x) = x \ln|x|$; $Výsledek: L$.
 f) $f(x) = 2^{-x} + 2^x$; $Výsledek: S$.
 g) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $Výsledek: S$.

10. Příklad Utvořte složené funkce $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ eventuálně rozhodněte kdy složená funkce neexistuje:

- a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$; b) $f(x) = -x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;
 c) $f(x) = |2x - 1|$, $g(x) = |x - 3|$; d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$;
 e) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$.

11. Příklad Rozhodněte, zda se rovnají funkce $f(x)$ a $g(x)$:

- a) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$; $Výsledek: \text{ano}$.
 b) $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$; $Výsledek: \text{ne}$.
 c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2}$; $Výsledek: \text{ano}$.