Pojem funkce

Miroslav Kureš

$\boxed{1}$ Funkce (zobrazení) byla již definována v tématu *Relace, zobrazení, operace a algebraické struktury*. Budeme se ale zabývat pouze funkcemi

$$f\colon A \to B,$$

kde $A = B = \mathbb{R}$. Takovým funkcím říkáme *reálné funkce (jedné) reálné proměnné* a jsou ústředním pojmem *matematické analýzy* čili *kalkulu*.

Pojem definičního oboru a oboru hodnot byl už také zaveden; připomeňme označení $\operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Im} f$. (Je mj. zřejmé, že $\operatorname{Dom} f = \emptyset$ právě tehdy, když $\operatorname{Im} f = \emptyset$; v takovém případě říkáme, že f je *prázdná funkce*.) Obrazu $f(x)$ říkáme obvykle *funkční hodnota* v x. Stejně tak už máme definovány a do kalkulu přenášíme pojmy injekce, surjekce, bijekce a inverzní funkce (zobrazení). Tedy zopakujme: je-li funkce f injekcí, máme definovánu *inverzní funkci* f^{-1}. Vidíme pak, že

$$\operatorname{Dom}(f) = \operatorname{Im}(f^{-1}), \quad \operatorname{Dom}(f^{-1}) = \operatorname{Im}(f).$$

$\boxed{2}$ Funkci zadáme tak, že stanovíme definiční obor a zadáme *funkční předpis.* [1] Funkčním předpisem se rozumí obvykle buď jeden nebo více explicitních vzorců nebo výčet (tabulka), případně i kombinace obojího. Není-li stanoven definiční obor, rozumí se jím všechny body z $\mathbb{R}$, pro něž mají explicitní vzorce smysl.

$\boxed{3}$ Pokud definiční obor funkce f není prázdná množina, můžeme získat novou funkci tak, že funkční předpis ponecháme, avšak za definiční obor vezmeme nějakou vlastní podmnožinu U množiny $\operatorname{Dom} f$. Vzniklou funkci nazýváme *restrikce* funkce f a značíme $f|_U$.
Naopak, pokud je funkce f restrikcí nějaké funkce g (tzn. definiční obor funkce f není $\mathbb{R}$), nazýváme g *extenze* funkce f. Z dané funkce f získáme tedy g vhodným dodefinováním (tím bývá i rozšíření funkčního předpisu), které obvykle má nějaké námi stanovené vlastnosti.

$\boxed{4}$ Vezměme nyní funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Předpis

$$h(x) = g(f(x))$$

nyní definuje novou funkci $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je-li $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Dom} g = \emptyset$, je h prázdná funkce.

[1] v praxi se totiž zabýváme právě funkcemi zadanými nějakým (relativně) jednoduchým předpisem; není ale od věci si uvědomit, že „drtivá většina“ funkcí by se jednoduchým předpisem popsat nedala

$\boxed{\mathbf{5}}$ Funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *sudá*, pokud splňuje

$$x \in \operatorname{Dom} f \iff -x \in \operatorname{Dom} f \qquad \text{a platí} \qquad f(-x) = f(x).$$

Nazveme ji *lichá*, pokud splňuje

$$x \in \operatorname{Dom} f \iff -x \in \operatorname{Dom} f \qquad \text{a platí} \qquad f(-x) = -f(x).$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *periodická*, jestliže

(i) existuje nenulové reálné číslo p takové, že

$$x \in \operatorname{Dom} f \iff x + p \in \operatorname{Dom} f \qquad \text{a platí} \qquad f(x+p) = f(x)$$

(ii) mezi všemi kladnými čísly p, které splňují (i), existuje nejmenší.

Zmíněné nejmenší kladné p pak nazýváme *perioda* funkce f.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Funkce f se nazývá *zdola omezená* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in U$ je $f(x) \geq a$.
Funkce f se nazývá *shora omezená* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in U$ je $f(x) \leq a$.
Funkce f se nazývá *omezená* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, je-li na U současně zdola omezená a shora omezená.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Funkce f se nazývá *rostoucí* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé dva prvky x_1, x_2 platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *klesající* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé dva prvky x_1, x_2 platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *nerostoucí* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé dva prvky x_1, x_2 platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *neklesající* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé dva prvky x_1, x_2 platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
Funkce f se nazývá *konstantní* na množině $U \subset \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé dva prvky x_1, x_2 platí $x_1 < x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$.
Má-li f na množině U libovolnou z uvedených vlastností, říkáme, že je na U *monotónní*.
Je-li f na množině U rostoucí nebo klesající, říkáme, že je na U *ryze monotónní*.

$\boxed{\mathbf{9}}$ *Dirichletova funkce* χ je definována

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

Snadno ověříme, že $\operatorname{Dom} \chi = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} \chi = \{0, 1\}$, funkce je omezená na $\mathbb{R}$, sudá a není periodická.

$\boxed{\mathbf{10}}$ *Riemannova funkce* ρ je definována

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \text{ racionální vyjádřené ve tvaru } \frac{p}{q}\text{, kde } p, q \text{ jsou nesoudělná, } q > 0 \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ K těmto „podivným“ funkcím (ale užitečným pro další matematické úvahy) přidáme ještě jednu. Předpokládejme jednoznačnost desetinného vyjádření reálného čísla (tzn. nepřipouštějme periodickou devítku). Definujme pak funkci ϕ např. takto:

$$\phi(x) = \begin{cases} k & \text{pro případ, že číslice 7 se vyskytuje v desetinném rozvoji } x \text{ právě } k\text{-krát} \\ -1 & \text{pro případ, že číslice 7 se vyskytuje v desetinném rozvoji } x \text{ nekonečně mnohokrát.} \end{cases}$$

Funkce ϕ nabývá v libovolně malém otevřeném intervalu (a, b) libovolně velkých (přirozených) hodnot, tedy není na žádném (a, b) shora omezená.

*

Text považuji za otevřený dalším úpravám a zlepšením.
Děkuji za všechny Vaše připomínky sdělené osobně nebo zaslané na mou e-mailovou adresu kures@fme.vutbr.cz.