

Vektorový počet

1. Budeme se pohybovat v prostoru \mathbb{R}^n , což je kartézská mocnina množiny reálných čísel \mathbb{R} ;

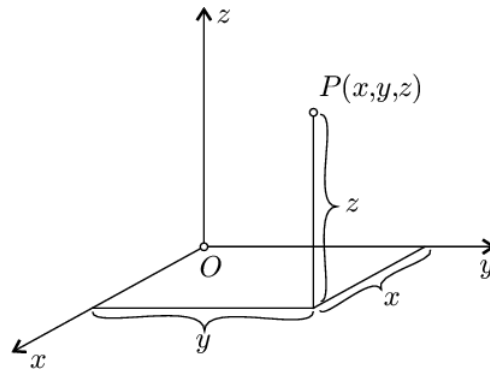
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Obvykle nám bude stačit omezení na případy $n = 1, 2, 3$; nicméně teorie je platná obecně. Prvky \mathbb{R}^n budeme nazývat **body** a značit např.

$$A = [a_1, \dots, a_n],$$

reálná čísla a_1, \dots, a_n pak nazýváme **souřadnice bodu**.

2. Poznámka Polohu obecného bodu P v \mathbb{R}^3 charakterizujeme nejčastěji trojicí souřadnic x, y, z a znázorňujeme jej v pravotočivé soustavě $Oxyz$, viz. Obrázek 1.



Obrázek 1: Význam trojice souřadnic $[x, y, z]$ charakterizujících polohu bodu $P(x, y, z)$ v trojrozměrné pravotočivé soustavě pravoúhlých souřadnic $Oxyz$.

3. Uspořádanou dvojici bodů A, B nazveme **vázaný vektor** v \mathbb{R}^n s **počátkem** v A a s **koncem** v B . Značíme

$$\overrightarrow{AB} = ([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_n]).$$

4. Je zřejmé, že vázaný vektor \overrightarrow{AB} lze zadat i tak, že zadáme bod A a spolu s ním uspořádanou n -tici reálných čísel

$$(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n).$$

Samotnou tuto n -tici pak nazýváme **volný vektor** a značíme

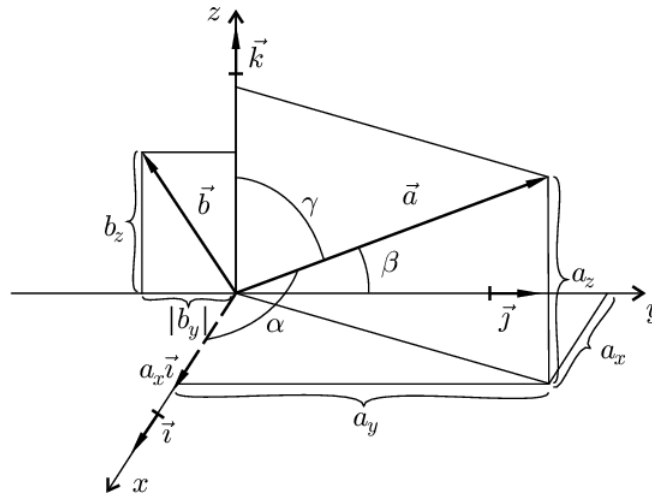
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB};$$

je ovšem jasné, že \vec{u} body A, B neurčuje, protože i jiné body C, D mohou vést k témuž volnému vektoru u .¹ Dále se budeme zabývat volnými vektory.

5. Poznámka Při vyšetřování vztahů mezi vektorovými veličinami s užitím kartézské soustavy souřadnic se zavádějí některé další pojmy a operace. **Kolmé průměty** vektorové veličiny \vec{a} do souřadnicových os se značí a_x, a_y, a_z (viz Obr. 2) a jsou definovány vztahy

$$a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \cos \beta, \quad a_z = a \cos \gamma. \quad (1)$$

¹ přesněji, definujeme zde binární relaci mezi vázanými vektory: řekneme, že dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ patří do relace \mathcal{R} , jestliže $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) = (d_1 - c_1, \dots, d_n - c_n)$; tato relace (protože je ekvivalence) určuje rozklad množiny vázaných vektorů na třídy zvané volné vektory



Obrázek 2: Vyjádření vektorů \vec{a} a \vec{b} pomocí jejich složek a_x, a_y, a_z (resp. $b_x(=0), b_y, b_z$) a jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. V obrázku jsou rovněž vyznačeny úhly, které svírá vektor \vec{a} se souřadnicovými osami.

Tyto veličiny se nazývají rovněž souřadnice vektoru \vec{a} . Ze vztahu (1) plyne $a_x > 0$ pro $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $a_x = 0$ pro $\alpha = \pi/2$, $a_x < 0$ pro $\pi/2 < \alpha \leq \pi$. Užívá se zápisu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Vektor \vec{a} a jeho souřadnice mají stejné jednotky.

Je-li dán vektor svými souřadnicemi, např. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, lze určit jeho velikost a úhly, které svírá se souřadnicovými osami, s užitím vztahů plynoucích z Obrázku 2:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

6. Součet a násobení skalárem Pro volné vektory nyní definujeme operaci **součet** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ vztahem

$$(w_1, \dots, w_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

a operaci **násobení skalárem** $c\vec{u} = \vec{v}$ ($c \in \mathbb{R}$) vztahem

$$(v_1, \dots, v_n) = (cu_1, \dots, cu_n).$$

Množinu volných vektorů na \mathbb{R}^n spolu s těmito operacemi pak nazýváme **vektorový prostor** a značíme \mathbf{V}^n .²

7. Povšimněme si, že volné vektory spolu s binární operací sčítání jsou dalším příkladem grupy, která byla definována v tématu *Relace, zobrazení, operace a algebraické struktury*. Neutrálním prvkem je zde tzv. **nulový vektor**

$$\vec{0} = (0, \dots, 0).$$

8. Definice Řekneme, že vektor \vec{v} je **lineární kombinací** vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$, jestliže ho pro nějaká $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ lze vyjádřit jako

$$\vec{v} = c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_k \vec{u}_k.$$

²poznamenáváme zde, že vůbec není naším cílem budovat obecnou teorii algebraických struktur zvaných vektorové prostory; název vektorový prostor zde tedy užíváme vědomě jen pro právě uvedený příklad

9. Poznámka Pověšimněme si, že nulový vektor $\vec{0}$ je vždy **triviální lineární kombinací** (tj. s $c_1 = \dots = c_k = 0$) libovolných vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$. Někdy je také jejich netriviální kombinací, tzn. alespoň jedno z čísel c_1, \dots, c_k je nenulové.³

To nás vede k následující definici. Řekneme, že vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou **lineárně závislé**, pokud je nulový vektor jejich netriviální lineární kombinací. Pokud tomu tak není, tedy nulový vektor lze obdržet pouze jako triviální lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$, nazveme tyto vektory **lineárně nezávislé**.

10. V prostoru \mathbf{V}^n lze vybrat nejvýše n lineárně nezávislých vektorů; množina n lineárně nezávislých vektorů se nazývá **báze** \mathbf{V}^n .

Lze sice vybrat nekonečně mnoho bází \mathbf{V}^n , jednu však preferujeme: je to tzv. **kanonická báze**:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\ &\dots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

Pověšimněme si, že vektory kanonické báze $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ zapsané jako řádky matice dávají jednotkovou matici E ; obecně, vektory libovolné báze představují vždy regulární matici.

11. Poznámka Jednotkové vektory ve směru souřadnicových os Ox, Oy, Oz v \mathbb{R}^3 budeme obvykle značit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tyto vektory jsou navzájem kolmé (viz Obrázek 2) a platí pro ně $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Vektory $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ o velikostech $|a_x|, |a_y|, |a_z|$ se nazývají složky vektoru \vec{a} v souřadnicových osách. Platí pro ně tzv. **semikartézské vyjádření vektoru \vec{a}**

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (2)$$

12. Předpokládejme, že vektor \vec{u} má souřadnice v obvyklé, tedy kanonické bázi. Uvažujme jinou bázi $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, zapsanou řádkově do matice ji označme A . Vektor \vec{u} v této bázi budeme označovat \vec{u}_A . Zřejmě platí (vektory \vec{u}, \vec{u}_A píšeme sloupcově)

$$A\vec{u}_A = E\vec{u}$$

a tedy

$$\vec{u}_A = A^{-1}\vec{u}.$$

13. Ještě obecněji, předpokládejme, že vektor \vec{u}_B je vyjádřen v bázi (maticově) B a chceme jej vyjádřit v bázi A . Postupem analogickým předchozímu odstavci zjistíme, že

$$\vec{u}_A = A^{-1}B\vec{u}_B.$$

Matici $A^{-1}B$ nazýváme **matice přechodu** od báze B k bázi A .⁴

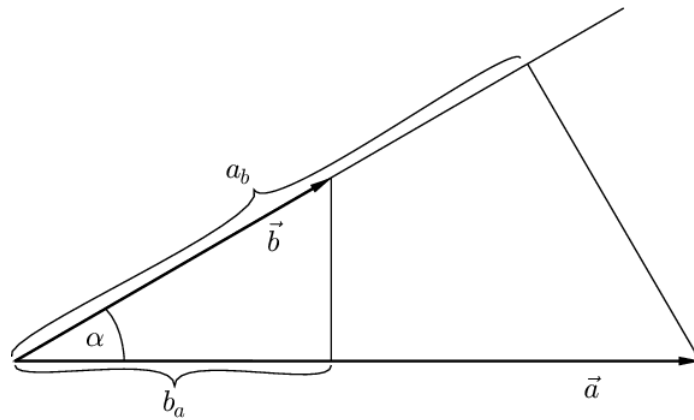
14. Skalární součin Na \mathbf{V}^n lze zavést další operaci: **skalární součin** $\vec{u} \cdot \vec{v} = c$ ($c \in \mathbb{R}$) definujeme vztahem

$$c = u_1v_1 + \dots + u_nv_n.$$

Vektorový prostor \mathbf{V}^n s takto zavedeným skalárním součinem nazýváme **euklidovský prostor** a značíme \mathbf{E}^n .⁵

15. Geometrický význam skalárního součinu Skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dvou (libovolných) vektorových veličin \vec{a}, \vec{b} je skalární veličina c daná vztahem

$$c(= \vec{a} \cdot \vec{b}) = ab \cos \alpha, \quad (3)$$



Obrázek 3: Geometrický význam skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha (= a_b b = b_a a)$.

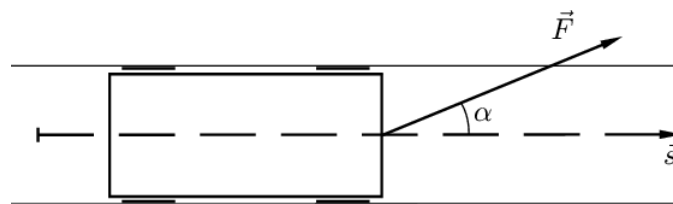
kde α je dutý nebo přímý úhel sevřený vektory a, b (viz Obrázek 3).

16. Příklad Vagón je tažen na přímém úseku délky $s = 20$ m lanem, které svírá se směrem rychlosti vagonu úhel $\alpha = 20^\circ$ a které je napínáno silou o velikosti $F = 800$ N. Vyjádřete práci W vykonanou silou \vec{F} pomocí skalárního součinu a vypočítejte ji.

Řešení Zavedeme vektor \vec{s} podle Obrázku 4. Pak

$$W = F_s s = F \cdot (\cos \alpha) \cdot s = \vec{F} \cdot \vec{s},$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha = 800 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} \cdot \cos 20^\circ = 1,50 \cdot 10^4 \text{ J}.$$



Obrázek 4: K příkladu 16.

17. Vektorový součin Dále, definujme pro $n > 1$ na \mathbf{V}^n tzv. **vektorový součin** jako $(n-1)$ -ární operaci přiřazující vektorům $\vec{u}_1 = (u_{11}, \dots, u_{1n}), \dots, \vec{u}_{n-1} = (u_{(n-1)1}, \dots, u_{(n-1)n})$ vektor $\vec{w} = \vec{u}_1 \times \dots \times \vec{u}_{n-1}$ jako determinant

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \dots & u_{(n-1)n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \end{vmatrix},$$

kde $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ jsou vektory kanonické báze.

Pro $n = 2$ jde o unární operaci, která vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ přiřadí vektor $\vec{w} = u_1(0, 1) - u_2(1, 0) = (-u_2, u_1)$.

Pro $n = 3$ jde o binární operaci, která vektorům $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ přiřadí vektor $\vec{w} = u_1 v_2(0, 0, 1) + u_2 v_3(1, 0, 0) + u_3 v_1(0, 1, 0) - u_1 v_3(0, 1, 0) - u_2 v_1(0, 0, 1) - u_3 v_2(1, 0, 0) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

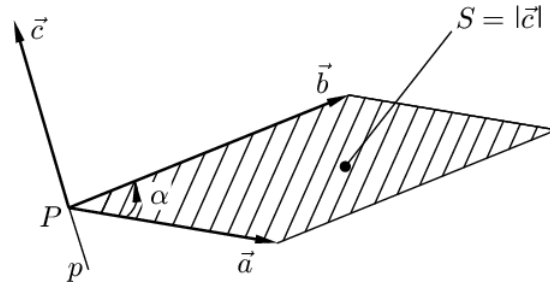
³je-li např. $k = 2$, $\vec{u}_1 = \vec{u}$ a $\vec{u}_2 = -\vec{u}$, vztah je splněn pro libovolné $c_1 = c_2 = c \in \mathbb{R}$

⁴v této důležité úloze aplikujeme tedy jak výpočet inverzní matice, tak součin matic

⁵skalární součin lze zavést i jiným způsobem, tomu se ale zde nevěnujeme

18. Poznámka Doporučujeme čtenáři hlouběji se seznámit s vlastnostmi operace vektorového součinu.⁶ Důležitým výsledkem⁷ dále je, že skalární součin vektoru $\vec{w} = \vec{u}_1 \times \cdots \times \vec{u}_{n-1}$ s libovolným z vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ je vždy nulový.

19. Geometrický význam vektorového součinu Vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ dvou (libovolných) vektorových veličin \vec{a}, \vec{b} je vektorová veličina \vec{c} , kterou je graficky možno znázornit tak, že oba vektory \vec{a}, \vec{b} umístíme do jednoho (libovolného) bodu (bod P v Obrázku 5).



Obrázek 5: Geometrický význam vektorového součinu $\vec{a} \times \vec{b}$.

Pro vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ platí:

1. Velikost:

$$|\vec{c}| = ab \sin \alpha,$$

tj. platí, že velikost vektoru \vec{c} je rovna plošnému obsahu kosodélníka vyšrafovaného v Obrázku 5, kde α je tupý nebo přímý úhel sevřený vektory \vec{a}, \vec{b} .

2. Směr je kolmý na rovinu danou vektory \vec{a}, \vec{b} tak, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v uvedeném pořadí) tvoří pravotočivý trojhran (nebo: pravotočivý šroub — otáčení kolem přímky p od \vec{a} do \vec{b} nejkratší cestou, vektor \vec{c} má směr postupu šroubu) — viz Obrázek 5.

20. Příklad Na elektricky nabitou částici o náboji Q , pohybující se rychlostí \vec{v} v magnetickém poli o magnetické indukci \vec{B} , působí magnetická síla $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$. Volte libovolně vektory \vec{v}, \vec{B} a zakreslete směr \vec{F} pro $Q > 0$ a pro $Q < 0$.

21. Příklad Síla \vec{F} působící na těleso v bodě P vyvozuje vzhledem k počátku souřadnic otáčivý moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kde \vec{r} je polohový vektor bodu P (viz Obrázek 6).

22. Příklad Na konci tyče délky l působí síla $\vec{F} \uparrow \uparrow Ox$ podle Obrázku 7. Určete otáčivý moment síly \vec{F} vzhledem k počátku O . (Pozn.: symbolem $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ vyjadřujeme, že vektory \vec{a}, \vec{b} jsou souhlasně rovnoběžné, tj. paralelní. Symbol $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ vyjadřuje, že vektory \vec{a}, \vec{b} jsou nesouhlasně rovnoběžné, tj. antiparalelní).

Řešení $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Vektor \vec{M} zakreslíme v bodě O , směr je zřejmý z Obrázku 7. Platí

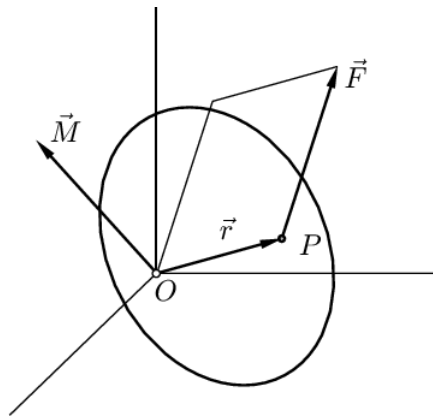
$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2}lF.$$

23. Pojmy Pro $n > 1$ na \mathbf{V}^n definujeme také tzv. **vnější součin** jako n -ární operaci přiřazující vektorům $\vec{u}_1 = (u_{11}, \dots, u_{1n}), \dots, \vec{u}_n = (u_{n1}, \dots, u_{nn})$ determinant (tedy číslo)

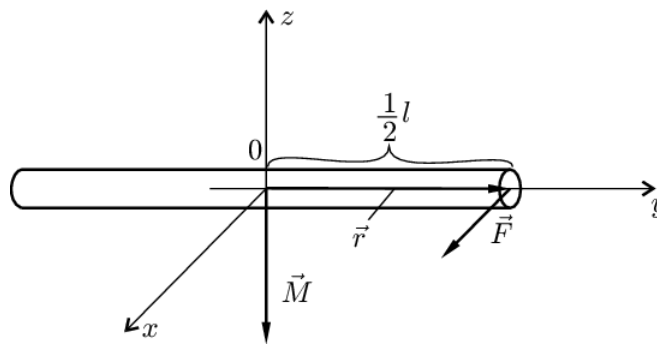
$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

⁶tato operace je mj. pro $n = 3$ antikomutativní: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

⁷dokáže se přímým výpočtem



Obrázek 6: Příklad užití vektorového součinu: otáčivý moment \vec{M} síly \vec{F} působící na těleso v bodě P , jehož polohový vektor je \vec{r} , je roven $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.



Obrázek 7: K příkladu 22.

Absolutní hodnota vnějšího součinu vyjadřuje objem n -rozměrného rovnoběžnostěnu s vrcholy O (počátek), $O + \vec{u}_1$, $O + \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, \dots , $O + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n$. V prostoru \mathbf{V}^2 jde o obsah rovnoběžníka. V prostoru \mathbf{V}^3 jde o objem rovnoběžnostěnu.⁸

24. Pojmy Na \mathbf{E}^n dále definujeme **velikost** $|\vec{u}|$ vektoru \vec{u} vztahem

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \vec{u}}$$

(odmocnina skalárního součinu vektoru se sebou samým). Takto zavedená velikost mj. splňuje tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

25. Pojmy Můžeme dále na \mathbf{E}^n zavést **úhel** dvou nenulových vektorů \vec{u} a \vec{v} jako číslo $\phi \in [0, \pi)$, pro něž

$$\cos \phi = \frac{\vec{u} \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}.$$

⁸pro úplnost ještě uvedme alternativní možnost: pokud v prostoru \mathbf{V}^3 vynásobíme dva vektory \vec{u} , \vec{v} vektorově a výsledek pak s třetím vektorem \vec{w} skalárně, obdržíme tzv. **smíšený součin** tří vektorů; ten splývá s vnějším součinem: tedy jeho absolutní hodnota udává objem rovnoběžnostěnu s hranami představovanými vektory \vec{u} , \vec{v} a \vec{w}

Zřejmě $\phi = \frac{\pi}{2}$ nastává právě tehdy, když skalární součin \vec{u} a \vec{v} je nulový; takové vektory tedy nazýváme **kolmé**.⁹

26. Pojmy Pro vektory \vec{u} a \vec{v} v \mathbf{E}^3 svírající úhel ϕ pak např. platí

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \phi,$$

jak si čtenář může nyní dokázat.

Text považuji za otevřený dalším úpravám a zlepšením. Děkuji za všechny Vaše připomínky sdělené osobně nebo zasláné na mou e-mailovou adresu kures@fme.vutbr.cz.

⁹a viz nyní znovu Poznámka 18