

# Gaussova eliminační metoda

Robert Mařík a Lenka Baráková

4. září 2005

# Obsah

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy  $A_r$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

- Jako klíčový řádek zvolíme řádek poslední.
- Tento řádek napíšeme jako první.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$R_3 - R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-4)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \end{array} \right)$$

$$R_2 - 4R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(-6)} \end{array}$$

$$R_1 - 6R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude novým klíčovým řádkem.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array} \right)$$

$$-2R_2 + R_3 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right)$$

$$-2R_2 + R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \end{array} \right)$$

- První dva řádky zůstanou.
- Třetí řádek bude novým klíčovým řádkem a zůstane také.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-R_3 + R_4 = \dots$$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Rozšířená matice soustavy je řádkově ekvivalentní modré matici, která je ve schodovitém tvaru.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow 2x_4 = -2$$

- Soustava má řešení, neboť  $h(A) = h(A_r) = 4$ . Navíc  $n = 4$  (počet neznámých) a soustava má tedy jediné řešení (nula parametrů).
- Začneme dopočítávat neznámé. Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku ...

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

a řešíme vzhledem k  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

Napišeme rovnici odpovídající předposlednímu řádku.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

Dosadíme  $x_4 = -1 \dots$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

a řešíme vzhledem k  $x_3$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

Napišeme rovnici odpovídající druhému řádku.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

Dosadíme  $x_4 = -1$  a  $x_3 = 1 \dots$

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

a vyřešíme vzhledem k  $x_2$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

Dosadíme  $x_3 = 1$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

$$x_1 = 2$$

Najdeme  $x_1 = 2$ .

Řešte soustavu

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$2x_4 = -2$$

$$x_4 = -1$$

$$-3x_3 + 7x_4 = -10$$

$$-3x_3 - 7 = -10$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 - 2 + 1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 1 = 3$$

$$x_1 = 2$$

Jediné řešení je  $[x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1]$ .

Vypočítali jsme všechny neznámé.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Druhý řádek bude klíčový a opíšeme jej na první místo.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-3) \\ \\ \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \end{array} \right)$$

Upravíme první řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \\ \sim \\ \sim \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Upravíme třetí řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-2) \\ \sim \\ \sim \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

Upravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

- První řádek zůstane.
- Červený řádek bude nový klíčový řádek a napíšeme jej jako druhý.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \end{array} \right)$$

Upravíme druhý řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right)$$

Upravíme poslední řádek.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \div 6 \\ \div 7 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Modré řádky můžeme vydělit čísly 6 a 7.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 6 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & -8 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí dále pracovat jenom s jedním z nich.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

- Rozšířená matice soustavy má hodnost 3, matice soustavy také. Systém proto má řešení.
- Počet parametrů je

$$\text{neznámé} - \text{hodnost} = 5 - 3 = 2.$$

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

Napíšeme rovnici příslušnou poslednímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

- Jsou zde dvě neznámé, ale jenom jedna rovnice. Jednu z neznámých volíme rovnu parametru.
- Buď tedy  $x_5 = t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo. Vypočteme  $x_4$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

Napíšeme rovnici odpovídající dalšímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

Dosadíme za  $x_4$  a  $x_5$ . Zůstává pouze neznámá  $x_2$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Nalezneme  $x_2$ . Dostáváme  $2x_2 = -2 - 2t + 1 + 2t$  a odsud určíme  $x_2$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

Napišeme rovnici odpovídající prvnímu řádku.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

1

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

- Dosadíme. Po dosazení zůstanou neznámé  $x_1$  a  $x_3$ . Jedna z těchto neznámých musí být parametr.
- Volme např.  $x_3 = u$ , kde  $u$  je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

Vypočteme  $x_1$ .

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_1 = 2 - 2u$$

Řešení je  $[2 - 2u, -\frac{1}{2}, u, 2t - 1, t]$ , kde  $t$  a  $u$  jsou parametry.

Řešte soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 5$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$x_4 - 2x_5 = -1$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = 2t - 1$$

$$2x_2 + x_4 - 2x_5 = -2$$

$$2x_2 + (2t - 1) - 2t = -2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_3 - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_3 = u$$

$$x_1 + 2u - (2t - 1) + 2t = 3$$

$$x_1 = 2 - 2u$$

Řešení je  $[2 - 2u, -\frac{1}{2}, u, 2t - 1, t]$ , kde  $t$  a  $u$  jsou parametry.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Druhý řádek bude klíčový, protože  $a_{21} = 1$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \end{array} \right)$$

$$(-2)R_2 + R_1$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \end{array} \right)$$

$$(-3)R_2 + R_3$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$(-1)R_2 + R_4$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
  
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Dalším klíčovým řádkem bude poslední řádek, protože  $a_{42} = 1$  je lepší než  $a_{22} = a_{32} = -2$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$$2R_4 + R_2$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right)$$

$$2R_4 + R_3$$

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

První dva řádky zůstanou.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \div 5 \\ \div 8 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Poslední řádky můžeme vydělit.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a stačí uvažovat pouze jeden z nich.  
Vynecháme tedy poslední řádek.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- Rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru.
- $h(A) = 3, h(A_r) = 3, n = 4$
- Soustava má nekonečně mnoho řešení s jedním parametrem.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow x_4 = 1$$

Napíšeme rovnici odpovídající poslednímu řádku. Tím známe  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

Napíšeme rovnici odpovídající prostřednímu řádku.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

- Ze dvou neznámých bude jedna rovna parametru.
- Necht' například  $x_3 = t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

Nalezneme  $x_2$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

Pokračujeme k další rovnici.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

Dosadíme za  $x_2$ ,  $x_3$  a  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

Upravíme.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

Upravíme.

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

$$x_1 = 3t - 3$$

Nalezneme  $x_1$ .

Řešte soustavu

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 + 2(3 - 2t) + t - 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 - 4t + t + 4 = 1$$

$$x_1 - 3t = -3$$

$$x_1 = 3t - 3$$

Řešení je

$$x_1 = -3 + 3t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = 1$$

kde  $t \in \mathbb{R}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Napišeme rozšířenou matici soustavy.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Zvolíme klíčový řádek (s jedničkou na začátku a nejnižšími ciframi na dalších pozicích). Tento řádek opíšeme jako první.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek  $a_{11}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-5} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek  $a_{31}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Vynulujeme prvek  $a_{41}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \div 4 \\ \div 2 \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

První dva řádky opišeme, poslední dva vydělíme společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek opíšme, druhý řádek bude klíčový a opíšme jej také.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$
  
$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

*Note: In the original image, a blue arrow points from the element '0' in the 6th row, 6th column of the first matrix to the element '-1' in the 6th row, 6th column of the second matrix.*

Nulujeme  $a_{32}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Nulujeme  $a_{42}$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \div 2 \\ \div 3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vydělíme poslední dva řádky společným dělitelem všech čísel v řádku.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední dva řádky jsou shodné a stačí uvažovat pouze jeden z nich.  
Tím je matice převedena do schodovitého tvaru.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3 = h(A_r)$$

$$n = 5, \quad 2 \text{ parametry}$$

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Uvažujeme matici ve schodvitém tvaru.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

Přepíšeme poslední řádek jako klasickou rovnici.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

Protože neznámé v jedné rovnici jsou dvě, musí se jedna z nich rovnat parametru. Necht' například  $x_5$  je parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Dosadíme parametr a vypočteme  $x_4$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

Přepíšeme další řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

Dosadíme všechno co jsme vypočetli dříve.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

Zůstaly dvě neznámé, jedna z nich musí být parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

Dosadíme parametr.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

Vypočteme  $x_2$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

Přepíšeme zbývající řádek do tvaru rovnice.

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t = 0$$

$$x_1 = s + 3t$$

Dosadíme vypočtené hodnoty a vyjádříme  $x_1$ .

Řešte soustavu

$$x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$-x_4 - x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$-x_4 - t = 0$$

$$x_4 = -t$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_2 - x_3 + 4(-t) + t = 0$$

$$x_3 = s$$

$$-x_2 - s - 3t = 0$$

$$x_2 = -s - 3t$$

$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + (-s - 3t) - (-t) - t = 0$$

$$x_1 = s + 3t$$

Soustava je vyřešena.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek bude klíčový řádek.

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\
 \text{Řešte soustavu} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\
 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\
 & x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0
 \end{array}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0
 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0
 \end{array} \right)$$

Druhý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Čtvrtý řádek zůstává, má už nulu na začátku.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední řádek zůstává, má už nulu na začátku.

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\
 \text{Řešte soustavu} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\
 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\
 & x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0
 \end{array}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

První řádek zůstane a druhý řádek bude nový klíčový řádek.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední řádek již má dvě nuly na začátku a ponecháme jej tedy beze změny.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Poslední dva řádky jsou stejné a jeden z nich lze vynechat. První tři řádky zůstanou a třetí z nich bude nový klíčový řádek.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\
 \text{Řešte soustavu} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\
 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\
 & x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0
 \end{array}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \\
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Matice je ve schodovitém tvaru,  $h(A) = h(A_r) = 4$  a soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na  $(5 - 4) = 1$  parametru.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Řešte soustavu  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\
 \text{Řešte soustavu} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\
 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\
 & x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0
 \end{array}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0
 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\
 \text{Řešte soustavu} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\
 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\
 & x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0
 \end{array}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0
 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + t + (-t) + (-t) = 0$$

$$x_1 = t$$

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\
 \text{Řešte soustavu} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \\
 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\
 & x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0
 \end{array}$$

$$A_r \sim \left( \begin{array}{ccccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0
 \end{array} \right)$$

$$4x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 = t$$

$$x_4 = -t$$

$$x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 - 2(-t) - t = 0$$

$$x_3 = -t$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + (-t) + (-t) + t = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + t + (-t) + (-t) = 0$$

$$x_1 = t$$

KONEC