

Soustavy lineárních rovnic

Se soustavami lineárních rovnic a jejich řešením je možné se v určitých jednoduchých případech setkat již na střední škole. Ukážeme si jednu praktickou metodu řešení obecných soustav lineárních rovnic a jednu metodu pro čtvercové matice.

1. Definice Nechtě a_{ij}, b_i jsou reálná čísla. Pak soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$

se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**.

Číslo a_{ij} se nazývá **koefficient** v i -té rovnici u j -té neznámé.

Číslo b_i se nazývá **absolutní člen** i -té rovnice.

2. Maticový zápis Soustavu (1) lze zapsat i v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T. \quad (2)$$

\mathbf{A} se nazývá **matice soustavy** (1).

\mathbf{x} se nazývá **vektor neznámých**.

\mathbf{b} se nazývá **vektor pravých stran** (sloupec absolutních členů).

3. Rozšířená matice soustavy Při výpočtech je praktické k matici soustavy \mathbf{A} připsat i vektor pravých stran \mathbf{b} a oddělit jej svislou čarou. Taková matice

$$\mathbf{A}|\mathbf{b}^T = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy** (1)

Nyní si uvedeme důležitou větu, která nám umožní rozhodnout o řešitelnosti či neřešitelnosti soustavy lineárních rovnic, aniž bychom hledali její řešení.

4. Věta (Frobeniova věta) Soustava lineárních rovnic (1) je řešitelná právě když hodnota matice \mathbf{A} této soustavy je rovna hodnotě rozšířené matice $\mathbf{A}|\mathbf{b}^T$ této soustavy, tj. $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$.

5. Poznámka Frobeniova věta je jednoduchým a elegantním kritériem řešitelnosti soustav lineárních rovnic, ovšem v případě řešitelné soustavy neříká nic o počtu řešení ani o tom, jak všechna řešení vypadají. Uvědomme si, že může nastat právě jeden z těchto tří případů:

- soustava nemá žádné řešení (tzn. je neřešitelná);
- soustava má jediné řešení;
- soustava má nekonečně mnoho řešení.

Ve speciálním případě, kdy je matice \mathbf{A} řádu n (tj. rovnic je stejný počet jako neznámých) a matice \mathbf{A} je regulární (tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$) nám k určení řešení poslouží Cramerovo pravidlo uvedené v následující větě.

6. Věta (Cramerovo pravidlo) Nechtě je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy \mathbf{A} je regulární. Pak soustava má jediné řešení (x_1, x_2, \dots, x_n) , přičemž

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

kde \mathbf{A}_j je matice vzniklá z matice \mathbf{A} nahrazením j -tého sloupce sloupcem absolutních členů.

7. Poznámka Cramerovo pravidlo má spíše teoretický význam, protože je numericky poměrně náročné. Na druhou stranu však umožňuje přímý výpočet jednotlivých neznámých, což může být někdy výhodné.

8. Příklad Cramerovým pravidlem určete řešení soustavy. Nejprve ověřte, že je matice \mathbf{A} regulární!

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Řešení

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 12 \neq 0,$$

a proto je matice \mathbf{A} regulární.

Spočteme si determinanty matic, ve kterých bude sloupec absolutních členů postupně nahrazovat sloupec koeficientů:

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 12 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 12 - (-3) \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 = 24,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36, \quad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60.$$

Tedy

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{24}{12} = 2, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{36}{12} = 3, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{60}{12} = 5$$

a soustava má jediné řešení $(2, 3, 5)$.

Dříve než si uvedeme další metodu řešení soustavy lineárních rovnic, připomeňme si, jaké jsou ekvivalentní úpravy soustavy rovnic (1), kterými neovlivníme množinu řešení.

9. Věta Nechť je dána soustava lineárních rovnic (1). Pak následující úpravy jsou **ekvivalentními úpravami soustavy** (1):

1. libovolná záměna pořadí rovnic;
2. vynásobení libovolné rovnice *nenulovým* číslem;
3. k jedné rovnici přičtení jiné rovnice vynásobené libovolným číslem;
4. vypuštění rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic.

Při provádění ekvivalentních úprav dané soustavy lineárních rovnic není nutné stále opisovat celou soustavu i s neznámými, ale zřejmě stačí pracovat s její rozšířenou maticí soustavy. Uvědomme si, že pak provádění úprav 1.–4. na dané soustavě, je ekvivalentní provádění elementárních řádkových úprav na její rozšířené matici soustavy.

Na této úvaze je založena další metoda, jejíž princip spočívá v tom, že danou soustavu lineárních rovnic převedeme na „jednodušší“ soustavu. Její řešení bude možno víceméně ihned vypsát.

10. Gaussova eliminační metoda Nechť je dána soustava lineárních rovnic (1). Pak ekvivalentními úpravami z Věty 9 převedeme soustavu (1) na soustavu (1'), jejíž rozšířená matice soustavy je ve schodovitém tvaru. Nechť soustava (1') má nyní $s \leq m$ rovnic. Potom:

- a) vyskytne-li se v (1') rovnice, v níž všechny koeficienty jsou nulové a absolutní člen je od nuly různý (tedy řádek vypadající například takto: $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 8$), pak soustava (1'), a tedy i soustava (1) **nemá řešení**;

- b) má **jediné řešení**, je-li $s = n$. Toto řešení spočítáme postupným dosazováním ze soustavy (1');
 c) má **nekonečně mnoho řešení**, je-li $s < n$. V tomto případě (opět postupným dosazováním z (1')) vyjádříme jistých s neznámých pomocí zbývajících $(n - s)$ neznámých, které se nazývají **volné neznámé**.

Ilustrujme si nyní Gaussovu metodu řešení soustavy lineárních rovnic na několika typických příkladech.

11. Příklad Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ - & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

Řešení Napíšeme rozšířenou matici této soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na schodovitý tvar. Navíc vypouštíme řádky, které jsou lineární kombinací ostatních řádků (pokud se takové vyskytnou)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

I když poslední matice ještě není formálně upravena na schodovitý tvar, vidíme, že daná soustava nemá řešení, neboť ve třetím řádku poslední matice jsou všechny koeficienty u neznámých nulové, kdežto absolutní člen je od nuly různý.

12. Příklad Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 \end{array}$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Tedy z poslední rovnice plyne, že $2x_3 = 3$, neboli $x_3 = \frac{3}{2}$. Dále z předposlední rovnice dostáváme přímo, že $x_2 = 1$. A konečně z první rovnice $x_1 = -1 + 2x_2 - x_3$ po dosazení za x_2 a x_3 dostaneme, že $x_1 = -\frac{1}{2}$. Daná soustava má tedy jediné řešení: $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

13. Příklad Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Tedy dostáváme soustavu, v níž budou dvě volné neznámé (zřejmě kterékoliv dvě z neznámých x_1, x_2, x_4 , nikoliv však neznámá x_3). Zvolíme-li za volné neznámé např. neznámé x_2, x_4 , pak lehce vypočteme, že $x_3 = 2$, $x_1 = 2x_2 - x_4$.

Tedy položíme-li $x_2 = t$, $x_4 = s$, pak daná soustava má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $(2t - s, t, 2, s)$, kde t, s jsou libovolná čísla.

14. Poznámka Má-li soustava lineárních rovnic nekonečně mnoho řešení, pak z Gaussovy eliminační metody vyplývá pouze to, kolik neznámých volíme za volné neznámé, nikoliv však, které neznámé to jsou. Může se totiž stát, že některou neznámou nesmíme volit za volnou neznámou nebo naopak, některou neznámou musíme volit za volnou neznámou.

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Speciálním případem soustav lineárních rovnic jsou soustavy s nulovými absolutními členy na pravé straně.

15. Definice Necht' a_{ij} jsou reálná čísla. Pak soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

se nazývá **homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých**.

16. Poznámka Protože rozšířená matice soustavy (3), kterou označíme opět $\mathbf{A}|\mathbf{b}^T$, vznikla z matice \mathbf{A} přidáním sloupce skládajícího se ze samých nul, je zřejmě $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$, a tedy podle Frobeniovy věty 4 je homogenní soustava (3) **vždy řešitelná**.

Evidentně je vždy řešením soustavy (3) uspořádaná n -tice $(0, 0, \dots, 0)$. Toto řešení se nazývá **nulové řešení**.

Vidíme tedy, že homogenní soustava lineárních rovnic (3) má buď jediné řešení (nulové) anebo má nekonečně mnoho řešení (tj. kromě nulového i nenulová řešení).

17. Příklad Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Tedy položíme-li $x_3 = t$, $x_4 = s$, pak daná soustava má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $(-3t + s, t - s, t, s)$, kde t, s jsou libovolná čísla.