

Hodnost matice

Robert Mařík a Lenka Baráková

3. září 2005

Obsah

Najděte hodnotu matice A	3
Najděte hodnotu matice B	15

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Řádek R_1 bude klíčový.
- Zůstane jako první a pomocí něj budeme nulovat zbylá čísla v prvním sloupci.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{21} . Provedeme $-3R_1 + R_2$.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek b_{31} . Provedeme $R_1 + R_3$.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvek a_{41} je nulový a tento řádek tedy stačí pouze opsat.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- První řádek (původně klíčový) zůstane.
- Červeně označený řádek obsahuje jedničku na začátku a zvolíme jej jako další klíčový řádek. To je nejšikovnější, protože $a_{42} = 1$, zatímco $a_{22} = -5$ a $a_{23} = 4$.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{22} . Provedeme $5R_4 + R_2$.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Vynulujeme prvek a_{32} . Provedeme $-4R_4 + R_2$.

Najděte hodnotu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Poslední řádek můžeme vydělit číslem 18.
- Ostatní řádky zůstanou.

Najděte hodnotu matice A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

- První dva řádky zůstanou.
- Prvek $a_{34} = -1$ je šikovnější pro další úpravy, než $a_{33} = 26$. Proto jako další klíčový volíme řádek R_4 .

Najděte hodnotu matice A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 26 \\ \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

Vynulujeme prvek a_{33} . Provedeme $26R_4 + R_3$.

Najděte hodnotu matice A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 4 \end{aligned}$$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má čtyři řádky. Hodnota je čtyři.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

- Zvolíme červený řádek jako klíčový.
- Tento řádek zůstává a píšeme ho jako první.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ (-3) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2R_1 - 3R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \sim \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2R_3 - 3R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_4 - R_2 = \dots$$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

První řádek zůstává.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Další klíčový řádek bude jeden z červených řádků.
- Protože by vytváření dalších nul bylo složitější, uděláme mezikrok – vytvoříme nejprve jedničku.
- Druhý řádek ponecháme na svém místě.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zvolíme červený řádek jako klíčový a provedeme $R_2 - R_3 = \dots$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A blue arrow points from the element 5 in the second row, fifth column of the second matrix to the element 5 in the third row, fifth column of the third matrix, with the label (-1) next to it.

Vytvoříme jedničku i v dalším řádku: $R_2 - R_4 = \dots$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Řádek R_3 je násobkem řádku R_4 .
- Jeden z nich můžeme tedy odstranit.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Odstranili jsme třetí řádek.
- První řádek zůstává.
- Nový klíčový řádek bude řádek s jedničkou. Píšeme jej jako druhý.

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vytvoříme nulu místo čísla -5 . Provedeme tedy $5R_3 + R_2 = \dots$

Najděte hodnotu matice B .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3$$

- Matice je ve schodovitém tvaru.
- Schodovitý tvar má tři řádky.
- $h(A) = 3$.

KONEC