

Hodnost matice

1. Definice Necht \mathbf{A} je matice typu (m, n) . Pak **hodnost matice \mathbf{A}** je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice značíme $h(\mathbf{A})$.

2. Poznámka Ujasněme si, co rozumíme pod pojmem lineárně nezávislé řádky. Představme si řádky matice \mathbf{A} typu (m, n) jako vektory $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_m$. Řekneme, že vektory $\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_m$ (tj. řádky matice) jsou **lineárně závislé**, jestliže existují čísla t_1, \dots, t_m z nichž alespoň jedno je různé od nuly tak, že

$$t_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + \dots + t_m \vec{\mathbf{a}}_m = \vec{\mathbf{0}}.$$

V opačném případě říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Dříve než se budeme zabývat praktickým výpočtem hodnosti matice, připomeňme si, jaké jsou elementární řádkové úpravy matice \mathbf{A} :

3. Věta Necht \mathbf{A} je matice typu (m, n) . Pak každá z následujících úprav matice \mathbf{A} se nazývá **elementární řádková úprava**:

1. libovolná záměna pořadí řádků;
2. vynásobení libovolného řádku *nenulovým* číslem;
3. k jednomu řádku přičtení jiného řádku vynásobeného libovolným číslem;

4. Věta Provedením libovolné elementární řádkové úpravy se hodnost matice \mathbf{A} nezmění.

Z předchozích úvah vyplývá, že při praktickém zjišťování hodnosti dané matice bude zřejmě výhodné pomocí elementárních řádkových úprav převést matici na nějaký „jednoduchý tvar“, z něhož bude hodnost přímo vidět. Tento „jednoduchý tvar“ popisuje následující definice.

5. Definice Necht \mathbf{A} je matice typu (m, n) . Řekneme, že \mathbf{A} je **matice ve schodovitém tvaru**, jestliže v matici \mathbf{A} každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

6. Věta Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na schodovitý tvar.

7. Věta **Hodnost matice** ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

8. Příklad Určete hodnost matice \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 3.$$

9. Příklad Určete hodnost matice \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{B}) = 2.$$