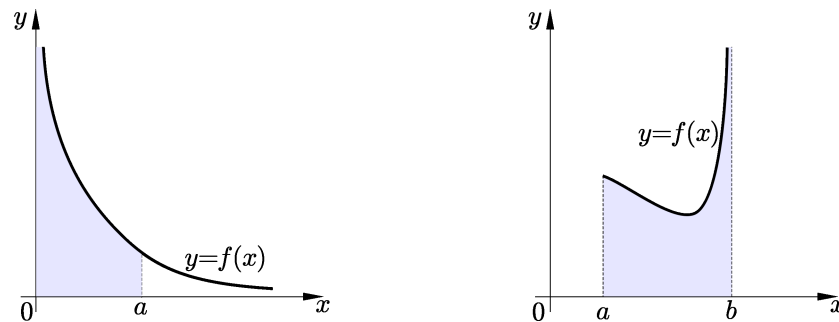


1 Nevlastní integrál

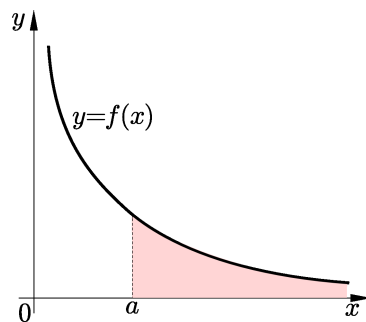
1. Poznámka Dosud jsme se zabývali Riemannovým integrálem, který je definován pro ohraničenou funkci $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Tento určitý integrál jsme zapisovali $\int_a^b f(x) dx$. Nyní potřebujeme vyřešit, jak definovat:

a) $\int_a^b f(x) dx$, kde funkce $f(x)$ není ohraničená. Viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Nevlastní integrál vlivem funkce

b) $\int_a^\infty f(x) dx$ nebo $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, tj. integrál z funkce na otevřeném intervalu. Viz Obrázek 2.



Obrázek 2: Nevlastní integrál vlivem meze

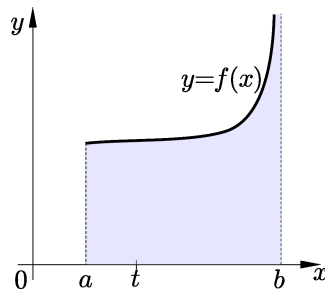
1.1 Nevlastní integrál vlivem funkce

2. Definice Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, t \rangle$ kde $a < t < b$ a nechť je $f(x)$ neohraničená v levém okolí bodu b (viz Obrázek 3). Existuje-li vlastní limita $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$, říkáme, že

integrál $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje**. Pak pokládáme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx. \quad (1)$$

Pokud limita $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že **integrál diverguje**

Obrázek 3: Funkce neohraničená v levém okolí bodu b

3. Poznámka Bodu b , pro který platí, že v jeho levém okolí je funkce $f(x)$ neohraničená a $\int_a^b f(x) dx$ konverguje říkáme **singulární bod**.

4. Poznámka Je-li singulárním bodem bod a (tj. $f(x)$ je neohraničená v pravém okolí bodu a a $\int_a^b f(x) dx$ konverguje), je definice analogická a píšeme

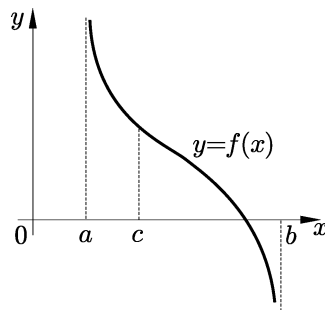
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (2)$$

5. Příklad $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

6. Příklad $\int_0^1 x \ln x dx$.

7. Poznámka Pokud jsou oba krajní body intervalu $\langle a, b \rangle$ singulární a funkce $f(x)$ je integrovatelná na (a, b) , pak rozdělíme interval libovolným bodem c (viz Obrázek 4) a spočteme

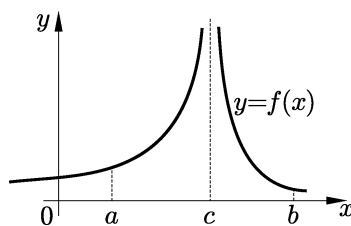
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx.$$



Obrázek 4: Funkce se singularitami v obou krajních bodech

8. Poznámka Pokud se singularita vyskytne uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$, pak integrál rozdělíme právě v tomto bodě c (viz Obrázek 5) a spočítáme

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx.$$



Obrázek 5: Funkce se singularitou uvnitř

9. Příklad $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx$.

1.2 Nevlastní integrál vlivem meze

10. Definice Nechtě funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle a, \infty \rangle$ kde $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, říkáme, že **integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$ konverguje**. Pak pokládáme

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx. \quad (3)$$

Pokud limita $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že **integrál diverguje**.

11. Poznámka Je-li singularita v dolní mezi, je definice analogická a platí

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx. \quad (4)$$

12. Poznámka Pokud jsou singulární body v horní i v dolní mezi, pak interval rozdělíme bodem c a píšeme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_c^t f(x) dx.$$

13. Příklad $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

14. Příklad $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

15. Příklad $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.