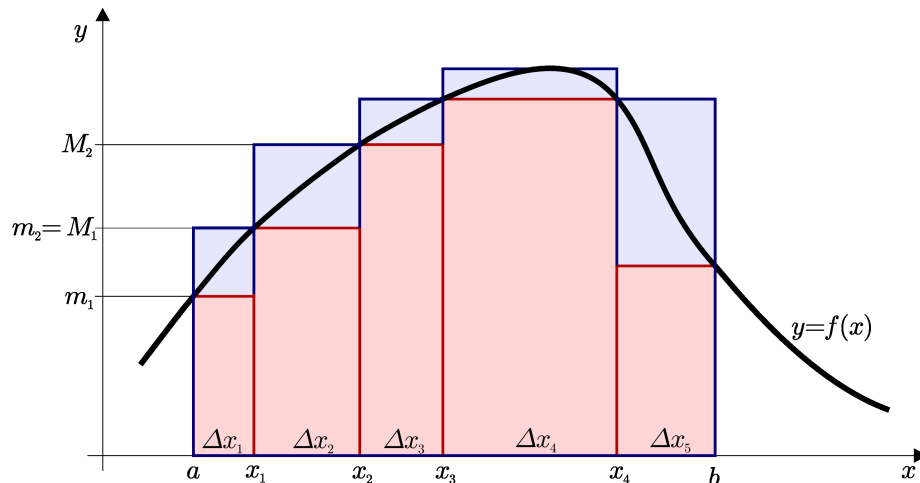


Určitý integrál – Riemannův

Myšlenka integrování pochází z geometrických požadavků - zjišťování povrchů, objemů a délek geometrických útvarů. To znamená, že se omezuje jen na nějakou část (pozn. tím máme na mysli interval) funkce, která je základem geometrického útvaru.

1. Pojmy potřebné k zavedení Riemannova integrálu Nechť je dána funkce $y = f(x)$, která je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ (viz Poznámka 2).

- Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ body $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ na n podintervalů $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, které nemusí mít stejnou délku. Viz Obrázek 1. Toto **dělení** označme d . Délky těchto podintervalů označme stejně, tj. $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.



Obrázek 1: Zavedení Riemannova integrálu

- Protože $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$, nabývá v něm své maximální hodnoty M a minimální hodnoty m . $f(x)$ je ovšem spojitá také v každém podintervalu Δx_i a nabývá v něm své maximální hodnoty M_i a minimální hodnoty m_i (pro $i = 1, 2, \dots, n-1$). Platí

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

- Sestrojme k zavedenému dělení d tzv. **horní integrální součet** $S(d)$

$$S(d) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

a **dolní integrální součet** $s(d)$

$$s(d) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Na Obrázku 1 je vidět, že $S(d)$ je součet plošných obsahů modrých a $s(d)$ je součet plošných obsahů červených obdélníků.

- Poznamenejme, že hodnota $S(d)$ a $s(d)$ závisí na zvoleném dělení d . Zaveďme **horní integrál** z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ jako infimum množiny všech horních součtů při všech možných děleních d

$$\inf_d S(d) = \int_a^b f(x) dx$$

a **dolní integrál** z funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ jako supremum množiny všech dolních součtů při všech možných děleních d

$$\sup_d s(d) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Poznámka Požadavek, aby byla funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b \rangle$ je „zbytečně“ tvrdý, stačilo by předpokládat, že funkce $f(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ ohraničená. Pak by se místo maxim a minim uvažovala suprema a infima.

3. Definice Je-li

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx},$$

pak společné hodnotě těchto integrálů říkáme **integrál z funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$** a o funkci $f(x)$ říkáme, že je v $\langle a, b \rangle$ integrovatelná (tj. integrace schopná) ve smyslu Riemannovy definice.

4. Věta Je-li $f(x)$ integrovatelná v $\langle a, b \rangle$ a je-li $a < c < b$, pak $f(x)$ je integrovatelná v $\langle a, c \rangle$ a v $\langle c, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1)$$

5. Poznámka Z předchozí věty je vidět, že k tomu, aby bylo možné funkci $f(x)$ integrovat, nemusí být $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá. Stačí, aby byla po částech spojitá, tzn. měla konečně mnoho bodů nespojitosti.

6. Definice Pro $b < a$ je integrál definován takto

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Uvedme ještě jednu často používanou nerovnost.

7. Věta (Schwarzova nerovnost)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx. \quad (2)$$

Nyní se dostáváme k vztahu, který má při výpočtech zásadní význam.

8. Věta (Newtonova-Leibnizova formule) je-li $f(x)$ spojitá v $\langle a, b \rangle$ a je-li $F(x)$ libovolná funkce k ní primitivní v $\langle a, b \rangle$ a spojitá v $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (3)$$

9. Příklad Spočtěte následující určité integrály.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

b) $\int_{-3}^1 |x| dx.$

c) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$

Řešení a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

b) Při hledání primitivní funkce k funkci $|x|$ na intervalu $\langle -3, 1 \rangle$ bude nutno přistoupit k rozdělení tohoto intervalu na dvě části. Dělicím bodem bude bod 0. Potom

$$\int_{-3}^1 |x| dx = \int_{-3}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{(-3)^2}{2} \right) + \left(\frac{1^2}{2} \right) - 0 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.$$

c) Je vidět, že tento integrál je poněkud komplikovanější. Pokusíme se ho zjednodušit substitucí, kdy od proměnné x přejdeme k proměnné t . Tím pádem ovšem musíme přepočítat i meze určitého integrálu, které byly zadány vzhledem k původní proměnné x .

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx &= \left\| \begin{array}{l} \text{substituce: } \ln x = t \mid 1 \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x} dx = dt \mid e \rightarrow 1 \end{array} \right\| = \int_0^1 1 + t dt = \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - (0 + 0) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$