

Aplikace určitého integrálu

- 1. Příklad** Vypočtete plošný obsah množiny omezené:
- Křivkou $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a přímkou $y = \frac{1}{2}$; *Výsledek:* $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.
 - Křivkami $f(x) = x^2$ a $f(x) = \sqrt{x}$; *Výsledek:* $\frac{1}{3}$.
 - Grafy funkcí $f(x) = \sin^3 x$, $f(x) = \cos^3 x$ a přímkami $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$; *Výsledek:* $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}$.
 - Křivkou $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, osou x a osou y ; *Výsledek:* $\frac{a^2}{6}$.
 - Parabolou $x + y^2 = 2$ a osou y ; *Výsledek:* $\frac{9}{2}$.
- 2. Příklad** Určete objem množiny vzniklé rychlou rotací funkce $\sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy x ;
Výsledek: $\frac{\pi^2}{2}$.
- 3. Příklad** Určete objem a povrch tělesa vzniklého pomalou rotací astroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x . Určete do třetice všeho dobrého délku astroidy.
Výsledek: Objem = $\frac{32\pi a^3}{105}$, povrch = $\frac{12\pi a^2}{5}$, délka = $6a$.
- 4. Příklad** Odvoďte notoricky známý vzoreček pro povrch koule o poloměru r ; *Výsledek:* $4\pi r^2$.
- 5. Příklad** Pomocí určitého integrálu určete obsah trojúhelníka ABC , kde $A = [-1, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 2]$; *Výsledek:* 3.
- 6. Příklad** Určete objem rotačního elipsoidu vzniklého rotací elipsy $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ kolem osy x ;
Výsledek: $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.
- 7. Příklad** Určete délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Vypočtete dále povrch tělesa vzniklého rotací tohoto oblouku cykloidy kolem osy x ; *Výsledek:* $L = 8a$, $S = \frac{64}{3}\pi a^2$.
- 8. Příklad** Určete obsah obrazce omezeného parabolami:
- $y = \frac{x^2 - 2}{3}$, $y = x^2 - \frac{4}{3}x - 6$; *Výsledek:* 24.
 - $x^2 - 9y + 8 = 0$, $x^2 + 3y - 4 = 0$; *Výsledek:* $\frac{16}{27}$.
- 9. Příklad** Vypočtete Příklad 1 ještě jednou.
- 10. Příklad** Určete objem anuloidu a povrch anuloidové plochy. Anuloid přitom vznikne rotací kružnice $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ kolem osy y ; *Výsledek:* $V = 2\pi^2 r^2 a$, $S = 4\pi^2 ar$.
- 11. Příklad** Určete délku křivky dané polární rovnicí $\rho = e^\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$; *Výsledek:* $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.
- 12. Příklad** Určete plošný obsah množiny omezené následující křivkou:
- Kardioidou $\rho = a(1 + \cos \varphi)$; *Výsledek:* $\frac{3}{2}\pi a^2$.
 - Lemniskatou $\rho^2 = a^2 \cos(2\varphi)$; *Výsledek:* a^2 .
 - Descartovým listem $x^3 + y^3 = 3axy$; *Výsledek:* $\frac{3a^2}{2}$.