Křivky

Rovinnou křivku chápeme jako množinu bodů v rovině. Lze ji popsat různými způsoby, např.:

1. Explicitně rovnicí $y = f(x)$, např. $f : y = x^2, y = -\sqrt{x}, \ldots$
2. Implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$, např. $x^2 + y^2 - 9 = 0, x - y^2 = 0, \ldots$
3. Parametrickými rovnicemi
   $x = \varphi(t),$
   $y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b\rangle$
   např. přímka $k : x = 1 + 2t, y = 3 - 3t, t \in \mathbb{R}$

Podívejme se nyní na křivky dané parametricky důkladněji.

1 Parametrické vyjádření rovinné křivky

1. Definice Nechť funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité na intervalu I (kde I je nejčastěji $\langle \alpha, \beta\rangle$ nebo $(-\infty, \infty)$) a mají v I spojité nebo po částech spojité derivace $\dot\varphi(t)$ a $\dot\psi(t)$. Pak množinu C bodů v rovině, jejichž kartézské souřadnice x a y jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in I \ , \end{aligned} \tag{1}$$

nazýváme **rovinná křivka daná parametricky**, kde t je **parametr**.

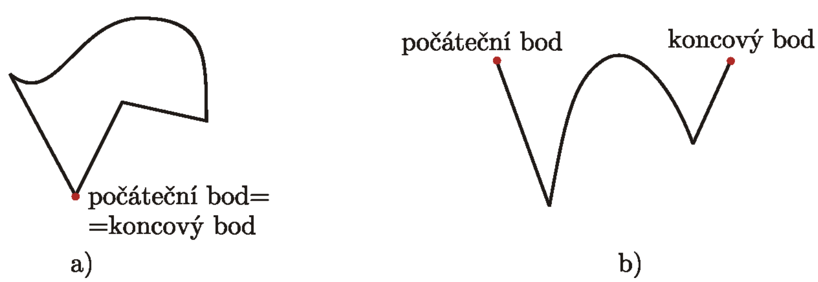
2. Poznámka Derivace $\dot\varphi(t)$ znamená derivaci funkce $\varphi(t)$ podle proměnné t, která se dá zapsat také jako

$$\dot\varphi(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Uveďme si některé důležité vlastnosti rovinných křivek. Uvažujme interval $I = \langle \alpha, \beta\rangle$. Za **počáteční bod** křivky považujeme bod $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)]$ a za **koncový bod** $[\varphi(\beta), \psi(\beta)]$.

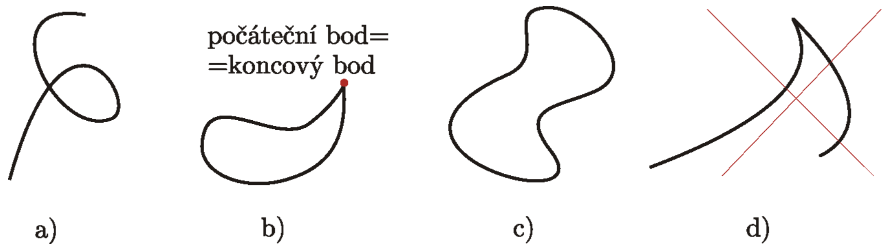
3. Uzavřená křivka Jestliže platí $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = [\varphi(\beta), \psi(\beta)]$ (tzn. počáteční a koncový bod jsou totožné), pak křivku C nazveme uzavřenou (viz Obrázek 1 a)).

4. Otevřená křivka Jestliže má křivka C krajní body, tzn. počáteční bod je různý od koncového, pak ji nazveme otevřenou křivkou (viz Obrázek 1 b)).



Obrázek 1: a) Uzavřená křivka, b) Otevřená křivka

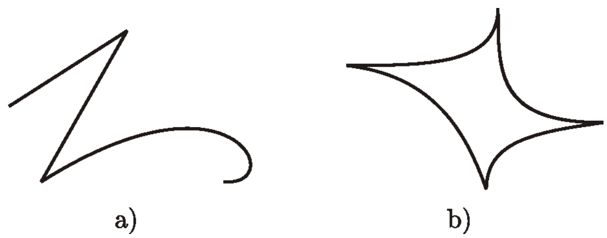
5. Hladká křivka Jsou-li funkce $\dot\varphi(t)$ a $\dot\psi(t)$ spojité v I, pak jde o hladkou křivku. Lépe si tuto vlastnost představíme následovně: otevřená křivka je hladká, jestliže v každém jejím bodě dokážeme udělat tečnu



Obrázek 2: a), b), c) Hladké křivky, d) Křivka, která hladká není

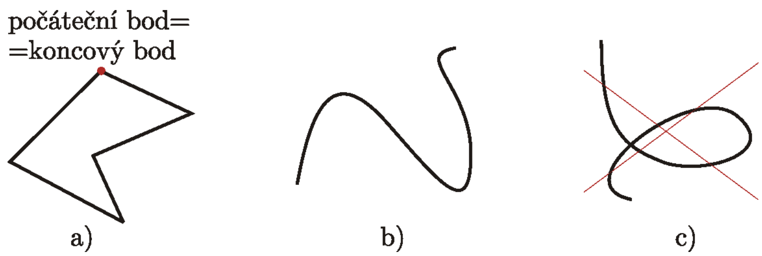
a u uzavřené křivky nám nevadí, jestliže tečna neexistuje v počátečním bodě, který splývá s koncovým (viz Obrázek 2 a), b), c)).

6. Po částech hladká křivka Jestliže je křivka složená z hladkých úseků, které na sebe navazují, tak je po částech hladká (viz Obrázek 3).



Obrázek 3: a), b) Po částech hladká křivka

7. Jednoduchá křivka Jestliže otevřená křivka neprotíná sebe sama, pak jde o jednoduchou křivku. Tzn. pro $t_1 \neq t_2$ platí $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2) \wedge \psi(t_1) \neq \psi(t_2)$. U uzavřených křivek platí stejná podmínka, která se ovšem nevztahuje na počáteční bod, který je totožný s koncovým bodem (viz Obrázek 4 a), b)).



Obrázek 4: a), b) Jednoduchá křivka, c) Křivka, která jednoduchá není

8. Poznámka Jedna křivka může mít více různých parametrických vyjádření.

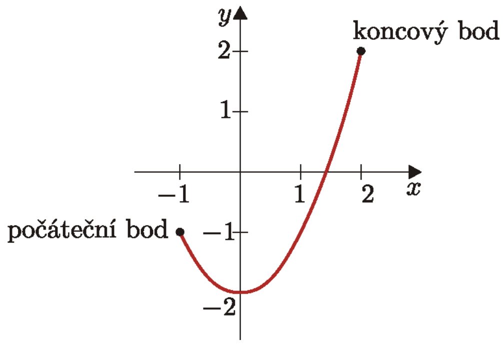
9. Příklad Vyjádřete parametricky parabolu $y = x^2 - 2$ pro $x \in \langle -1, 2\rangle$ (viz Obrázek 5).

Řešení Jedno z mnoha možných řešení je

$$\begin{aligned} (\varphi(t) =) \ & x = t, \\ (\psi(t) =) \ & y = t^2 - 2, \quad t \in \langle -1, 2\rangle. \end{aligned}$$

Jiné správné řešení je

$$\begin{aligned} (\varphi(t) =) \ & x = \tfrac{t}{2}, \\ (\psi(t) =) \ & y = \tfrac{t^2}{4} - 2, \quad t \in \langle -2, 4\rangle. \end{aligned}$$



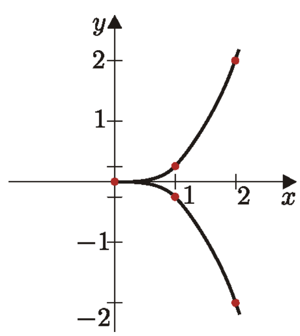
Obrázek 5: Parabola $y = x^2 - 2$ pro $x \in \langle -1, 2\rangle$

10. Příklad Načrtněte křivku danou parametricky rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= t^2, \\ y &= \tfrac{t^2}{4}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešení Nejlepší představu si uděláme vynesením několika bodů do kartézského grafu (x, y). Sestrojme nejprve tabulku, ve které libovolně vhodně volme hodnoty t a na základě zadaných rovnic dopočítejme souřadnice bodů $[x, y]$ hledané křivky. Získané hodnoty jsou zobrazeny na Obrázku 6.

t	-1	0	1	2	-2
x	1	0	1	4	4
y	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2	-2



Obrázek 6: Křivka daná parametricky rovnicemi $x = t^2, y = \frac{t^2}{4}, t \in \mathbb{R}$

11. Poznámka **Derivace funkce $y = f(x)$ dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in I$**

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}, \tag{2}$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y')\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\ddot\psi(t)\dot\varphi(t) - \dot\psi(t)\ddot\varphi(t)}{[\dot\varphi(t)]^3}, \tag{3}$$

kde $\dot\varphi(t) \neq 0$.

12. Příklad Určete derivace první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$, která je dána parametrickými rovnicemi $x = 6t + t^3, y = t^2 - t, t \in \mathbb{R}$.

Řešení Chceme určit y' a y''. Zkusme si výpočet trochu rozepsat a nedosazovat přímo do „vzorců“ (2) a (3).

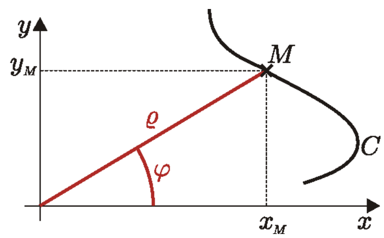
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{2t-1}{6+3t^2}.$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y') = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t-1}{6+3t^2}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{6+3t^2} =$$
$$= \frac{2\left(6+3t^2\right) - (2t-1)6t}{\left(6+3t^2\right)^2} \cdot \frac{1}{6+3t^2}.$$

Rovinné křivky dané polárně

Speciálním případem parametrického vyjádření křivky C v rovině je její vyjádření pomocí polárních souřadnic. Výhodu tohoto vyjádření oceníme například při integraci.

Polohu bodu M, ležícího na křivce C vyjádříme **polárními souřadnicemi** ϱ, φ. Souřadnice ϱ je vzdálenost bodu M od počátku souřadnic O. Souřadnice φ je orientovaný úhel, který svírá úsečka OM s kladným směrem osy x. Platí, že $\varrho \geq 0$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Situace je znázorněna na Obrázku 7.



Obrázek 7: Polární souřadnice

13. Poznámka Křivku C zadáváme předpisem, který dává do souvislosti ϱ a φ a intervalem přípustných hodnot φ. Pak jsou souřadnice bodů $[x, y]$ křivky C dány vztahy

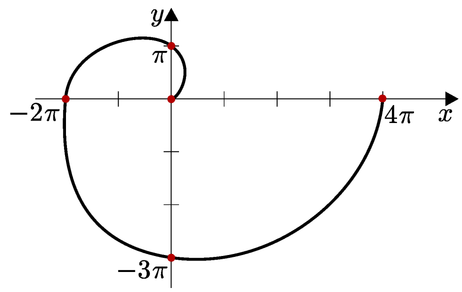
$$\begin{aligned} x &= \varrho(\varphi)\cos\varphi, \\ y &= \varrho(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle a, b\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

které nazýváme **polární souřadnice**.

14. Příklad Křivka je dána polárně rovnicí $\varrho = 2\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \infty)$. Načrtněte graf této funkce.

Řešení Křivku chceme zakreslit v souřadném systému (y, x). To znamená, že nás zajímají souřadnice x a y několika bodů na křivce. Sestavme si proto tabulku, ve které budeme vhodně volit hodnoty φ v prvním řádku a ve druhém vypočítáme podle zadaného předpisu ϱ. Ve třetím a čtvrtém řádku budou souřadnice x a y spočítané podle rovnic (4). Na Obrázku 8 jsou vyneseny tyto body a je jimi proložena hledaná křivka, kterou je Archimédova spirála.

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\varrho = 2\varphi$	0	π	2π	3π	4π
$x = \varrho\cos\varphi$	0	0	-2π	0	4π
$y = \varrho\sin\varphi$	0	π	0	-3π	0



Obrázek 8: Křivka daná polárně $\varrho = 2\varphi$ (Archimédova spirála)

15. Poznámka Derivace funkce $y = f(x)$, která je dána polárně rovnicí $\varrho = g(\varphi)$ v polárních souřadnicích (4)

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\big(g(\varphi)\sin\varphi\big)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\big(g(\varphi)\cos\varphi\big)}. \tag{5}$$

16. Příklad Napište parametrické rovnice funkce $y = f(x)$ dané polárně rovnicí $\varrho = 2\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$ a určete její derivaci $f'(x)$.

Řešení Do rovnic (4) dosadíme zadané vyjádření pro ϱ a získáme parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= 2\varphi\cos\varphi, \\ y &= 2\varphi\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, \pi\rangle, \end{aligned}$$

kde φ je parametr.

Derivaci $f'(x)$ vypočteme

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi}{2\cos\varphi - 2\varphi\sin\varphi}.$$