Křivky zadané parametricky a polárně

1. Příklad Určete typ křivky zadané následujícími parametrickými rovnicemi a nakreslete tuto křivku.

a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. *Výsledek:* Jde o elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) $x = 2+3\cos t$, $y = 3+3\sin t$, $t \in < 0, \pi >$. *Výsledek:* Jde o horní půlkružnici $(x-2)^2+(y-3)^2 = 9$.

c) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Jde o spirálu.

d) $x = 2\sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. *Výsledek:* Jde o úsečku AB o rovnici $x + 2y - 2 = 0$, $A = [2, 0]$, $B = [0, 1]$.

e) $x = 1 - t^2$, $y = 3 + t$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Jde o parabolu $(y - 3)^2 = -(x - 1)$.

f) $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Křivku tvoří grafy funkcí $y = \sqrt{x^3}$ a $y = -\sqrt{x^3}$.

g) $x = t^3$, $y = t^2$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Tuto křivku dostaneme otočením křivky z (f)] o 90^o proti směru oběhu ručiček analogových hodinek.

h) $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. *Výsledek:* Návod: určete průsečíky křivky se souřadnými osami a dále s přímkami $y = x$, $y = -x$. Vyjde známá astroida.

2. Příklad Rozhodněte, pro které hodnoty parametru t představuje daná křivka spojitou funkci. Eliminací parametru najděte rovnici této funkce.

a) $x = \ln t$, $y = \frac{t^2+1}{2t}$, $t \in (0, \infty)$. *Výsledek:* Pro $t \in (0, \infty)$ jde o funkci $y = \cosh\, x$.

b) $x = 8t^2 - 7$, $y = 16t^2 - 1$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Pro libovolné t jde o funkci $y = 2x + 13$.

c) $x = 5t^2$, $y = 3t$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Pro $t \in \langle 0, \infty)$ jde o funkci $y = 3\sqrt{\frac{x}{5}}$, pro $t \in (-\infty, 0\rangle$ jde o funkci $y = -3\sqrt{\frac{x}{5}}$.

d) $x = e^t + t^3 + 4t + 1$, $y = 2\ln(t^2 + 1) + \sin t$, $t \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Rovnice představují spojitou funkci pro libovolné t, její analytické vyjádření pomocí vzorečku $y = f(x)$ však nedovedeme nalézt.

e) $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. *Výsledek:* Jde o funkci $y = 3\sqrt{\frac{16-x^2}{4}}$ pro libovolné t.

3. Příklad Určete první a druhou derivaci funkce zadané následujícími parametrickými rovnicemi.

a) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$. *Výsledek:* $f' = \frac{3}{2}e^t$, $f'' = \frac{3}{4e^t}$.

b) $x = a(t + 1)$, $y = at^3$. *Výsledek:* $f' = 3t^2$, $f'' = \frac{6}{a}t$.

c) $x = a\sin t$, $y = a\cos t$. *Výsledek:* $f' = -\mathrm{tg}\ t$, $f'' = -\frac{1}{a\cos^3 t}$.

d) $x = \frac{t+t^3}{1+t^4}$, $y = \frac{t-t^3}{1+t^4}$.

e) $x = 4t + t^2$, $y = t^3 + t$. *Výsledek:* $f' = \frac{3t^2+1}{4+2t}$, $f'' = \frac{6t^2+24t-2}{(4+2t)^3}$.

f) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$.

g) $x = \ln t$, $y = \sin 2t$. *Výsledek:* $f' = 2t\cos 2t$, $f'' = 2t\cos 2t - 4t^2\sin 2t$.

4. Příklad Nakreslete následující křivky zadané polárně:

a) $\rho = 2\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \infty)$. *Výsledek:* Archimédova spirála.

b) $\rho = 1$. *Výsledek:* Kružnice.

c) $\rho = 2^{\frac{\varphi}{\pi}}$, $\varphi \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Logaritmická spirála.

d) $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R} - \{0\}$. *Výsledek:* Hyperbolická spirála.

e) $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}$. *Výsledek:* Přímka.

f) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. *Výsledek:* Lemniskata.

g) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. *Výsledek:* Kardioida.

5. Příklad Převeďte polární rovnice křivek z příkladu 4 na parametrické rovnice a určete derivaci příslušných funkcí lokálně zadaných parametrickými rovnicemi.

6. Příklad Určete asymptoty křivek zadaných parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Asymptoty přitom hledáme takto:

α) Asymptoty, které nejsou rovnoběžné se souřadnicovými osami existují pouze pro ty hodnoty parametru $t = t_0$, pro které současně platí

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \infty.$$

Rovnice asymptoty je pak

$$y = ax + b, \quad \text{kde} \quad a = \lim_{t\to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)},\ b = \lim_{t\to t_0} [\psi(t) - a\varphi(t)].$$

β) Je-li

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = b,$$

tak přímka $y = b$ je asymptotou. Je-li

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \infty,$$

tak přímka $x = a$ je asymptotou. Konkrétní zadání:

a) $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{t}{t+1}$. *Výsledek:* $x = -1$, $y = 0$.

b) $x = \frac{2\mathrm{e}^t}{t-1}$, $y = \frac{t\mathrm{e}^t}{t-1}$. *Výsledek:* $y = \frac{1}{2}x + \mathrm{e}$.

7. Příklad Nalezněte úhel křivek:

a) První křivka je dána analyticky rovnicí $y = x^2$ a druhá parametricky rovnicemi $x = \frac{5}{3}\cos t$, $y = \frac{5}{4}\sin t$. *Výsledek:* $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{41}{2}$.

b) První křivka je dána parametricky rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ a druhá křivka je dána pro změnu zase parametricky rovnicemi $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$. *Výsledek:* $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

8. Příklad Rozhodněte, zda křivka daná parametricky rovnicemi $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$ je grafem nějaké funkce. V kladném případě určete její definiční obor, extrémy, inflexní body a asymptoty.

Výsledek: Ano, je to funkce, protože $x(t) = t^3 + 3t + 1$ je prostá. Vyjde $Df = H(x(t)) = \mathbf{R}$, maximum nastává v bodě $[-3, 3]$, minimum v bodě $[5, -1]$, inflexním bodem je $[1, 1]$, asymptoty žádné nejsou.

9. Příklad Napište rovnici tečny a normály ke křivce zadané parametricky, resp. polárně:

a) $x = t^2 - 4t + 4$, $y = t^2 - 3t + 2$, bod dotyku je $A = [1, 0]$. *Výsledek:* $t : x - 2y - 1 = 0$, $n : 2x + y - 2 = 0$.

b) $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, bod dotyku je dán hodnotou parametru $t = \frac{\pi}{4}$. *Výsledek:* $t : x - y - \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 0$, $n : x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

c) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t = 2$. *Výsledek:* $t : 4x - 5y + 4a = 0$, $n : 15x + 12y - 26a = 0$.

d) $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$, bod dotyku odpovídá úhlu $\varphi = \frac{\pi}{2}$. *Výsledek:* $t : 2x - \pi y + 2\pi = 0$, $n : \pi x + 2y - 4 = 0$.