

Diferenciál a Taylorův polynom

1. Příklad Vypočtete diferenciál funkce:

- a) $f(x) = x \sin 2x$.
- b) $f(x) = \arctg 3x$.
- c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
- d) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Nápověda: Není zadán bod x_0 , ani přírůstek dx , proto diferenciál bude zapsán ve tvaru $df = f'(x) dx$.

2. Příklad Vypočtete diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0 pro přírůstek dx :

- a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$, $dx = 0,1$; *Výsledek:* 0.5.
- b) $f(x) = x^3$, $x_0 = 4$; *Výsledek:* 48 dx.
- c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x_0 = 3$, $dx = 0,3$; *Výsledek:* $\frac{0,3}{\sqrt{10}}$.

3. Příklad Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x)$ stupně n se středem v bodě x_0 :

- a) $f(x) = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 4$; *Výsledek:* $T = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)^2 + \frac{1}{192}(x-4)^3 - \frac{1}{1024}(x-4)^4$.
- b) $f(x) = xe^{-x}$, $n = 4$, $x_0 = 0$; *Výsledek:* $T = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$.
- c) $f(x) = x^x - 1$, $n = 3$, $x_0 = 1$; *Výsledek:* $T = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$.

4. Příklad Vyjádřete polynom $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ v mocninách $(x-2)$.

Výsledek: $P(x) = -5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$.

5. Příklad Vypočtete $\arctg 1,7$ pomocí vhodného Taylorova polynomu třetího stupně a porovnejte s přesnou hodnotou spočtenou na kalkulačce.

Nápověda: Zvolíme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $n = 3$. Vyjde $T = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$. Na kalkulačce spočteme $\arctg 1,7 = 1.039072$, zatímco $T(1.7) = 1.0414814$.

6. Příklad Vypočtete $\cos 5^\circ$ s přesností 10^{-6} .

Nápověda: Je nábiledni, že $f(x) = \cos x$. Musíme dále určit střed x_0 a stupeň n Taylorova polynomu. Anžto 5° je $\frac{\pi}{36}$ radiánů, což je číslo blízké nule, tak zvolíme $x_0 = 0$ a použijeme notoricky známý Taylorův polynom funkce $\cos x$ se středem v bodě $x_0 = 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R(x),$$

kde

$$R(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

kde $\xi \in \langle x_0, x \rangle$, tj. v našem případě $\xi \in \langle 0, \frac{\pi}{36} \rangle$. Abychom určili počet členů n , tak odhadneme zbytek takto:

$$|R(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|. \quad (1)$$

(neboť pro libovolné ξ platí $|\cos \xi| \leq 1$). Do pravé části nerovnosti (1) dosadíme za x hodnotu $\frac{\pi}{36}$ a hledáme takové n , aby $|R(x)| \leq 10^{-6}$. Nerovnosti $|R(\frac{\pi}{36})| \leq 10^{-6}$ vyhovuje $n = 2$, takže stačí vzít aproximaci tvaru

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Dosazením $\frac{\pi}{36}$ do pravé strany předchozího vzorce dostaneme hodnotu 0.996195.

7. Příklad Vypočtete číslo e s chybou menší než $\frac{1}{1000}$.

Nápověda: Není nic jasnějšího, že $f(x) = e^x$. Číslo e dostaneme pro $x = 1$, takže zvolíme střed $x_0 = 0$. Budeme tedy mít Taylorův polynom tvaru

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R(x)$$

kde $R(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$, $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$. Zbývá určit počet členů n . Nerovnost $R(1) < \frac{1}{1000}$ vede k nerovnosti $\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$. Protože $\xi < 1$, tak $e^\xi < e < 3$. Nerovnosti $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ vyhovuje číslo $n = 6$. Máme tedy

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

8. Příklad Vypočtěte hodnotu $\sqrt[4]{83}$ s přesností 10^{-6} .

Nápověda:

$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81 + 2} = 3 \left(1 + \frac{2}{81} \right)^{\frac{1}{4}}$$

takže použijeme Taylorův polynom funkce $f(x) = (1+x)^s$. Analogicky jako v předchozím příkladě odhadneme zbytek a vyjde nám, že stačí vzít první čtyři členy Taylorova polynomu

$$(1+x)^s \approx 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3.$$

Dosazením $x = \frac{2}{81}$, $s = \frac{1}{4}$ vyjde 3.01835.