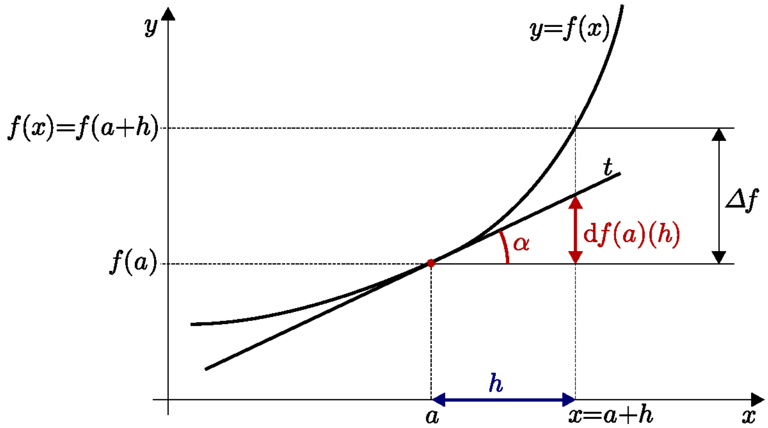
1 Diferenciál funkce

Pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě a lze nejnázorněji vysvětlit pomocí Obrázku 1. Jde o přírůstek funkční hodnoty na tečně. To vlastně znamená, že funkce je v okolí bodu a aproximována tečnou a k přibližnému stanovení funkční hodnoty v bodě „blízko“ bodu a nám stačí určit hodnotu na tečně.



Obrázek 1: Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě a

1. Definice Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě a spojitou derivaci (tj. existuje $f'(a)$). **Diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a při přírůstku $h \in \mathbb{R}$** nazýváme číslo

$$df(a)(h) = f'(a)h. \tag{1}$$

2. Poznámka Z Obrázku 1 je zřejmé, že platí

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(a) = \frac{df(a)}{h} \quad \Rightarrow \quad df(a)(h) = f'(a)h.$$

3. Poznámka $\Delta f(a)$ je **diference funkce $f(x)$ mezi body a a $a+h$**, tj. přírůstek funkční hodnoty.

4. Poznámka h je **přírůstek proměnné x**, který bývá zvykem značit

$$h = x - a = dx. \tag{2}$$

5. Definice Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě a spojité derivace až do řádu n včetně (tj. existují $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$). **Diferenciálem řádu n funkce $f(x)$ v bodě a při přírůstku $h \in \mathbb{R}$** nazýváme číslo

$$d^n f(a)(h) = f^{(n)}(a)h^n. \tag{3}$$

6. Poznámka Diferenciály (i vyšších řádů) bývá na základě Poznámky 4 zvykem značit

$$df(a)(h) = f'(a)h = f'(a)dx = f'(a)(x-a). \tag{4}$$

7. Poznámka Pokud pro výpočet funkční hodnoty v bodě $a + h$ použijeme diferenciál, dopustíme se určité chyby

$$R(h) = |\Delta f(a) - df(a)(h)|$$

a platí
$$\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h}=0.$$

8. Příklad Pomocí diferenciálu spočtěte přibližně $\operatorname{arctg} 0,97$.

Řešení Zvolíme vhodnou funkci $f(x)$ a vhodný bod a, ve kterém se snadno počítá funkční hodnota a je dostatečně blízko bodu $0,97$. Uvažujme tedy $f(x)=\operatorname{arctg} x$ a $a=1$. Vypočteme si přírůstek $h=x-a=0,97-1=-0,03$.

Chceme tedy spočítat $f(0,97)$.

Vypočtěme nejprve diferenciál $\mathrm{d}f(1)(-0,03)$ pomocí vztahu (1) následovně
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2},\\ f'(1) &= \frac{1}{2},\\ \mathrm{d}f(1)(-0,03) &= \frac{1}{2}(-0,03). \end{aligned}$$

Nyní stačí jen přičíst funkční hodnotu v bodě $a=1$ a získáme
$$f(0,97)\doteq f(1)+\mathrm{d}f(1)(-0,03)=\frac{\pi}{4}-\frac{0,03}{2}\doteq 0,77.$$

9. Příklad Vypočtěte diferenciál funkce $f(x)=\sin x$.

Řešení Vzhledem k tomu, že nebyl zadán ani bod a, ani přírůstek h, bude výpočet naprosto obecný
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x,\\ \mathrm{d}f(x) &= f'(x)\mathrm{d}x=\cos x\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

2 Taylorův polynom

V předchozí kapitole jsme funkční hodnotu v bodě $a+h$ nahrazovali pomocí přírůůstku na tečně ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě a. Je zřejmé, že se tím dopouštíme určité nepřesnosti, která je ovšem vyvážena snadností výpočtu. Pokud bychom chtěli mít výpočet $f(a+h)$ přesnější, jistě by nás napadlo aproximovat graf funkce $y=f(x)$ v okolí bodu a ne těčnou (tj. polynomem 1. stupně), ale polynomem vyššího stupně. To je hlavní myšlenkou aproximace funkce $f(x)$ pomocí Taylorova polynomu.

10. Věta (Taylorova věta) Nechť má funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a,a+h\rangle$ (resp. v $\langle a+h,a\rangle$ pro h záporné) spojité derivace až do řádu n včetně a v $(a,a+h)$ (resp.v $(a+h,a)$) spojitou derivaci $(n+1)$-řádu. Pak
$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R_{n+1}, \tag{5}$$
kde tzv. **Taylorův zbytek** R_{n+1} lze zapsat například v Lagrangeově tvaru
$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1},\ \text{kde } 0<\vartheta<1. \tag{6}$$

11. Poznámka Píšeme-li přírůstek h ve tvaru $h = x - a$, dostaneme často používaný tvar rovnice (5)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}. \tag{7}$$

Chceme-li danou funkci $f(x)$ nahradit v okolí bodu a polynomem, použijeme tzv. Taylorův polynom.

12. Definice **Taylorovým polynomem stupně n v bodě a** nazýváme polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{8}$$

13. Poznámka Je-li $a = 0$, pak se polynom (8) nazývá **Maclaurinův polynom** a má vyjádření

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{9}$$

14. Příklad Napište Maclaurinův polynom stupně $n = 4$ funkce e^x.

Řešení Je třeba si určit funkční hodnotu v bodě 0 a první 4 derivace a jejich hodnoty v bodě 0.

$$\begin{array}{ll}
f(0) = \mathrm{e}^0 = 1 & \\
f'(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \\
f''(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow f''(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \\
f'''(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow f'''(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \\
f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow f^{(4)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1.
\end{array}$$

Získané hodnoty dosaďme do vztahu (9)

$$\mathrm{e}^x \approx M_4(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

15. Příklad Nahraďte funkci $y = \cos x$ v okolí počátku (např. v intervalu $\langle -0,1; 0,1\rangle$) polynomem čtvrtého stupně a odhadněte chybu.

Řešení Je třeba si určit funkční hodnotu v bodě 0, prvních 5 derivací.

$$\begin{array}{ll}
f(0) = \cos 0 = 1 & \\
f'(x) = -\sin x & \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0, \\
f''(x) = -\cos x & \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1, \\
f'''(x) = \sin x & \Rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0, \\
f^{(4)}(x) = \cos x & \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1 \\
f^{(5)}(x) = -\sin x. &
\end{array}$$

Tedy

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5.$$

Nyní se zabývejme odhadem chyby R_5, kterou lze pomocí vztahu (6) zapsat ve tvaru

$$R_5 = \frac{-\sin(\vartheta x)}{5!}x^5, \text{ kde } 0 < \vartheta < 1.$$

Vzhledem k tomu, že $-1 \le \sin x \le 1$, bude pro všechna x z intervalu $\langle -0,1; 0,1\rangle$ platit

$$|R_5| \le \frac{0,1^5}{5!} = \frac{1}{12000000}.$$