

Průběh funkce

Při vyšetření grafu funkce budeme postupovat podle následujícího algoritmu:

1. Určení definičního oboru.
2. Rozhodnutí, jestli je funkce sudá, lichá, periodická nebo nemá ani jednu z uvedených vlastností.
3. Nalezení průsečíků s osou x (tzv. nulové body) a určení znaménka $f(x)$.
4. Výpočet limit pro x jdoucí k $\pm\infty$.
5. První derivace funkce:
 - a) Nalezení stacionárních bodů (tj. bodů podezřelých z extrémů).
 - b) Nalezení intervalů, kde je funkce rostoucí, nebo klesající.
 - c) Nalezení lokálních extrémů.
6. Druhá derivace funkce:
 - a) Nalezení intervalů, kde je funkce konkávní, nebo konvexní.
 - b) Nalezení inflexních bodů.
7. Vyšetření asymptot:
 - a) Bez směrnice, tj. přímkou $x = x_0$, kde x_0 jsou případné body nespojitosti.
 - b) Se směrnicí, tj. přímkou $y = kx + q$.
8. Načrtnutí grafu.

Dříve než si ukážeme vyšetření průběhu funkce na konkrétním příkladu, provedeme stručnou rekapitulaci pojmů a upozorníme na úskalí, která mohou nastat.

1. Definiční obor

Správné určení definičního oboru je nezbytné. Body, které „vyřadíme“ z definičního oboru jsou horšími kandidáty na to, že jimi bude procházet asymptota bez směrnice.

2. Sudá, lichá, nebo periodická funkce

Potvrzení některé z těchto vlastností nám výrazně usnadní vykreslení průběhu funkce, protože budeme vědět o určité symetričnosti. Připomeňme, že funkce:

Sudá má graf osově souměrný podle osy y a platí $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in D(f)$.

Lichá má graf středově souměrný podle počátku a platí $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in D(f)$.

Periodická s periodou p splňuje pro všechna $x \in D(f)$ podmínku $f(x) = f(x + p)$.

3. Nulové body a průsečík s osou y

Body na ose x mají y -ovou souřadnici rovnu nule. Stačí tedy vyřešit rovnici $f(x) = 0$.

Abychom věděli, kdy bude graf funkce $f(x)$ probíhat pod osou x a nad ní, potřebujeme určit znaménko $f(x)$ (tzv. $\text{sgn } f(x)$).

4. Výpočet limit pro x jdoucí k $\pm\infty$

Počítáme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

5. První derivace, stacionární body, monotonnost, extrémy

Připomeňme nejprve geometrický význam derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 - číslo $f'(x_0)$ je směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Jestliže sestrojíme tečnu ke grafu funkce f v jejím lokálním extrému (tj. v lokálním minimu nebo lokálním maximu), tato tečna bude rovnoběžná s osou x a tudíž její směrnice

bude rovna **nule**. Hledání extrémů odpovídá nalezení bodů, ve kterých je směrnice tečny ke grafu rovna nule. **Stacionární body** (tj. body podezřelé z extrémů) jsou kořeny rovnice:

$$f'(x) = 0$$

Pozor, ne každý bod, kde směrnice tečny je rovna nule musí být extrém. Ještě stále může jít o tzv. inflexní bod, což je bod, kde se průběh funkce mění z konvexního na konkávní nebo naopak.

Pozor, ne všechny lokální extrémy „zachytíme“ tím, že položíme $f'(x) = 0$. Je třeba si pohlídat body, ve kterých první derivace vůbec neexistuje!

O tom, jestli je stacionární bod bodem lokálního minima, lokálního maxima, nebo inflexním bodem rozhodneme podle intervalů, na kterých funkce roste, nebo klesá.

Funkce rostoucí na nějakém intervalu splňuje podmínku, že $f'(x) > 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.

Funkce klesající na nějakém intervalu splňuje podmínku, že $f'(x) < 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.

Proto nás bude zajímat znaménko první derivace (tzv. $\text{sgn } f'(x)$).

6. Druhá derivace, konvexnost, konkávnost, inflexní body

Funkce konvexní leží v daném intervalu „nad tečnou“ a platí $f''(x) > 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.

Funkce konkávní leží v daném intervalu „pod tečnou“ a platí $f''(x) < 0$ pro všechna x z tohoto intervalu.

Proto nás bude zajímat znaménko druhé derivace (tzv. $\text{sgn } f''(x)$).

Inflexní bod je bod, pro který platí $f''(x) = 0$ a ve kterém se průběh funkce mění z konvexního na konkávní, nebo naopak.

Poznamenejme, že pokud jsme z nějakého důvodu nedokázali rozhodnout, jaký extrém nastává u bodů, které podezříváme již od první derivace, druhá derivace nám může pomoci. Platí totiž:

Je-li $f'(x) = 0$ a zároveň $f''(x) > 0$, pak je v x **lokální minimum**.

Je-li $f'(x) = 0$ a zároveň $f''(x) < 0$, pak je v x **lokální maximum**.

Poznamenejme, že pokud jsme z nějakého důvodu nedokázali rozhodnout pomocí konvexnosti a konkávnosti o inflexním bodu, pomohla by nám třetí derivace.

7. Asymptoty bez směrnice, asymptoty se směrnicí

Adepty na asymptoty bez směrnice jsou body „vyřazené“ z definičního oboru, označme jeden z nich x_0 . K tomu, abychom prohlásili přímkou $x = x_0$ za asymptotu bez směrnice nám stačí, když se ukáže, že alespoň jedna jednostranná limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

je nevlastní (tj. $\pm\infty$).

Poznámka: Asymptot bez směrnice může být nekonečně mnoho.

Asymptoty se směrnicí, tj. přímkou $y = kx + q$, získáme (pokud vůbec existují) výpočtem těchto limit

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k_1 x)$$

a

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x).$$

Poznámka: Asymptoty se směrnicí mohou být maximálně dvě.

8. Graf funkce

Pokud dobře rozumíme jednotlivým vlastnostem a známe vazby mezi nimi, je již celkem snadné zakreslit předchozí poznatky do souřadného systému.

9. Příklad Vyšetřete průběh funkce $f : y = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$ a nakreslete graf.

Řešení

1. Definiční obor: $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$. To znamená, že přímka $x = 0$ je podezřelá z toho, že bude asymptotou. To potvrdíme, nebo vyvrátíme až v kroku 7b). Získané informace postupně zakreslujeme, jak je vidět na Obrázku 1.

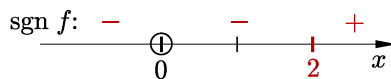


Obrázek 1: Znázornění definičního oboru

2. Sudost, lichost: $f(-x) = (-x - 2)e^{-\frac{1}{-x}} = (-x - 2)e^{\frac{1}{x}} \neq f(x)$ a je vidět, že $f(-x) \neq -f(x)$. Tím pádem funkce není ani sudá ani lichá. Periodická není na první pohled.
3. Nulové body: Určíme průsečíky s osou x , tj. položíme $y = 0$ a řešíme rovnost

$$0 = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x = 2.$$

Tuto informaci vyznačíme na ose x a určíme, kdy bude graf funkce „pod osou x “ a „nad osou x “, viz Obrázek 2.



Obrázek 2: Nulové body a znaménko funkce f

4. Úvaha o chování funkce pro $x = \pm\infty$:

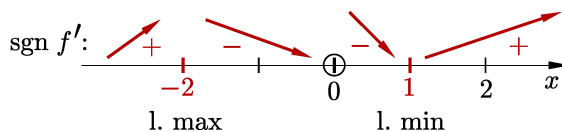
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} =$$

5. První derivaci vypočítáme a položíme rovnu nule: $y' = e^{-\frac{1}{x}} + (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \left(1 + \frac{x-2}{x^2}\right) = 0$
To nastane pro

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0.$$

Máme tedy dva stacionární body u kterých rozhodneme pomocí směrnic tečen o tom, zda v nich nastává lokální extrém. Poznamenejme jen, že bodem, podezřelým z extrému by mohl být i bod 0, ve kterém derivace neexistuje, ale tento bod je vyřazen z definičního oboru a tím pádem nás dále nezajímá. Tyto informace opět schématicky zakreslíme do Obrázku 3.



Obrázek 3: Znaménko první derivace f' a lokální extrémy

Dopočítejme ještě y -ové souřadnice lokálních extrémů:

$$\left[-2; (-2 - 2)e^{-\frac{1}{-2}}\right] \doteq [-2; -6, 6] \dots \text{lokální maximum.}$$

$$\left[1; (1 - 2)e^{-\frac{1}{1}}\right] \doteq [-2; -0, 37] \dots \text{lokální minimum.}$$

6. Vypočteme druhou derivaci a položíme ji rovnu nule. Vyjdeme z první derivace, kterou je vhodné si před dalším derivováním upravit na tvar

$$y' = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \frac{x-2}{x^2},$$

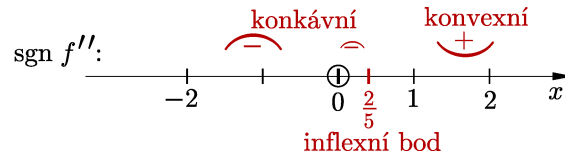
potom

$$y'' = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \frac{1}{x^2} \frac{x-2}{x^2} + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \left(\frac{5x-2}{x^4} \right) = 0.$$

Tedy

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \left(\frac{5x-2}{x^4} \right) = 0 \Leftrightarrow 5x-2=0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}.$$

O tom, zda je bod $x = \frac{2}{5}$ inflexním bodem rozhodneme pomocí schématického Obrázku 4. Dovo-



Obrázek 4: Znaménko druhé derivace f'' a inflexní bod

čítejme ještě y -ovou souřadnici inflexního bodu:

$$\left[\frac{2}{5}; \left(\frac{2}{5} - 2 \right) e^{-\frac{1}{\frac{2}{5}}} \right] \doteq \left[\frac{2}{5}; -0,13 \right] \dots \text{ inflexní bod.}$$

Poznámka: Pokud bychom nechtěli o lokálních extrémech rozhodovat pomocí Obrázku 3, můžeme využít právě druhou derivaci a zjistit, jakou hodnotu nabývá v bodě podezřelém z extrému.

$$y''(-2) < 0 \Rightarrow \text{v bodě } x = -2 \text{ nastává lokální maximum,}$$

$$y''(1) > 0 \Rightarrow \text{v bodě } x = 1 \text{ nastává lokální minimum.}$$

Podobnou pomůckou je (místo Obrázku 4) pro potvrzení inflexního bodu třetí derivace. Pokud bychom ji spočítali a zjišťovali, jakou hodnotu má třetí derivace v bodě $x = \frac{2}{5}$, zjistili bychom, že

$$y''' \left(\frac{2}{5} \right) \neq 0 \Rightarrow \text{bod } x = \frac{2}{5} \text{ je inflexní bod.}$$

7. a) Nejprve se zaměříme na asymptoty bez směrnice.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Vzhledem k tomu, že alespoň jedna jednostranná limita vyšla nevlastní (tj. $\pm\infty$), můžeme říct, že přímka $x = 0$ je asymptotou bez směrnice. Viz Obrázek 5.

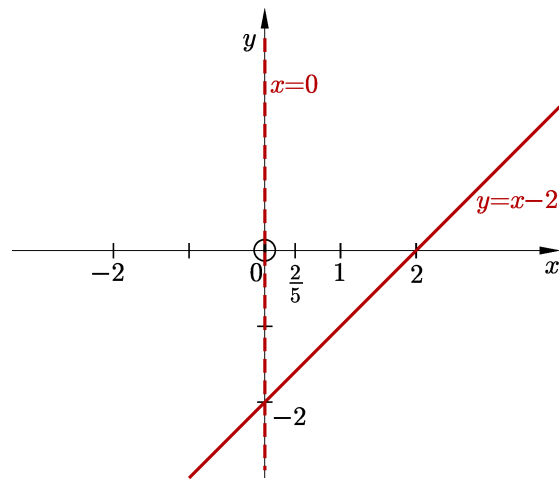
- b) Vyšetřeme asymptoty se směrnicí, tj. přímky $y = k_1x + q_1$ a $y = k_2x + q_2$.

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-2)}{x} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

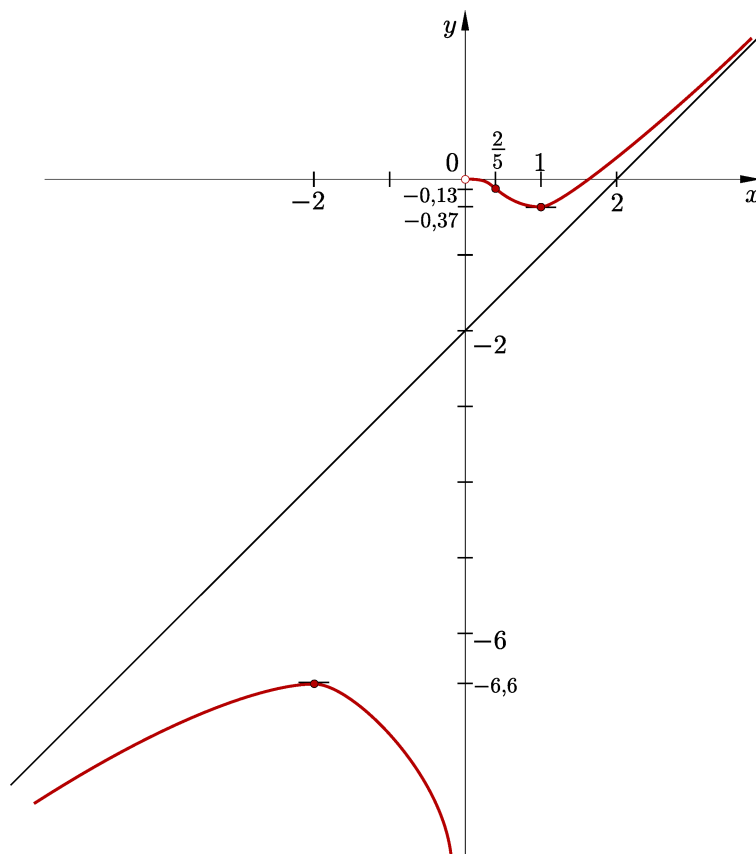
$$q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} - 1x = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-2) - xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = -2.$$

Máme tedy jedinou asymptotu se směrnicí $y = x - 2$. Viz Obrázek 5.

8. Nyní všechny dílčí informace zobrazíme do jednoho Obrázku 6.



Obrázek 5: Asymptoty bez směrnice a se směrnicí

Obrázek 6: Průběh funkce $y = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$