

Monotonnost, extrémny a průběh funkce

O správnosti výpočtů u příkladů, kde nejsou uvedeny výsledky, se lze přesvědčit nakreslením grafu funkce (např. s využitím programu MAPLE).

1. Příklad Vyšetřete, kdy je funkce rostoucí a klesající a nalezněte extrémny:

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$;

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$;

c) $f(x) = x \ln^2 x$;

d) $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

e) $f(x) = x - \frac{1}{x}$;

f) $f(x) = \ln(1 + x - 4x^2)$;

g) $f(x) = x^x$;

h) $f(x) = |x|$.

2. Příklad Nalezněte absolutní extrémny funkce na zadaném intervalu:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $x \in \langle -2, 4 \rangle$;

b) $f(x) = x^3 - 3x + 20$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$;

c) $f(x) = x - 2 \ln x$, $x \in \langle 1, e \rangle$;

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$, $x \in \langle -4, 4 \rangle$;

e) $f(x) = x^3 - 3x + 20$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$.

3. Příklad Vyšetřete kdy je funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní a určete lokální extrémny a inflexní body:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

b) $f(x) = e^{-x^2}$;

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;

d) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

e) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

f) $f(x) = x + 2 \operatorname{arccotg} x$.

4. Příklad Určete asymptoty funkce:

a) $f(x) = \frac{3}{2x-1} - \frac{2x-1}{3}$, *Výsledek* : $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$;

b) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, *Výsledek* : $x = -1$, $y = x - 5$;

c) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, *Výsledek* : $x = 0$, $y = x$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$, *Výsledek* : $y = x + \frac{4}{3}$;

e) $f(x) = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$, *Výsledek* : $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$;

f) $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$, Výsledek : $y = x$, $y = x + 2\pi$;

g) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$, Výsledek : $y = -x$;

h) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$, Výsledek : $y = -x$, $x = 0$;

i) $f(x) = x + e^{-x}$, Výsledek : $y = x$;

j) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$, Výsledek : $x = 1$, $y = 0$;

k) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, Výsledek : $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$;

l) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, Výsledek : $x = 0$, $y = x + 1$;

m) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} + x$, Výsledek : $y = x$, $x = 1$, $x = -1$;

n) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, Výsledek : $y = 0$.

5. Příklad Vyšetřete průběh funkce

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;

b) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$;

c) $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$;

d) $f(x) = x + e^{-x}$;

e) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$;

f) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

g) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

h) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

i) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} + x$;

j) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.