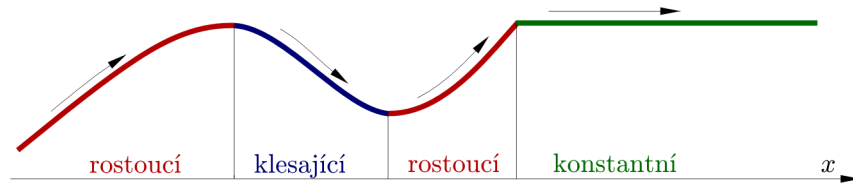


1 Rostoucí a klesající funkce

Pojmy rostoucí, klesající a konstantní používáme k popisu chování funkce na nějakém intervalu (po kterém se pohybujeme zleva doprava, jak je přirozené). Intuitivní představu těchto pojmů si každý udělá z Obrázku 1.

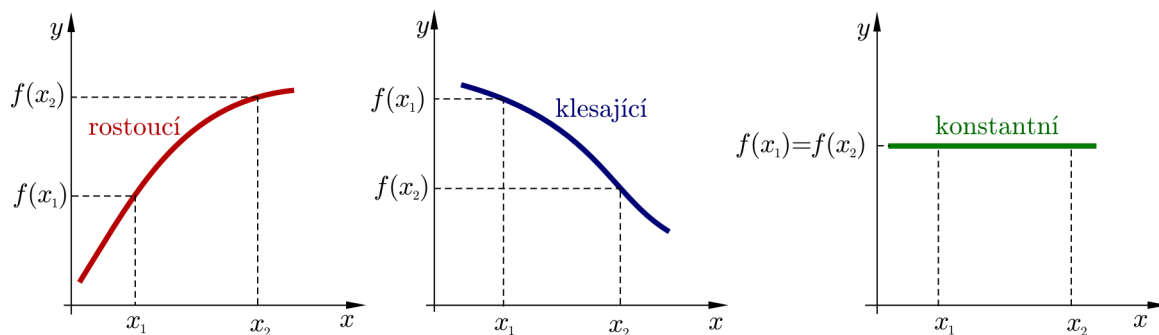


Obrázek 1: Rostoucí, klesající a konstantní funkce

Nyní tyto pojmy definujeme precizněji a definici ilustrujeme na Obrázku 2.

1. Definice Nechť funkce $y = f(x)$ je definovaná na nějakém intervalu I . Nechť x_1, x_2 jsou hodnoty z tohoto intervalu. Potom řekneme, že

- $f(x)$ je **rostoucí** na intervalu I , jestliže pro každé $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- $f(x)$ je **klesající** na intervalu I , jestliže pro každé $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.
- $f(x)$ je **konstantní** na intervalu I , jestliže pro libovolné x_1, x_2 platí $f(x_1) = f(x_2)$.



Obrázek 2: Růst a klesání — podle definice

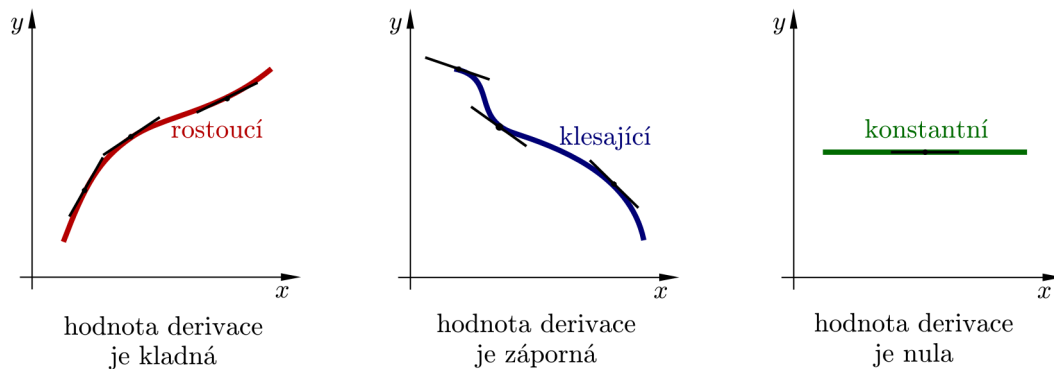
2. Poznámka Nechť funkce $y = f(x)$ je definovaná na nějakém intervalu I . Nechť x_1, x_2 jsou hodnoty z tohoto intervalu. Potom řekneme, že

- $f(x)$ je **neklesající** na intervalu I , jestliže pro každé $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- $f(x)$ je **nerostoucí** na intervalu I , jestliže pro každé $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Podívejme se na funkci rostoucí, klesající a konstantní z hlediska derivací. Konkrétně nás budou zajímat znaménka derivací v bodech funkce. Hodnota derivace funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 udává směrnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 . Názorně je situace uvedena na Obrázku 3, a proto nás nepřekvapí následující věta.

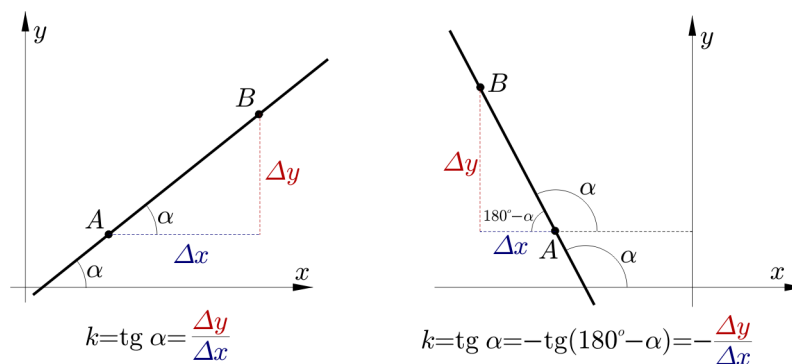
3. Věta Necht $y = f(x)$ je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b) .

- a) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom je $f(x)$ **rostoucí** na $\langle a, b \rangle$.
- a) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom je $f(x)$ **klesající** na $\langle a, b \rangle$.
- a) Je-li $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom je $f(x)$ **konstantní** na $\langle a, b \rangle$.



Obrázek 3: Růst a klesání — znaménka derivací

4. Poznámka Směrnice přímky $y = kx + q$ (tj. číslo k) je definována jako tangenta úhlu α , který tato přímka svírá s kladným směrem osy x . Hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček považujeme za kladnou, hodnotu měřenou po směru otáčení hodinových ručiček považujeme za zápornou. Tak například hodnoty 210° a -150° udávají směr stejné přímky. Podívejte se na příklady na Obrázku 4.



Obrázek 4: Směrnice přímky

5. Příklad

Určete intervaly, ve kterých jsou následující funkce rostoucí, a ve kterých jsou klesající. Namalujte nejprve obrázek, z něj vyčtete řešení a výsledek potvrďte výpočtem.

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$,
- b) $f(x) = x^3$.

Řešení

a) Z grafu funkce $f(x)$ na Obrázku 15 vidíme, že funkce je klesající pro $x \leq 2$ a rostoucí pro $x \geq 2$. Pro určení řešení výpočtem potřebujeme derivaci funkce $f(x)$, tj.

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Odtud vyplývá, že

$$f'(x) < 0 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < 2, \quad \text{a proto podle Věty 3 je funkce klesající na } (-\infty, 2).$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad 2 < x < \infty, \quad \text{a proto je funkce rostoucí na } (2, \infty).$$

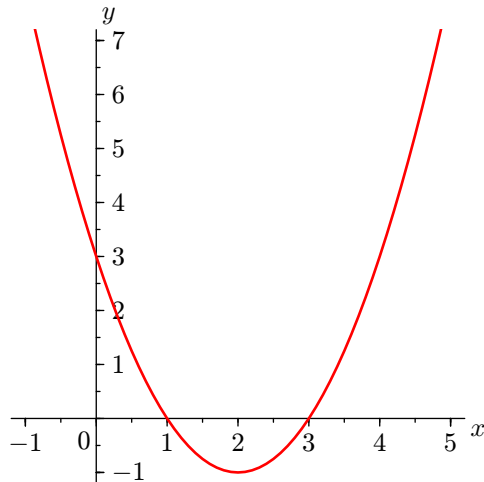
b) Z grafu funkce $f(x)$ na Obrázku 13 vidíme, že funkce je rostoucí pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$. Spočtíme derivaci funkce $f(x)$, tj.

$$f'(x) = 3x^2.$$

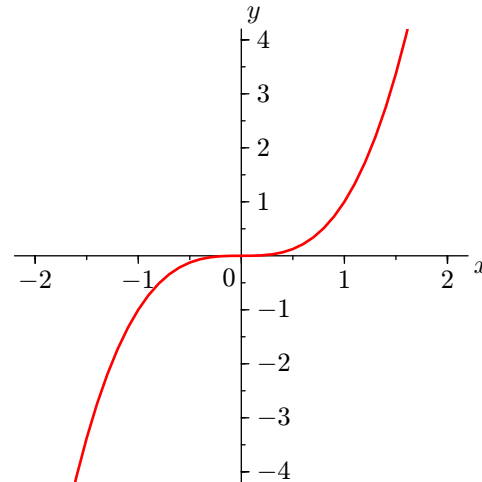
Odtud vyplývá, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < 0,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad 0 < x < \infty, \quad \text{a proto je funkce rostoucí na } (-\infty, \infty).$$



Obrázek 5: $f(x) = x^2 - 4x + 3$



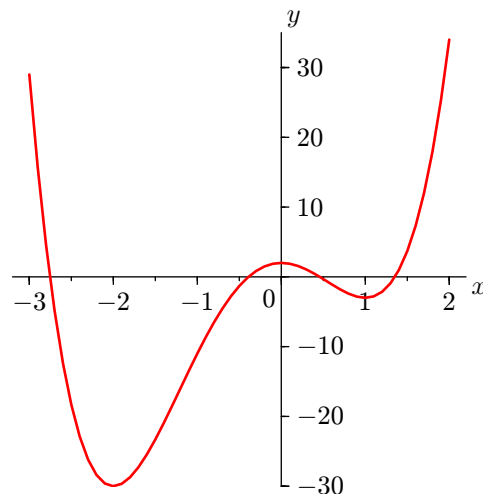
Obrázek 6: $f(x) = x^3$

6. Příklad

- a) Za pomoci grafu (viz Obrázek 16) funkce $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ odhadněte, ve kterých intervalech je funkce rostoucí a kdy klesající.
b) Užitím Věty 3 potvrďte váš odhad.

Řešení

- a) Z grafu funkce $f(x)$ na Obrázku 16 vidíme, že funkce je klesající pro $x \leq -2$, rostoucí pro $-2 \leq x \leq 0$, klesající pro $0 \leq x \leq 1$ a rostoucí pro $x \geq 1$.



Obrázek 7: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$

b) Derivací funkčního předpisu dostáváme

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x + 2)(x - 1).$$

Analyzujeme nyní znaménka jednotlivých členů (tj. jednotlivých „závorek“) a odtud odvodíme znaménko pro $f'(x)$.

interval	$(12x)(x + 2)(x - 1)$	znaménko $f'(x)$	závěr
$x < -2$	$(-)(-)(-)$	-	$f(x)$ je na $(-\infty, -2)$ klesající
$-2 < x < 0$	$(-)(+)(-)$	+	$f(x)$ je na $(-2, 0)$ rostoucí
$0 < x < 1$	$(+)(+)(-)$	-	$f(x)$ je na $(0, 1)$ klesající
$x > 1$	$(+)(+)(+)$	+	$f(x)$ je na $(1, \infty)$ rostoucí

2 Lokální extrém funkce

7. Definice Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **lokální maximum** (resp. **lokální minimum**) právě když existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) - \{x_0\}$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) - \{x_0\} \subseteq D(f)$ a zároveň pro $\forall x \in \mathcal{O}(x_0) - \{x_0\}$ platí $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$.

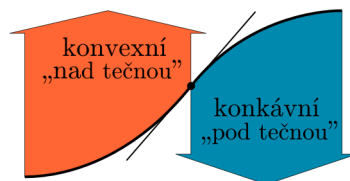
8. Analogicky definujeme **ostré lokální maximum**, pro které platí $f(x) < f(x_0)$ a **ostré lokální minimum**, pro které platí $f(x) > f(x_0)$.

9. Definice Necht' funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x_0)$. Body, pro které platí $f'(x_0) = 0$ nazveme **stacionární body**.

Jinými slovy můžeme říci, že stacionární body jsou body, podezřelé z extrému. Lokální extrém v nich nasat může, ale také nemusí. Bylo by jistě nepraktické, kdybychom lokální extrém vyšetřovali pomocí funkčních hodnot v jejich ryzím okolí. Přesto je to možné, pokud si uvědomíme vazbu na růst a klesání funkce a tím pádem i na znaménko první derivace (tj. $\text{sgn} f'(x)$). Velký pozor si ovšem musíme dát na body, ve kterých první derivace neexistuje. I to jsou potenciální adepti na extrém.

3 Konvexní a konkávní funkce

Znaménko derivace funkce $f(x)$ nám prozradí, kde je graf funkce rostoucí a kde klesající. Ovšem nic nám neřekne o způsobu zakřivení. Podívejme se například na Obrázek 8. Graf je rostoucí vlevo i vpravo od vyznačeného bodu. Ovšem vlevo leží „nad tečnou“ a vpravo „pod tečnou“ sestrojenou v tomto bodě.



Obrázek 8: Konvexní — „nad tečnou“, konkávní — „pod tečnou“

10. Definice Leží-li graf funkce $f(x)$ na nějakém okolí bodu B „nad tečnou“ sestrojenou v tomto bodě, řekneme, že $f(x)$ je **konvexní** v bodě B .

Leží-li graf funkce $f(x)$ „pod tečnou“, řekneme, že $f(x)$ je **konkávní** v bodě B .

Potřebujeme ovšem nějaký spolehlivý nástroj, který lze snadno použít při výpočtech. Ten nám dává následující věta.

11. Věta Necht' je funkce $f(x)$ dvakrát diferencovatelná na nějakém intervalu I .

- Je-li $f''(x) > 0$ na I , pak je $f(x)$ **konvexní** na intervalu I .
- Je-li $f''(x) < 0$ na I , pak je $f(x)$ **konkávní** na intervalu I .

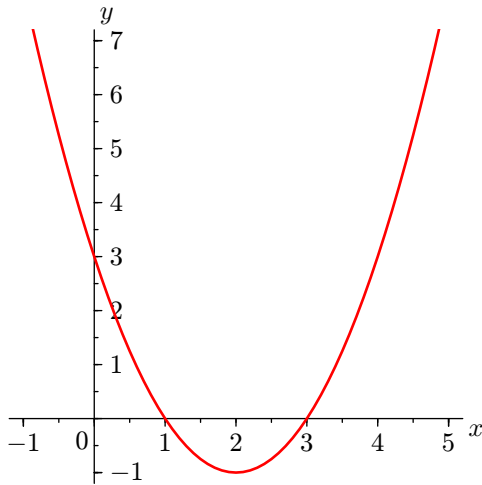
12. Příklad

Najděte intervaly, na kterých jsou funkce konvexní, a na kterých jsou konkávní.

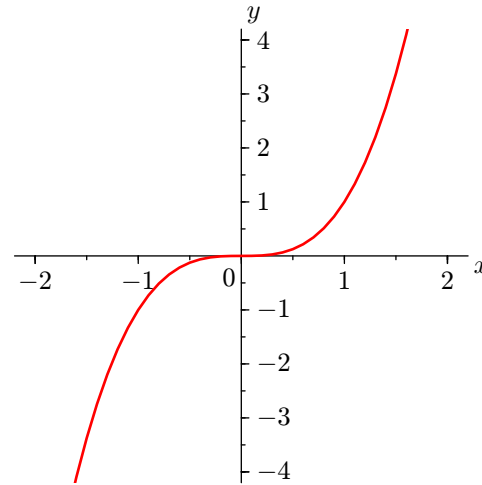
- $f(x) = x^2 - 4x + 3$,
- $f(x) = x^3$,
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Řešení

a) Výpočtem prvních dvou derivací získáme $f'(x) = 2x - 4$ a $f''(x) = 2$. Vzhledem k tomu, že $f''(x) > 0$ pro všechna x , je funkce $f(x)$ konvexní na $(-\infty, \infty)$. To souhlasí se situací na Obrázku 15.



Obrázek 9: $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Obrázek 10: $f(x) = x^3$

b) Výpočtem prvních dvou derivací získáme $f'(x) = 3x^2$ a $f''(x) = 6x$. Vidíme, že $f''(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f''(x) > 0$ pro $x > 0$. Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na $(-\infty, 0)$ a konvexní na $(0, \infty)$. To souhlasí se situací na Obrázku 13.

c) Výpočtem prvních dvou derivací získáme $f'(x) = 3x^2 - 6x$ a $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. Vidíme, že $f''(x) < 0$ pro $x > 1$ a $f''(x) > 0$ pro $x < 1$. Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na $(-\infty, 1)$ a konvexní na $(1, \infty)$. To souhlasí se situací na Obrázku 14.

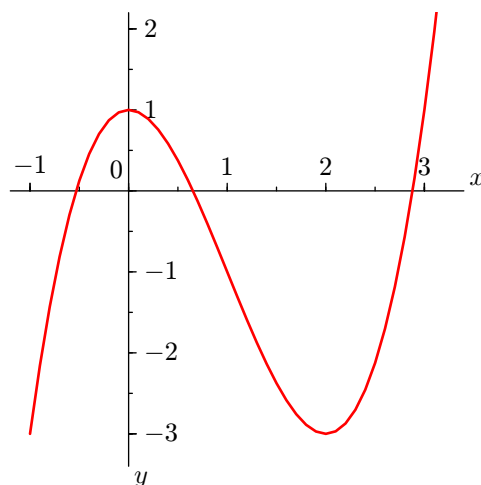
13. Věta Necht' x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$.

- Platí-li $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$, pak je v bodě x_0 ostré lokální minimum.
- Platí-li $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$, pak je v bodě x_0 ostré lokální maximum.

4 Globální (=absolutní) extrém funkce

14. Definice Necht' $f(x)$ je funkce a $M \subseteq D(f)$. Jestliže existuje bod $x_0 \in M$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$), pak řekneme, že funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 **globálního maxima** (resp. **globálního minima**) na množině M .

Někdy se místo pojmu globální minimum nebo maximum používá pojem absolutní minimum nebo maximum.

Obrázek 11: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

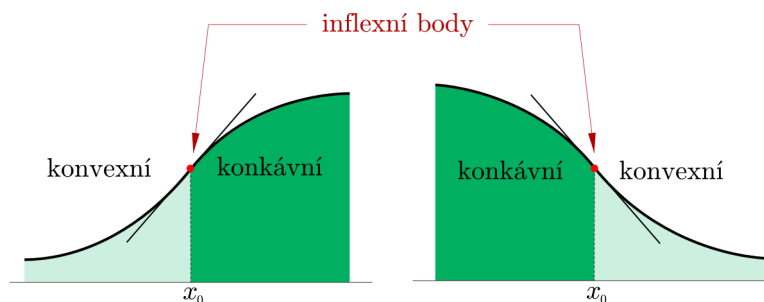
15. Věta Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$, pak na $\langle a, b \rangle$ nabývá globálních extrémů a to buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu.

16. Poznámka Při vyšetřování globálních extrémů na uzavřeném intervalu se postupuje tak, že vyšetříme nejprve lokální extrémů a určíme i jejich funkční hodnoty. Tyto funkční hodnoty pak porovnáme s funkčními hodnotami v krajních bodech intervalu. Nejvyšší funkční hodnota určí bod, ve kterém nastává globální maximum a nejnižší funkční hodnota určí bod, ve kterém nastává globální minimum. Pozor, globální extrém může nastat současně ve více bodech.

5 Inflexní body

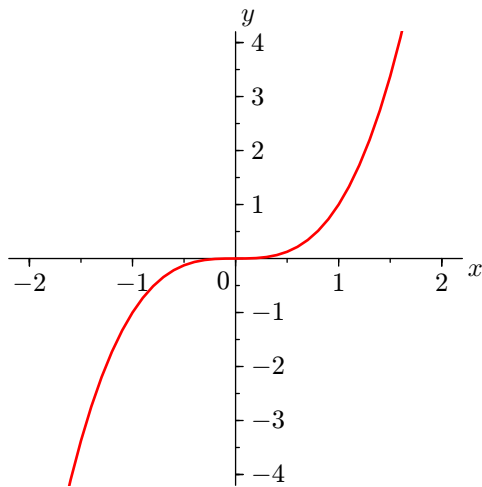
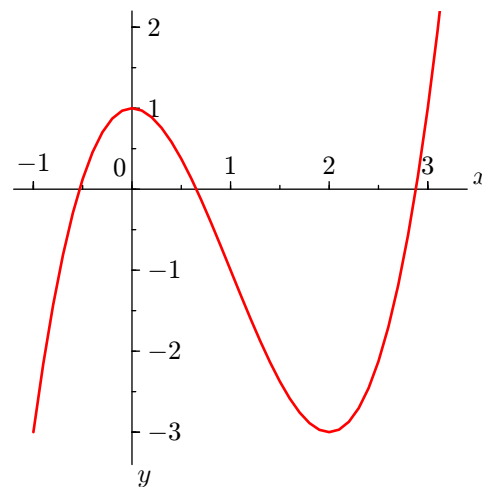
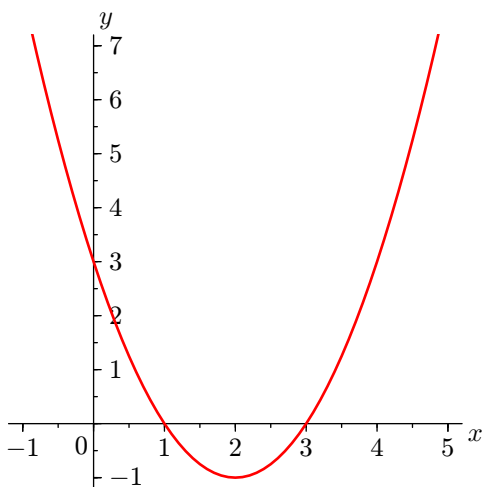
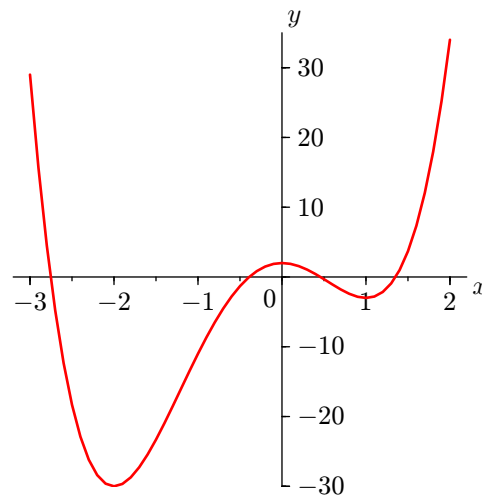
Bodům, ve kterých graf přechází z konvexního na konkávní a naopak, budeme věnovat zvláštní pozornost.

17. Definice Přechází-li graf spojitě funkce $f(x)$ v bodě $B = [x_0, f(x_0)]$ z jedné strany tečny na druhou, říkáme, že $f(x)$ má v bodě B (tj. pro x_0) **inflexní bod**. Viz Obrázek 12.



Obrázek 12: Inflexní body — podle definice

18. Příklad Například funkce $f(x) = x^3$ má inflexní bod pro $x = 0$, tj. v bodě $[0, 0]$ (viz Obrázek 13). Funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ má inflexní bod pro $x = 1$, tj. v bodě $[1, -1]$ (viz Obrázek 14). Funkce $f(x) = x^2 - 4x + 3$ nemá žádné inflexní body (viz Obrázek 15).

Obrázek 13: $f(x) = x^3$ Obrázek 14: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ Obrázek 15: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ Obrázek 16: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ **19. Příklad**

Použijte Obrázek 16 k hrubému odhadu souřadnic inflexních bodů funkce $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ a zkontrolujte své odhady výpočtem.

Řešení

Graf přechází z konvexního na konkávní někde mezi -2 a -1 , řekněme zhruba pro $x = -1,25$ a z konkávního na konvexní někde mezi 0 a 1 , řekněme pro $x = 0,5$.

Pro přesný výpočet inflexního bodu potřebujeme druhou derivaci funkce $f(x)$. $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$ a $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$. Položíme druhou derivaci rovnu nule, tj. $3x^2 + 2x - 2 = 0$.

A zjistíme body, kde se mění funkce z konvexní na konkávní, nebo naopak. To nastává pro $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1,22$ a pro $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0,55$. Pro úplnost výpočet doplníme tabulkou.

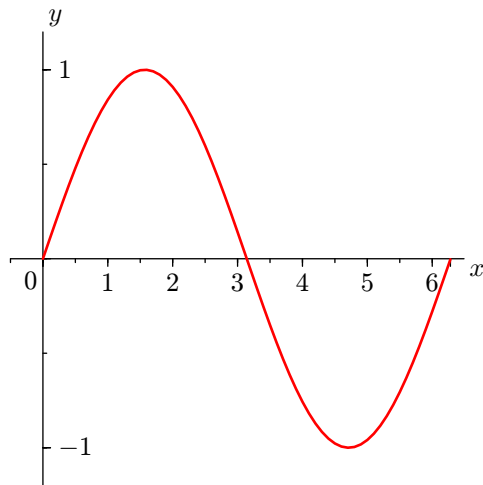
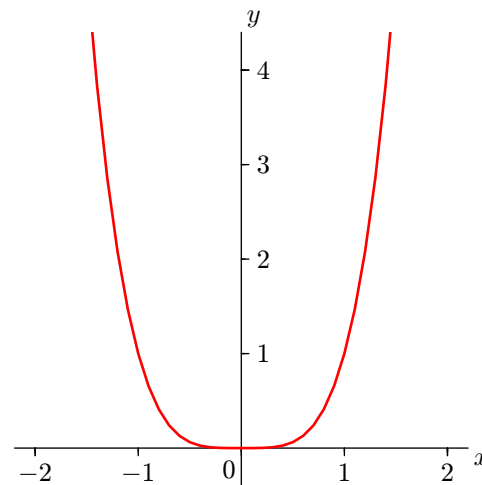
interval	znaménko $f''(x)$	závěr
$x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	+	$f(x)$ je na $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3})$ konvexní
$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	-	$f(x)$ je na $(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3})$ konkávní
$x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	+	$f(x)$ je na $(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$ konvexní

20. Příklad

Najděte inflexní bod funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Na závěr výsledky porovnejte s grafem této funkce.

Řešení

Výpočtem prvních dvou derivací obdržíme $f'(x) = \cos x$ a $f''(x) = -\sin(x)$. Tedy $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \pi$ a $f''(x) > 0$ pro $\pi < x < 2\pi$. Což implikuje, že graf je konkávní pro $0 < x < \pi$ a konvexní pro $\pi < x < 2\pi$, a tedy inflexní bod je pro $x = \pi \approx 3,14$, tj. v bodě $[\pi, 0]$. To souhlasí s Obrázkem 17.

Obrázek 17: $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$ Obrázek 18: $f(x) = x^4$

21. Poznámka V předchozích příkladech inflexní body funkce $f(x)$ splňovaly podmínku $f''(x) = 0$. Pokaždé však z $f''(x) = 0$ neplyne, že by v daném bodě musel být inflexní bod. Ukažme si to na následujícím příkladu.

22. Příklad

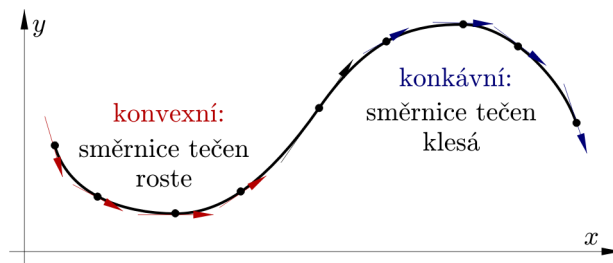
Najděte inflexní bod (pokud vůbec existuje) funkce $f(x) = x^4$.

Řešení

Výpočtem prvních dvou derivací obdržíme $f'(x) = 4x^3$ a $f''(x) = 12x^2$. Tedy $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (-\infty, \infty)$, proto je funkce konvexní na $(-\infty, \infty)$ a tudíž nemá žádné inflexní body. Upozorníme na skutečnost, že pro $x = 0$ sice platí, že $f''(x) = 0$, ale o inflexní bod nejde, viz Obrázek 18.

Aplikace inflexních bodů

Dosud jsme o inflexních bodech mluvili jen v souvislosti se změnou funkce z konvexní na konkávní a naopak. Uvědomme si, že inflexní body jsou body na křivce, ve kterých se mění směrnice tečen. Je-li funkce konvexní, směrnice, tečen narůstá a je-li konkávní, tak směrnice tečen klesá. (Viz Obrázek 19.) Ukažme si to na příkladu z fyziky.

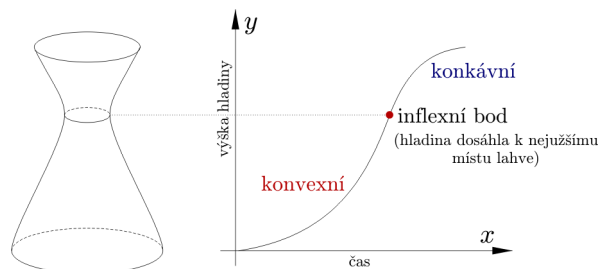


Obrázek 19: Konvexní a konkávní podle směrnic tečen

23. Příklad

Předpokládejme, že voda je nalita do lahve, která má tvar jako na Obrázku 20 a její objem narůstá konstantní rychlostí. Pozorujeme, jak při této rychlosti narůstá výška hladiny y vzhledem k času t . Zpočátku se bude výška hladiny y zvyšovat pomalu, protože láhev má širokou podstavu. Se zužováním láhve se

bude výška hladiny y zvyšovat rychleji až do nejužšího místa, kterým je hrdlo. Od té chvíle se bude výška hladiny y zvyšovat pomaleji, protože se láhev opět rozšiřuje. Tudiž hrdlo je bodem, ve kterém se mění rychlost změny výšky hladiny y v závislosti na čase t z rostoucí na klesající.



Obrázek 20: Výška hladiny v lahvi v závislosti na čase

Při vyšetřování průběhu funkce je třeba mít v ruce snadný rozhodovací aparát. Tím je následující věta.

24. Věta Je-li $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$, pak je x_0 inflexní bod.

Poznamenejme, že inflexní body může funkce $f(x)$ mít buď v bodech, kde $f''(x_0) = 0$ nebo v bodech, kde $f''(x)$ neexistuje.

6 Asymptoty

Názorně si pod pojmem asymptota představujeme přímku, ke které se graf funkce $f(x)$ nekonečně blíží. Při bližším pohledu si uvědomíme, že tyto přímky můžeme rozdělit na dva případy:

1. Buď přímka, která je asymptotou směrnicí nemá (např. asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$).
2. Nebo přímka asymptotu má (například u hyperboly).

25. Poznámka Přímka, která směrnicí nemá (tj. přímka bez směrnice) má rovnici $x = x_0$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Graf přímky bez směrnice je přímka kolmá k ose x (tzn. je rovnoběžná s osou y).

26. Definice Přímka $x = x_0$ se nazývá **asymptota bez směrnice** právě když funkce $f(x)$ má nevlastní limitu (tj. $\pm\infty$) v bodě x_0 zleva nebo zprava.

Pojmy Poznámka Body na ose x , které jsou podezřelé z toho, že jimi prochází asymptota bez směrnice jsou body vyřazené z definičního oboru $D(f)$. Například je-li pro nějakou funkci $f(x)$ definičním oborem $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, pak při vyšetřování asymptot bez směrnice počítáme tyto dvě jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \dots$$

Pokud alespoň jedna z nich vyjde $+\infty$ nebo $-\infty$, pak je přímka $x = -2$ asymptotou bez směrnice.

27. Poznámka Asymptot bez směrnice může být nekonečně mnoho, viz graf funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$.

28. Definice Necht u je přímka, která není rovnoběžná s osou y . Necht $d(x)$ značí vzdálenost bodu $[x, f(x)]$ od této přímky. Řekneme, že přímka u je **asymptota se směrnicí** právě když $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = 0$.

29. Poznámka Libovolná funkce $f(x)$ může mít maximálně dvě asymptoty se směrnicí.

Při vyšetřování asymptot se směrnici u funkce $f(x)$ hledáme ve skutečnosti přímku $y = kx + q$. Při výpočtu směrnice a posunutí využijeme následující tvrzení.

30. Věta Přímky $y = k_1x + q_1$ a $y = k_2x + q_2$ jsou asymptotou se směrnici funkce $f(x)$ právě když existují vlastní čísla $k_{1,2}$ a $q_{1,2}$ (tj. čísla různá od $\pm\infty$) taková, že platí

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

a

$$q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k_{1,2}x \quad (2)$$