Derivace - základní pravidla

Lenka Baráková

28. července 2005

Obsah

Derivujte $y = x^5 - x^3 + 1.$

$$y' = (x^5 - x^3 + 1)'$$

Derivujte $y = x^5 - x^3 + 1$.

$$y' = (x^5 - x^3 + 1)' = (x^5)' - (x^3)' + (1)'$$

- Funkce je ve tvaru součtu.
- Derivace součtu je součet derivací.

Derivujte $y = x^5 - x^3 + 1.$

$$y' = (x^5 - x^3 + 1)' = (x^5)' - (x^3)' + (1)' = 5x^4 - 3x^2$$

- První dva členy derivujeme podle vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- Derivace konstanty je 0.

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)'$$

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' - (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)'$$

- Funkce je ve tvaru součtu.
- Derivace součtu je součet derivací.

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' - (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2(x^4)' - (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})'$$

- Konstantu v prvním členu lze vytknout.
- Všechny členy přepíšeme do tvaru x^n .

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' - (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= 2(x^4)' - (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})' = 2 \cdot 4x^3 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + (-1) \cdot x^{-2}$$

Členy derivujeme podle vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' - (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2(x^4)' - (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})' = 2 \cdot 4x^3 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + (-1) \cdot x^{-2}$$

$$= 8x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

Výsledek upravíme.

Derivujte $y = (x^2 + 2)\sin x$.

$$y' = \left((x^2 + 2)\sin x\right)'$$

Derivujte $y = (x^2 + 2)\sin x$.

$$y' = \left((x^2 + 2) \sin x \right)'$$

Funkce je ve tvaru součinu.

Derivujte $y = (x^2 + 2)\sin x$.

$$y' = \Big((x^2+2)\sin x\Big)'$$
$$= (x^2+2)'\sin x + (x^2+2)(\sin x)'$$

Součin derivujeme podle pravidla
$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Derivujte $y = (x^2 + 2)\sin x$.

$$y' = \Big((x^2 + 2)\sin x\Big)'$$
$$= (x^2 + 2)'\sin x + (x^2 + 2)(\sin x)'$$
$$= 2x\sin x + (x^2 + 2)\cos x.$$

Červeně označený člen derivujeme jako součet, přičemž derivace konstanty je 0.

Derivujte $y = 3\ln x \operatorname{arctg} x$.

$$y' = \Bigl(3\ln x \operatorname{arctg} x\Bigr)'$$

Derivujte $y = 3\ln x \operatorname{arctg} x$.

$$y' = \Big(3\ln x \operatorname{arctg} x\Big)'$$

$$= 3\Big(\ln x \operatorname{arctg} x\Big)'$$

Vytkneme-li konstantu, je funkce ve tvaru součinu.

Derivujte $y = 3\ln x \operatorname{arctg} x$.

$$y' = \Big(3\ln x \operatorname{arctg} x\Big)'$$

$$= 3\Big(\ln x \operatorname{arctg} x\Big)'$$

$$= 3\Big((\ln x)' \operatorname{arctg} x + \ln x (\operatorname{arctg} x)'\Big)$$

Součin derivujeme podle pravidla
$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Derivujte $y = 3\ln x \operatorname{arctg} x$.

$$
\begin{aligned}
y' &= \Big(3\ln x \operatorname{arctg} x\Big)' \\
&= 3\Big(\ln x \operatorname{arctg} x\Big)' \\
&= 3\Big((\ln x)' \operatorname{arctg} x + \ln x (\operatorname{arctg} x)'\Big) \\
&= 3\left(\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x + \ln x \frac{1}{1+x^2}\right).
\end{aligned}
$$

Elementární funkce derivujeme podle vzorců.

Derivujte $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)'$$

Derivujte $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)'$$

Funkce je ve tvaru podílu.

Derivujte $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2}$$

Podíl derivujeme podle pravidla

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Derivujte $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x+1) - x^2 1}{(x+1)^2}$$

Jednotlivé členy derivujeme podle základních vzorců.

Derivujte $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x+1) - x^2 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Výsledek upravíme.

Derivujte $y = \dfrac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1}\right]'$$

Derivujte $y = \dfrac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1}\right]'$$

Funkce je ve tvaru podílu.

Derivujte $y = \dfrac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1}\right]' = \frac{(xe^x)'(x+1) - xe^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

Podíl derivujeme podle pravidla

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Derivujte $y = \dfrac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1}\right]' = \frac{(xe^x)'(x+1) - xe^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x 1}{(x+1)^2}$$

Červený člen derivujeme jako součin podle pravidla $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Derivujte $y = \dfrac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1}\right]' = \frac{(xe^x)'(x+1) - xe^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x x + e^x + e^x x^2 + xe^x - xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$$

Výsledek upravíme.