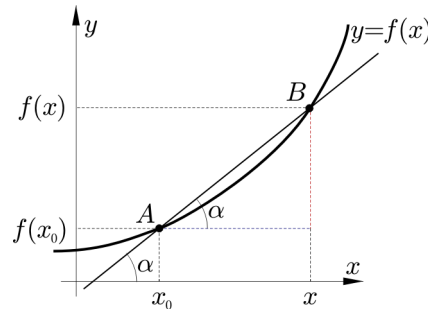


## Derivace funkce

Dříve než přistoupíme k vlastní definici pojmu derivace, podívejme se na obrázek 1. Na křivce  $y = f(x)$  je pevně zvolený bod  $A[x_0, f(x_0)]$ . „Kousek“ od něj si zvolme bod  $B[x, f(x)]$ . Sečna  $AB$  vyjádřená ve směrnicovém tvaru jako přímka  $y = k_s x + q$  má směrnici  $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Limitním přechodem (tj. bod  $B$  volíme nekonečně blízko bodu  $A$ ) se sečna změní v tečnu, pro niž je směrnice  $k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .



Obrázek 1: Grafické znázornění derivace

**1. Definice** Nechť  $f$  je funkce a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

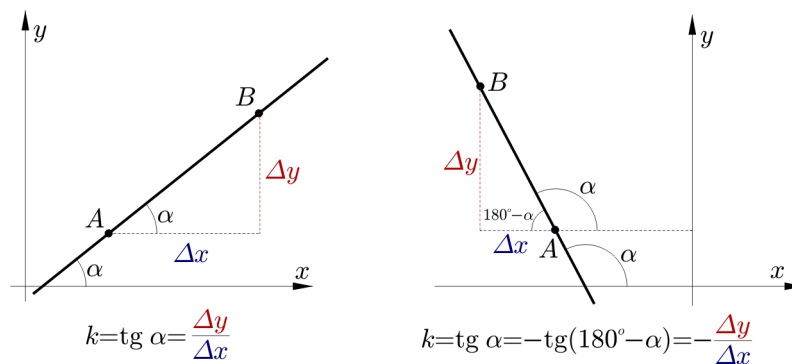
nazýváme tuto limitu **derivací funkce v bodě**  $x_0$  a značíme ji  $f'(x_0)$ .

V ostatních případech, tj. limita je rovna  $\pm\infty$ , nebo neexistuje, řekneme, že funkce  $f$  derivaci v bodě  $x_0$  nemá.

**2.** Z matematického hlediska pod pojmem derivace funkce v bodě tedy vidíme směrnici tečny ke grafu funkce  $f(x)$ .

Z fyzikálního hlediska jde o změnu sledované veličiny nejčastěji v čase. Proto se ve fyzice k označení derivace podle času  $t$  používá značení  $\dot{f}(t)$ .

**3. Poznámka** Směrnice přímky  $y = kx + q$  (tj. číslo  $k$ ) je definována jako tangenta úhlu  $\alpha$ , který tato přímka svírá s kladným směrem osy  $x$ . Hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček považujeme za kladnou, hodnotu měřenou po směru otáčení hodinových ručiček považujeme za zápornou. Tak například hodnoty  $210^\circ$  a  $-150^\circ$  udávají směr stejné přímky. Podívejte se na příklady na Obrázku 2.



Obrázek 2: Směrnice přímky

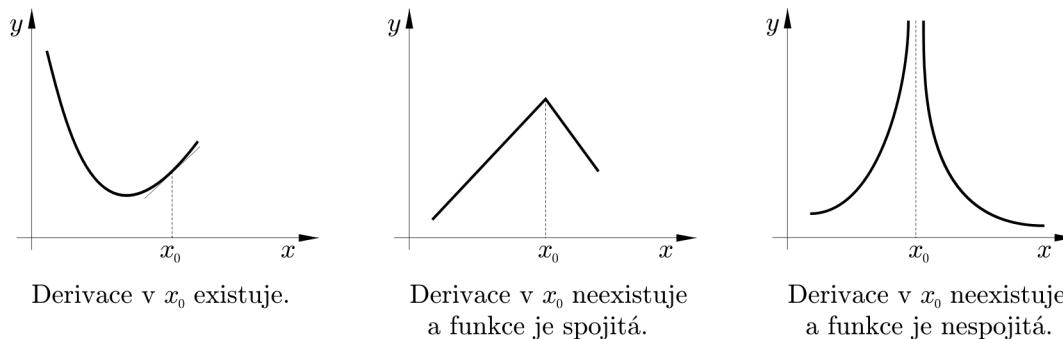
4. Podobně, jako tomu bylo u limit, definujeme derivaci v bodě zprava a zleva. Označujeme je  $f'(x_0^+)$  a  $f'(x_0^-)$

**5. Definice** Necht  $f(x)$  je funkce a  $M \subseteq D(f)$  množina bodů  $x_0$ , v nichž má  $f(x)$  derivaci. Pak funkce, která každému  $x_0$  přiřadí hodnotu derivace v bodě  $x_0$  se nazývá **derivací funkce**  $f(x)$  a značí se  $f'(x)$ .

**6. Věta** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in D(f)$  derivaci  $f'(x_0)$  právě když má derivaci zprava i zleva a platí  $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ .

**7. Věta** Má-li funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  **derivaci**, pak je v  $x_0$  **spojitá**.

Jasnou představu o důležitosti této věty si uděláme z obrázku 3.



Obrázek 3: Existence derivace ve vztahu ke spojitosti

### 8. Věta Základní vzorce pro derivování

1.  $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R};$
2.  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R}, x > 0;$
3.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, x \in \mathbb{R};$
4.  $(e^x)' = e^x;$
5.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$
6.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1;$
7.  $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R};$
8.  $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R};$
9.  $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$
10.  $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq 0 + k\pi;$
11.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$
12.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$
13.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$
14.  $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Málokdy se stane, že derivujeme přímo základní funkci. Většinou potřebujeme zderivovat součin nebo

podíl dvou funkcí, nejčastěji však složenou funkcí. Uvedme základní pravidla pro derivování.

### 9. Věta Základní pravidla pro derivování

1.  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;
2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ;
3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ , **(derivace součinu)**;
4.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ , **(derivace podílu)**;
5.  $(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ , **(derivace složené funkce)**;
6.  $(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \cdot \ln f(x)})'$ .

**10. Poznámka** Platí:  $\sin^2 x = (\sin x)^2$ ;  $\cos x^2 = \cos(x^2)$ ;  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ;  $\frac{1}{x} = x^{-1}$ .

**11. Definice** Provedeme-li  $n$ -krát derivaci funkce  $f(x)$  (tedy pokaždé znovu zderivujeme získanou derivaci), dostaneme **derivaci  $n$ -tého řádu**.

Označení:  $f^{(n)}$ ; derivace nižších řádů značíme  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ .

**12.** Celou dobu máme na paměti, derivace v bodě se týká směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Uvedme tedy jeden z možných způsobů vyjádření tečny a normály ke grafu funkce  $f(x)$ .

**13. Poznámka Rovnice tečny** ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $T[x_0, y_0]$ :

$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Rovnice normály** ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $T[x_0, y_0]$ :

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$