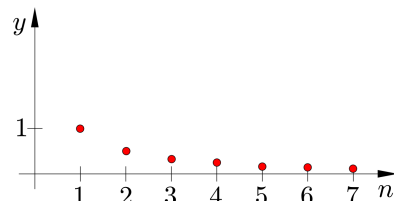


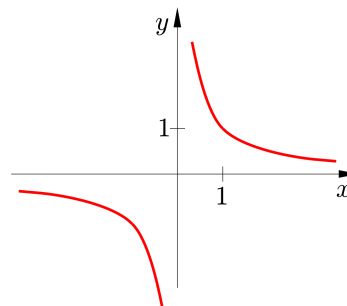
Limita funkce

Podobně jako tomu bylo u posloupností, kde nás zajímalo „chování“ posloupnosti $\{a_n\}$ pro $n \rightarrow \infty$, zaměříme svou pozornost na chování funkcí v okolí bodů, které jsou z nějakého důvodu zajímavé. Mohou to být body, ve kterých funkce není definovaná, nebo se v nich funkce chová „zvláštně“ a podobně.

U posloupností bylo jasně dáno, že nás zajímá $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, u limit funkcí to může být mnohem zajímavější. Podívejme se na následující obrázky:



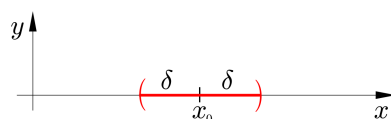
Obrázek 1: Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$



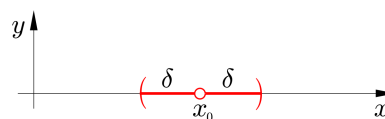
Obrázek 2: Funkce $y = \frac{1}{x}$

Než přejdeme k samotné definici limity funkce je třeba uvést následující pojmy.

1. Definice Okolí bodu x_0 , kde $\delta > 0$, je interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \mathcal{O}(x_0)$, viz Obr. 3.
Ryzí okolí bodu x_0 , je množina $\mathcal{O}(x_0) - \{x_0\}$, viz Obr. 4.

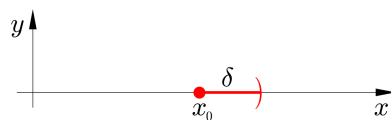


Obrázek 3: Okolí bodu x_0

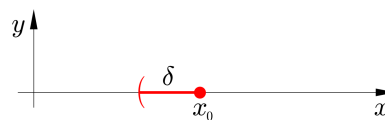


Obrázek 4: Ryzí okolí bodu x_0

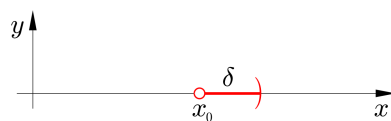
2. Definice Pravé (resp. levé) okolí bodu x_0 je interval $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, resp. $(x_0 - \delta, x_0)$, viz Obr. 5 a 6.
Pravé (resp. levé) ryzí okolí bodu x_0 , je interval $(x_0, x_0 + \delta)$, resp. $(x_0 - \delta, x_0)$, viz Obr. 7 a 8.



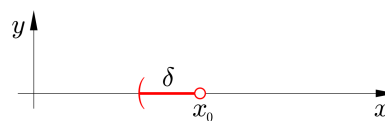
Obrázek 5: Pravé okolí bodu x_0



Obrázek 6: Levé okolí bodu x_0



Obrázek 7: Pravé ryzí okolí bodu x_0



Obrázek 8: Levé ryzí okolí bodu x_0

3. Definice Okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$), je každý interval (K, ∞) (resp. $(-\infty, L)$), kde $K, L \in \mathbf{R}$. Viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Okolí ∞

Podobně jako u posloupností lze očekávat, že limita funkce $f(x)$ bude buď reálné číslo, nebo $\pm\infty$, nebo vůbec neexistuje. Abychom definici limity funkce mohli uvést co nejobecněji, rozšíříme reálná čísla o $+\infty$ a $-\infty$. Zavedeme označení $\mathbf{R}^+ = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4. Definice Řekneme, že **funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbf{R}^+$ limitu $a \in \mathbf{R}^+$** právě když platí

$$\forall \mathcal{O}(a) \exists \mathcal{O}(x_0) : \forall x \in \mathcal{O}(x_0) - \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}(a).$$

Tento matematický zápis čteme takto:

Pro každé okolí bodu a existuje okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z ryzího okolí bodu x_0 platí, že funkční hodnota v bodě x leží v okolí bodu a .

Označení: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

5. Poznámka Je nesmírně důležité si uvědomit podstatný detail této definice. K tomu, aby měla funkce $f(x)$ v bodě x_0 limitu není nutné mít funkci v tomto bodě definovanou. Uvědomme si, že podstatné je, že „pouze“ funkční hodnoty z **ryzího** okolí bodu x_0 musí padnout do okolí čísla a , které je limitou.

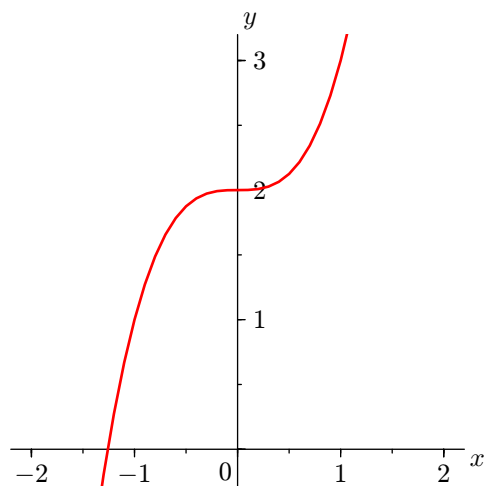
Uveďme si názorný příklad, jak to tedy je s tím ryzím okolím.

6. Příklad Odhadněte limitu následujících funkcí v bodě $x_0 = 0$:

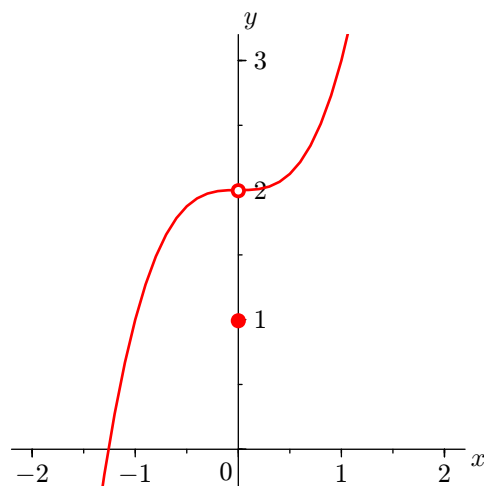
a) $f(x) = x^3 + 2$;

b) $g(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & \text{pro } x \neq 0, \\ 1, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

Řešení Namalujme si grafy těchto funkcí:



Obrázek 10: $f(x) = x^3 + 2$



Obrázek 11: $g(x) = x^3 + 2$ pro $x \neq 0$

Odpověď na otázku, jaká je tedy limita těchto funkcí v bodě 0 mnohé jistě překvapí, ale jde jen o to, ujasnit si definici limity a pojem ryzího okolí bodu.

Tedy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$.

7. Poznámka Chceme-li nadefinovat pojem **limita** v bodě x_0 **zprava**, resp. **zleva**, tak v definici stačí nahradit ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) - \{x_0\}$ ryzím pravým okolím $(x_0, x_0 + \delta)$, resp. levým okolím $(x_0 - \delta, x_0)$.

Označení: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

8. Věta Funkce $f(x)$ **má** v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ **limitu $a \in \mathbf{R}^+$** právě když

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$$

9. Věta Libovolná funkce má v libovolném bodě **nejvýše jednu limitu**.

10. Věta 1. Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $g(x)$ je ohraničená na nějakém ryzím okolí bodu x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

2. Nechť $x_0 \in \mathbf{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, kde $a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$.

3. Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

4. Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a zároveň $f(x) \neq 0$ pro $x \in \mathcal{O}(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$.

11. Poznámka Zapamatujte si tyto důležité limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Spojitost funkce

12. Definice Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbf{R}$ právě když

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

13. Příklad Podívejme se, jak to vypadá se spojitostí funkcí z Příkladu 6. Už z obzázku je patrné, že funkce $f(x)$ je v bodě $x_0 = 0$ spojitá a funkce $g(x)$ je v bodě 0 nespojitá (tj. funkční hodnota $g(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$).

14. Věta (1. Weierstrassova) Nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle \Rightarrow f(x)$ je na $\langle a, b \rangle$ ohraničená.

15. Věta (2. Weierstrassova) Nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle \Rightarrow f(x)$ nabývá na $\langle a, b \rangle$ své největší a nejmenší hodnoty.

16. Věta (Bolzanova) Nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

17. Poznámka Praktickou ukázkou užitečnosti Bolzanovy věty je odhadování řešení rovnice metodou půlení intervalů.

18. Příklad Metodou půlení intervalů určete přibližné řešení rovnice $x^3 + 5x^2 - x + 3 = 0$ s přesností 0,07.

Řešení Odhadneme interval, ve kterém by kořen polynomu $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 3$ měl ležet: $f(-5) = 8$ a $f(-6) = -27$.

Tedy podle Bolzanovy věty interval $(-6, -5)$ obsahuje kořen. Půlíme intervaly tak dlouho, až odhadneme, že kořen leží v intervalu, který má délku menší, než požadovaná přesnost. V tomto příkladu je výsledným intervalem $(-5.25, -5.1875)$.