

Determinant matice

Robert Mařík a Lenka Baráková

3. září 2005

Obsah

Vypočtete následující determinant.	3
Vypočtete následující determinant.	6
Vypočtete následující determinant.	9
Vypočtete následující determinant.	19

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Rozvoj podle 3 řádku je nejvýhodnější, protože pouze prvek a_{32} je nenulový, ostatní členy rozvoje proto ani nezapisujeme:

prvek $\cdot (-1)^{\text{řádek}+\text{sloupec}}$ \cdot **minor**

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= (-2) \cdot (-1) \cdot (-4 + 4 + 0 - (2 + 0 + 8))$$
$$= -20$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Vypočteme ten stejný determinant rozvojem podle posledního sloupce.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Poslední sloupec obsahuje dva nenulové prvky a rozvoj tedy bude obsahovat dva determinanty nižšího řádu.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-4) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-2) \cdot [-4 + 0 + 0 - (-2 + 0 + 0)] \\ - 4 \cdot [0 + 4 + 0 - (0 - 2 + 0)] \\ = (-2) \cdot (-2) - 4 \cdot 6 = -20$$

Determinanty třetího řádu dopočítáme Sarussovým pravidlem.

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Druhý řádek bude klíčový.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 & | & 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & | & (-2)1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & | & - & & & \\ 0 & 3 & -1 & 2 & | & & & & \end{vmatrix}$$

Upravíme první řádek. Pozor! Řádky nepřehazujeme.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left. \begin{matrix} (-1)1 \\ - \end{matrix} \right\} \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Upravíme třetí řádek.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Poslední řádek pouze opíšeme.

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Vytvoříme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce.
- Červený prvek zůstane, bude vynásoben výrazem $(-1)^{\text{řádek} + \text{soupec}}$.
- Vynecháme první sloupec a druhý řádek.

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$
$$= - \left[-67 - 227 \right]$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \left[-8 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-9) \cdot 1 \right. \\ \left. - (5 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot (-9) \cdot (-8)) \right]$$
$$= -1 \left[-80 + 40 - 27 - (75 + 8 + 144) \right]$$
$$= - \left[-67 - 227 \right] = 294$$

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočtete následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & \end{vmatrix}$$

- **Druhý řádek** bude klíčový a budeme vytvářet nuly ve třetím sloupci (obsahuje už jednu nulu a obsahuje nejmenší čísla).
- **První řádek** už nulu ve třetím sloupci má, takže jej jenom opíšeme.
- Dáváme pozor na to, abychom nezaměnili pořadí řádků.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ - \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku a_{33} .

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2) \\ - \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytvoříme nulu z prvku a_{43} .

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podle třetího sloupce.

prvek $\cdot (-1)^{\text{řádek}+\text{soupec}}$ \cdot (determinant nižšího řádu)

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Vytkneme číslo 2 ve druhém řádku.

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot [-6 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 9)] = -2 \cdot (-1) = 2$$

KONEC