

Matice a determinanty - neřešené příklady

1. Příklad Jsou dány matice A, B, C . Spočtěte:

- a) $(AB)^T - 2C$;
 b) $BCA - A^T C^T$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Příklad Jsou dány matice A, B . Ověřte platnost vztahu $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Příklad Najděte všechny matice komutativní s maticí A , s maticí B a s oběma maticemi současně.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Příklad Spočtěte n -té mocniny následujících matic. Návod: Vypočtěte mocniny pro malá n , tj. $1, 2, 3, \dots$. Na základě získaných výsledků zformulujte hypotézu pro n -tou mocninu. Hypotézu pak dokažte pomocí matematické indukce.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?.$$

5. Příklad Najděte všechny matice typu $3/3$ nad množinou $\{0, 1\}$, které mají vlastnost $A^2 = E$, tj. jsou inverzní samy k sobě. Stejnou úlohu řešte nad množinou $\{-1, 0, 1\}$.

6. Příklad Buď A čtvercová matice s vlastností $A^2 - A - E = 0$. Dokažte, že k A existuje inverzní matice A^{-1} a určete ji.

7. Příklad Je dána matice typu $3/3$. Spočtěte inverzní matici

- a) pomocí adjungované matice;
 b) pomocí elementárních transformací.
 Proveďte zkoušku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = ?, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?.$$

8. Příklad K daným maticím nalezněte inverzní

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = ?, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ?, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = ?.$$

9. Příklad Jsou dány matice A, B typu $2/2$. Spočtěte $B^{-1}A^{-1} - (AB)^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Příklad Vypočtěte Sarrusovým pravidlem následující determinanty, je-li z komplexní číslo v goniometrickém tvaru $z = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$.

$$\begin{vmatrix} z^3 & 1 \\ 1 & z^2 \end{vmatrix} = ?, \quad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ -z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = ?.$$

11. Příklad Kolik času je zapotřebí k výpočtu determinantu matice 10×10 podle definice, je-li doba potřebná k vynásobení 10 čísel 1s a k jejich sečtení 0.1s?

12. Příklad Vypočtěte determinant matice:

- Sarrusovým pravidlem;
- úpravou na schodovitý tvar;
- rozvojem podle třetího řádku;
- rozvojem podle druhého sloupce.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = ? \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

13. Příklad Matice typu n/n je postupně po řádcích naplněna čísly $1, 2, \dots, n^2$. Spočtěte, čemu je roven její determinant pro libovolné n .

14. Příklad Spočtěte následující determinanty matic typu n/n .

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ & & & \dots & \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = ? \quad \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = ?$$