

MATEMATIKA 1

Garant předmětu:

Prof. RNDr. Josef DIBLÍK, DrSc. (do 31.8.2002)

Prof. RNDr. Jan CHVALINA, DrSc. (od 1.9.2002)

Autoři textu:

Prof. RNDr. Josef DIBLÍK, DrSc.

Doc. RNDr. Jaromír BAŠTINEC, CSc.

Mgr. Helena DURNOVÁ, Ph.D.

Mgr. Martin ŘEZÁČ

Obsah

0.1	Označení	8
1	Základní pojmy matematické logiky a teorie množin	9
1.1	Základní matematické pojmy	9
1.2	Elementy matematické logiky	10
1.3	Definice, věty, druhy důkazů	10
1.4	Číselné množiny	11
1.5	Intervaly	11
1.6	Základní vlastnosti komplexních čísel	11
1.7	Zavedení pojmu funkce, inverzní funkce, funkce dvou a více proměnných . .	16
1.8	Inverzní funkce	18
1.9	Trigonometrické funkce	19
1.10	Inverzní trigonometrické funkce	21
1.11	Exponenciální a logaritmické funkce	21
1.12	Hyperbolické a inverzní hyperbolické funkce	22
1.13	Definice funkce komplexní proměnné	22
1.14	Mnohočleny a racionální funkce	23
2	Matice a determinanty. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení.	30
2.1	Matice	30
2.2	Determinant	32
2.3	Hodnost matice	35
2.4	Maticová algebra	36
2.5	Soustavy lineárních rovnic – základní pojmy	41
2.6	Řešení soustav lineárních algebraických rovnic	42
2.7	Gaussova eliminační metoda	45
3	Vektorové prostory	48
3.1	Vektorový prostor	48
3.2	Báze, dimenze, souřadnice.	52
3.3	Transformace souřadnic.	55

4	Skalární, vektorový a smíšený součin	57
4.1	Skalární součin	57
4.2	Ortogonální průmět.	60
4.3	Vektorový počet v E^3 - vektorový a smíšený součin.	62
5	Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů	66
5.1	Lineární útvary v E^3	66
5.2	Analytická geometrie lineárních útvarů.	69
5.3	Kanonické tvary kuželoseček.	70
5.4	Kanonické tvary kvadrik.	70
5.5	Kuželosečky a kvadriky — základní vlastnosti	72
6	Diferenciální počet funkcí jedné proměnné	74
6.1	ε - okolí	74
6.2	Limita funkce	74
6.3	Pravostranná a levostranná limita funkce. Limita zprava a zleva	76
6.4	Nevlastní limita funkce	77
6.5	Další případy limit	77
6.6	Některé věty o limitách	77
6.7	Limita složené funkce	78
6.8	Některé známé limity	79
6.9	Spojitosť funkce	79
6.10	Některé vlastnosti spojitých funkcí	81
6.11	Odstranitelná nespojitost	81
6.12	Klasifikace nespojitostí	82
6.13	Funkce spojitě na uzavřeném intervalu	83
6.14	Tečna ke křivce	83
6.15	Derivace	84
6.16	Geometrický a fyzikální význam derivace	85
6.17	Tabulka derivací základních elementárních funkcí	85
6.18	Derivace zprava a zleva	86
6.19	Některá základní pravidla pro derivování	86
6.20	Derivace složené funkce	86
6.21	Diferenciál funkce	86
6.22	Derivace inverzní funkce	87
6.23	Derivace a diferenciály vyšších řádů	87
6.24	Numerické derivování	88
6.25	Derivování s programem MAPLE V	89
6.26	Taylorovy polynomy	89
6.27	Taylorův vzorec	90
6.28	Inverzní trigonometrické funkce a jejich derivace	90
6.29	Derivace hyperbolických funkcí	91
6.30	Derivace inverzních hyperbolických funkcí	91
6.31	Klasifikace funkcí	92
6.32	Některé věty o diferencovatelných funkcích	93

6.33	Testování monotónnosti funkce	94
6.34	Extrémy funkcí	94
6.35	Nutné podmínky pro extrémy	94
6.36	Konvexnost a konkávnost křivky. Inflexní body.	95
6.37	Asymptoty křivky	95
6.38	Obecné schéma pro vyšetřování průběhu funkce	95
6.39	Některé numerické metody pro řešení nelineárních rovnic a soustav rovnic	96
1.	Metoda půlení (Metoda rozdělování úsečky na dva stejné díly)	96
2.	Metoda tečen (Metoda proporciálních částí)	97
3.	Newtonova metoda (Metoda tečen)	98
4.	Iterační metoda	99
5.	Iterační metoda pro soustavu dvou rovnic	100
6.	Přibližný odhad ???	100
7.	Řešení rovnic pomocí programu MAPLE V	101
6.40	Vektorová funkce skalárního argumentu	103
1.	Vektorová funkce. Hodograf.	103
2.	Limita a spojitost vektorové funkce	104
3.	Derivace vektorové funkce	105
4.	Základní pravidla pro derivování vektorové funkce	105
5.	Aplikace v mechanice	106
6.41	Komplexní funkce reálné proměnné	106
1.	Definice komplexní funkce	106
2.	Derivace komplexní funkce reálné proměnné	107
7	Diferenciální počet funkcí více proměnných	108
7.1	Diferenciální počet funkcí více proměnných	108
1.	Funkce v \mathbb{R}^n	108
2.	Limita funkce	109
3.	Spojitost funkce	110
4.	Parciální derivace	111
5.	Geometrický význam parciální derivace	111
6.	Gradient	112
8	Diferenciální počet funkcí více proměnných 2.	113
7.	Parciální derivace vyšších řádů	113
8.	Nezávislost smíšených derivací na pořadí derivování	113
9.	Diferencovatelná funkce. Totální diferenciál.	114
10.	Diferenciály vyšších řádů	116
11.	Rovnice tečné roviny k ploše	117
12.	Geometrická interpretace totálního diferenciálu funkce dvou pro- měnných	118
13.	Aplikace totálního diferenciálu na přibližné výpočty	119
14.	Derivace složené funkce	120
15.	Směrová derivace	121
16.	Taylorův vzorec	122

17.	Implicitní funkce	123
18.	Výpočet derivace vyšších řádů pro implicitní funkce	124
19.	Další případy pro výpočet derivací	125
20.	Extrémy funkcí více proměnných	126
21.	Dostatečné podmínky pro extrémy funkcí více proměnných	126
22.	Dostatečné podmínky pro obecný případ	127
23.	Určení maximální a minimální hodnoty funkce na uzavřené oblasti .	128
24.	Vázané extrémy	129
9	Integrální počet funkcí jedné proměnné	131
9.1	Primitivní funkce a neurčitý integrál	131
9.2	Základní tabulka integrálů	131
9.3	Některé vlastnosti integrálů	132
10	Integrační metody	133
10.1	Integrace substitucí	133
10.2	Integrace per partes	133
10.3	Integrace racionálních lomených funkcí	134
10.4	Integrace některých iracionálních funkcí	136
10.5	Integrace trigonometrických funkcí	138
11	Určitý integrál a jeho aplikace	139
11.1	Plocha trapezoidu omezeného křivkami	139
11.2	Určitý integrál	139
11.3	Vlastnosti určitého integrálu	140
11.4	Odhad určitého integrálu. Věta o střední hodnotě.	141
11.5	Derivace integrálu vzhledem k horní mezi	141
11.6	Newton-Leibnizova věta	141
11.7	Integrace per partes pro určité integrály	141
11.8	Metoda substituce pro určité integrály	142
11.9	Numerické integrování	142
1.	Úvod	142
2.	Obdélníkové pravidlo	142
3.	Lichoběžníkové pravidlo	143
4.	Simpsonovo pravidlo	143
5.	Složené kvadratické formule	143
11.10	Nevlastní integrály	146
1.	Nekonečné integrály	146
2.	Integrály nespojitých funkcí	147
11.11	Aplikace určitého integrálu	148
1.	Obsah rovinného obrazce	148
2.	Délka oblouku	148
3.	Objem tělesa	149
4.	Obsah rotační plochy	149
11.12	Integrace s programem MAPLE V	149

1.	Analytická integrace s programem MAPLE	149
2.	Určité integrály s programem MAPLE	150
12	Dvozměrný a vícerozměrný integrál (křivkový a plošný integrál)	151
12.1	Integrální počet funkcí více proměnných	151
1.	Objem křivostěnného válce	151
2.	Definice dvojného integrálu	151
3.	Vlastnosti dvojného integrálu	152
4.	Vyčíslení hodnoty dvojného integrálu	153
5.	Metoda substituce pro dvojné integrály	154
6.	Dvojný integrál v polárních souřadnicích	155
7.	Trojný integrál	156
8.	Geometrický a fyzikální význam trojného integrálu	156
9.	Vyčíslení hodnoty trojného integrálu	157
10.	Metoda substituce pro trojný integrál	158
11.	Cylindrické souřadnice	158
12.	Sférické souřadnice	159
13.	Křivkové integrály	160
14.	Křivkové integrály a práce	163
15.	Nezávislost křivkového integrálu na cestě	164
16.	Greenova věta	165
17.	Důsledek Greenovy věty	166
18.	Obsah plochy	166
19.	Obsah plochy v pravoúhlých souřadnicích	167
20.	Plošné integrály	168
21.	Věta o divergenci	170
22.	Stokeova věta	170

Seznam obrázků

1.1.1 $A \cup B$	9
1.1.2 $A \cap B$	9
1.1.3 $A \setminus B$	9
1.6.1 Komplexní číslo $z = x + iy$ v komplexní rovině	12
1.6.2 z, \bar{z} - čísla komplexně sdružená	12
1.6.3 Trigonometrický tvar komplexního čísla	13
1.6.4 $ z_1 + z_2 , z_1 - z_2 $	14
1.6.5 Řešení $z^5 = 1$	16
1.7.1 Funkce rostoucí	17
1.7.2 Funkce klesající	17
1.7.3 Funkce nerostoucí	17
1.7.4 Funkce neklesající	17
1.7.5 Funkce lichá	18
1.7.6 Funkce sudá	18
1.7.7 Funkce periodická	18
1.8.1 Funkce inverzní	19
1.9.1 Funkce sinus	20
1.9.2 Funkce cosinus	20
1.9.3 Funkce tangens	20
1.9.4 Funkce cotangens	20
1.10.1 Funkce Arcsin, Arccos	21
1.10.2 Funkce Arctg, Arccotg	21

Seznam tabulek

0.1 Označení

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{Q}	množina racionálních čísel
\mathbb{I}	množina iracionálních čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
$P_n(x)$	polynom n -tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m, n (s m řádky a n sloupci)
$A = (a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
\mathcal{O}	nulová matice
$\det A = A $	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$\text{adj } A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$\text{hod}(A)$	hodnota matice A
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$	vektorový prostor všech uspořádaných n -tic
$\dim P$	dimenze prostoru P .
$a \bullet a$	skalární součin vektorů a, b
$\ x\ $	norma vektoru x
\square	konec důkazu
$\langle A \rangle$	lineární obal množiny A
$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$	matice přechodu od báze \mathcal{A} k bázi \mathcal{A}'
$a \perp b$	vektor a je ortogonální na vektor b
$f _V = g$	zúžení funkce na podmnožinu
$A \times B$	kartézský součin množin A, B
$a \times b$	vektorový součin vektorů a, b
$[a, b, c]$	smíšený součin vektorů a, b, c

Kapitola 1

Základní pojmy matematické logiky a teorie množin

1.1 Základní matematické pojmy

1. Množina

V matematice nazýváme jakýkoliv soubor či systém objektů množina. Můžeme například mluvit o množině všech stromů na pasece, o množině hus pasoucích se na louce či o množině všech celých čísel.

Značí-li A množinu všech předmětů a x je jeden z těchto předmětů, říkáme, že x je prvkem množiny A (x patří do A) a píšeme $x \in A$.

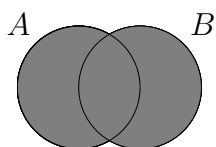
Není-li y prvkem A , píšeme $y \notin A$ nebo $y \notin A$.

Jestliže pro libovolné x má vztah $x \in A$ vždy za následek vztah $x \in B$, potom říkáme, že množina A je obsažena v B a nazýváme ji podmnožinou množiny B . V tom případě píšeme $A \subset B$. Relace $A = B$ je speciálním případem relace $A \subset B$. Platí-li $A \subset B$ a také $B \subset A$, pak píšeme $A = B$.

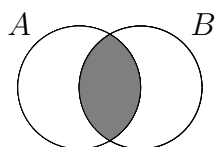
Je nutné zavést také pojem prázdné množiny neobsahující žádné prvky. Tuto množinu značíme \emptyset .

Definujeme:

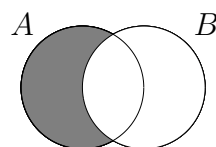
- Sjednocení (součet) množin A a B : $A \cup B$ ($A + B$),
- Rozdíl množin A a B : $A \setminus B$ ($A - B$),
- Průnik (součin) množin A a B : $A \cap B$ (AB).



Obrázek 1.1.1: $A \cup B$



Obrázek 1.1.2: $A \cap B$



Obrázek 1.1.3: $A \setminus B$

1.2 Elementy matematické logiky

1. Kvantifikátory

Za základní kvantifikátory považujeme následující dva:

- Existenční kvantifikátor: \exists (existuje); např. $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 = 5$
- Obecný kvantifikátor: \forall (pro všechny, pro každé); např. $\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 < x$.

2. Tvrzení, věty, logické symboly

Jako *tvrzení* lze označit např. výrok *Kniha je bílá*. *Matematická věta*, resp. *matematické tvrzení* je pravdivý matematický výrok, který má význam v matematické teorii. Matematickou větu nazýváme také *pravidlo* (obsahuje-li návod k výpočtu) nebo *lemma* (jedná-li se o pomocnou větu). Je-li tvrzení pravdivé, říkáme, že výrok platí, např. $2 + 3 = 5$. O nepravdivém tvrzení (nepravdivé formulí, kontradikci) mluvíme tehdy, když výrok neplatí, např. $x^2 < -100$.

Rozlišujeme následující typy výroků:

- Konjunkce: \wedge (a, a zároveň); např. $(x > 5) \wedge (x \leq 6) \implies 5 < x \leq 6$
- Disjunkce: \vee (platí jedno nebo druhé nebo obojí); např.

$$(x > 5) \vee (x \leq 6) \implies x \in \mathbb{R}$$

- Implikace: \implies (jestliže ... pak); např. $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$
- Ekvivalence: \iff (tehdy a jen tehdy); např. $x^2 > 0 \iff x \neq 0$

1.3 Definice, věty, druhy důkazů

Důkaz přímý: Pro důkaz tvrzení $P \implies Q$ sestavíme řetězec pravdivých implikací $P \implies P_1 \implies P_2 \implies \dots \implies P_n \implies Q$.

Důkaz nepřímý: Dokážeme (přímo) obměnu implikace $P \implies Q$, tedy $\neg Q \implies \neg P$.

Důkaz sporem: Vyjdeme z negace $\neg P$ dokazovaného tvrzení P a pomocí pravdivých implikací odvodíme tvrzení nepravdivé. Tedy původní tvrzení P je pravdivé.

Důkaz matematickou indukcí: Tento důkaz používáme pro dokazování tvrzení typu *pro všechna $n \in \mathbb{N}$, resp. pro všechna $n \geq n_0$ platí P* . Důkaz sestává ze dvou částí: v prvním kroku dokážeme tvrzení pro n_0 a ve druhém (indukčním) kroku dokážeme, že platí-li výrok P pro n , pak platí i pro $n + 1$.

1.4 Číselné množiny

Definujeme následující číselné množiny:

- \mathbb{N} – množina přirozených čísel; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- \mathbb{Z} – množina celých čísel (celá čísla);
 $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
- \mathbb{Q} – množina racionálních čísel; $\{\frac{m}{n}\}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$
- \mathbb{Q}^+ – množina iracionálních čísel (např. $\sqrt{2}, e$ (základ přirozeného logaritmu), π (Ludolphovo číslo), $\log 5, \dots$)
- \mathbb{R} – množina reálných čísel
- \mathbb{C} – množina komplexních čísel $\{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}, i$ – komplexní jednotka, $i^2 = -1, z = a + ib \in \mathbb{C}$.
- Platí: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^+, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.5 Intervaly

Budeme interpretovat čísla jako body (celočíselné nebo reálné osy) a naopak body přímky jako čísla. Množina čísel x splňujících nerovnosti $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$) se nazývá uzavřený (resp. otevřený) interval s koncovými body a a b . Analogicky definujeme intervaly polootevřené, polouzavřené a nekonečné:

- uzavřený interval: $[a, b]$ nebo $\langle a, b \rangle, a \leq x \leq b$
- otevřený interval: (a, b) nebo $]a, b[, a < x < b$
- polootevřený interval: $[a, b), a \leq x < b$
- polouzavřený interval, polointerval: $(a, b], a < x \leq b$
- nekonečné intervaly: $(-\infty, \infty), (-\infty, a], (-\infty, a), (a, \infty), [a, \infty)$.

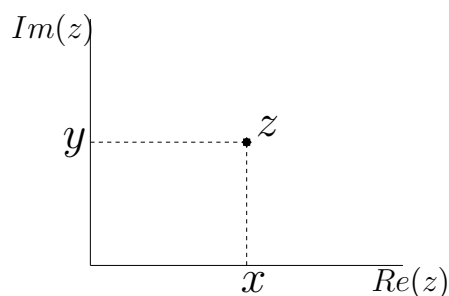
1.6 Základní vlastnosti komplexních čísel

1. Algebraický tvar komplexního čísla

Číslo

$$z = x + iy,$$

kde x a y jsou libovolná reálná čísla a i je *imaginární jednotka*, se nazývá *algebraický tvar* komplexního čísla. Pak x se nazývá *reálná* a y *imaginární část* komplexního čísla z .



Obrázek 1.6.1: Komplexní číslo $z = x + iy$ v komplexní rovině

Podle definice jsou si dvě komplexní čísla *rovna* tehdy a jen tehdy, jsou-li si rovny jejich reálné a imaginární části. Potom je rovnost

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

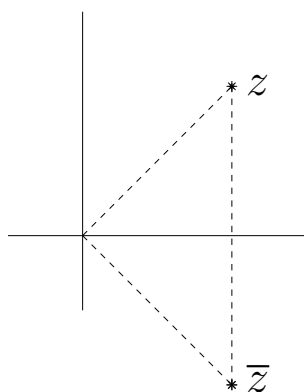
ekvivalentní dvěma rovnostem

$$x_1 = x_2 \quad \text{a} \quad y_1 = y_2.$$

Komplexní číslo $z = x + iy$ lze zobrazit jako bod v rovině xy , na jejíž ose x je znázorněna reálná část z a na ose y imaginární část z (viz. obr.1.6.1). Pro účely tohoto zobrazení se osa x nazývá *reálná osa* a osa y se nazývá *imaginární osa*, rovina Oxy se pak nazývá *komplexní rovina*.

Komplexní číslo si lze představit také jako vektor, jehož počátek je totožný s počátkem soustavy souřadnic a konec s bodem, na nějž se zobrazí dané komplexní číslo. Souřadnice vektoru na osách x a y znázorňují reálnou a imaginární část komplexního čísla z .

Je-li $y = 0$, pak komplexní číslo $z = x + i0 = x$ je reálné číslo znázorněné bodem reálné osy; je-li naopak $x = 0$, číslo $z = 0 + iy = iy$ se nazývá *ryze imaginární* a je znázorněno bodem $(0, y)$ ležícím na imaginární ose.



Obrázek 1.6.2: z, \bar{z} - čísla komplexně sdružená

Číslo komplexně sdružené (viz. obr.1.6.2) s daným komplexním číslem $z = a + ib$ značíme \bar{z} a je definováno jako

$$\bar{z} = a - ib.$$

Operace *odčítání* je definována jako operace inverzní ke sčítání; tj. $z = a + ib$ se nazývá *rozdíl* mezi komplexními čísly $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$, platí-li $a = a_1 - a_2$ and $b = b_1 - b_2$.

Operace *dělení* komplexních čísel je definována jako operace inverzní k operaci násobení. Komplexní číslo $z = a + ib$ se nazývá *kvocientem* komplexních čísel $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$, platí-li $z_1 = z \cdot z_2$. Řešením této rovnice (za předpokladu, že $z_2 \neq 0$) dostáváme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

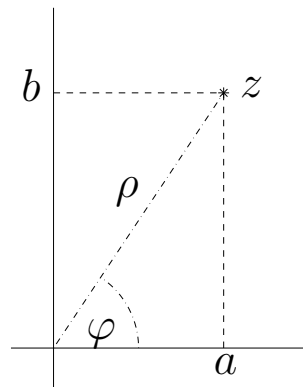
2. Trigonometrický tvar komplexního čísla

Jelikož je komplexní číslo definováno jako dvojice čísel reálných, je přirozené zobrazovat komplexní číslo $z = a + ib$ jako bod v rovině xy s kartézskými souřadnicemi $x = a$ a $y = b$. Tuto rovinu nazveme **komplexní rovinou**; osa x se nazývá *reálná* osa, osa y se nazývá *imaginární* osa komplexní roviny. Je také možné definovat pozici bodu v rovině pomocí polárních souřadnic (ρ, φ) , kde ρ je vzdálenost bodu od počátku souřadnic a φ je úhel, který svírá vektor průvodič s kladnou poloosou osy x . Kladný směr pro měření úhlu φ je směr proti pohybu hodinových ručiček. Využijeme-li vztahu mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$$

dostáváme takzvaný **trigonometrický** (nebo *polární*) tvar zápisu komplexního čísla:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Obrázek 1.6.3: Trigonometrický tvar komplexního čísla

Vzdálenost ρ se nazývá *modul* nebo *absolutní hodnota* z ; úhel φ se nazývá *argument* nebo *amplituda* z (viz. obr.1.6.3). Obvykle používáme značení

$$\rho = |z|, \varphi = \text{Arg}z.$$

Je-li $z = a + ib$, pak

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{tg}(\varphi) = \frac{b}{a}.$$

Argument komplexního čísla je jednoznačně definován až na periodu 2π . Je vhodné označit jako $\arg z$ hodnotu argumentu v intervalu

$$\varphi_0 \leq \arg z \leq 2\pi + \varphi_0,$$

kde φ_0 je libovolné pevně zvolené číslo (např. $\varphi_0 = 0$ nebo $\varphi_0 = \pi$). Pak

$$\text{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Hodnota $\arg z$ se nazývá *hlavní* hodnota argumentu. V následujícím budeme používat $\varphi_0 = 0$.

Argument komplexního čísla $z = 0$ není definován a jeho modul je roven nule.

Dvě nenulová komplexní čísla jsou si *rovna* tehdy a jen tehdy, když jsou si rovny jejich moduly a hodnoty argumentů se buďto rovnají, nebo se liší o násobek 2π .

3. Exponenciální tvar komplexního čísla

Exponenciální tvar (exponenciální označení) komplexního čísla

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

lze získat z trigonometrického tvaru užitím tzv. *Eulerovy formule*:

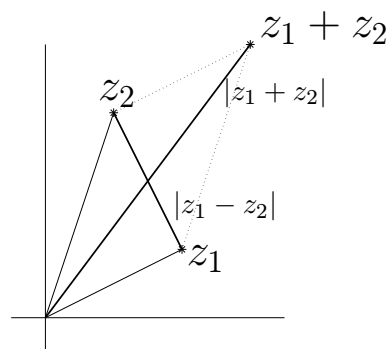
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Podle pravidel násobení dostáváme pro $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.6.1)$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$



Obrázek 1.6.4: $|z_1 + z_2|, |z_1 - z_2|$

Operace sčítání a odčítání komplexních čísel odpovídají operacím s vektory: součet dvou komplexních čísel (vektorů) z_1 a z_2 je vektor $z_1 + z_2$. Analogicky se sestrojí vektor $z_2 - z_1$ jako rozdíl vektorů z_2 a z_1 . Tak okamžitě dostáváme trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\ |z_1 - z_2| &\geq \left| |z_1| - |z_2| \right|. \end{aligned}$$

4. De Moivreova věta

Ze vztahu (1.6.1) lehce dostáváme tak zvanou *De Moivreovu větu*:

$$[\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

kde n je kladné celé číslo.

5. Odmocňování komplexního čísla

Komplexní číslo $z_1 = \sqrt[n]{z}$ se nazývá n -tou odmocninou komplexního čísla z , jestliže platí $z = z_1^n$. Je-li $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ potom podle De Moivreovy věty (nebo Eulerovy věty)

$$z_1^n = \rho_1^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1).$$

Je-li $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, pak

$$\rho = \rho_1^n \implies \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$$

a

$$\varphi = n\varphi_1 \implies \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}.$$

Jak bylo výše uvedeno, argument komplexního čísla je definován jednoznačně až na periodu 2π . Z toho důvodu dostáváme pro argument komplexního čísla z_1

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1,$$

kde φ je jedna z hodnot argumentu komplexního čísla z . Tedy existují různá komplexní čísla která, umocněná na n -tou, jsou rovna témuž komplexnímu číslu z . Moduly těchto komplexních čísel jsou stejné a jsou rovny $\sqrt[n]{\rho}$, jejich argumenty se liší o násobky $2\pi/n$. Počet různých hodnot n -tých odmocnin komplexního čísla z je n . Body v komplexní rovině odpovídající různým hodnotám n -té odmocniny komplexního čísla z leží ve vrcholech pravidelného n -úhelníka vepsaného do kruhu o poloměru $\sqrt[n]{\rho}$ se středem v bodě $z = 0$. Odpovídající hodnoty φ_k získáme tak, že za k dosadíme hodnoty $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Klasická analýza položila problém rozšíření reálných čísel takovým způsobem, aby výsledkem nejen elementárních operací sčítání a násobení, ale také operace odmocňování bylo číslo z téže (rozšířené) číselné množiny. Jak vidíme, komplexní čísla tento problém řeší.

Dostali jsme vzorec

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Příklad 1 Najděte všechny hodnoty \sqrt{i} .

Řešení. Nechť $z = i = e^{i\pi/2}$. Pak

$$z_k = \cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}, k = 0, 1$$

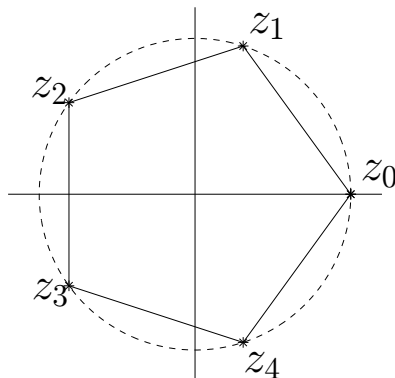
a

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i),$$

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i).$$

Příklad 2 Graficky znázorněte všechna řešení $z^5 = 1$.

Řešení.



Obrázek 1.6.5: Řešení $z^5 = 1$

1.7 Zavedení pojmu funkce, inverzní funkce, funkce dvou a více proměnných

Nechť D_f je číselná množina a nechť je dán jistý předpis, podle něhož každému číslu $x \in D_f$ přiřadíme (jedinou) hodnotu y . Pak říkáme, že na množině D_f je definována (jednohodnotová) funkce a píšeme: $y = f(x)$, ($x \in D_f$). Pak y nazýváme hodnotou funkce (funkcí, závisle proměnnou), x argumentem (nezávisle proměnnou).

D_f nazýváme definičním oborem funkce (“domain”), H_f nazýváme oborem hodnot funkce (“image”), $y \in H_f$, $H_f = f(D_f)$.

Dále říkáme, že funkce f zobrazuje množinu D_f na množinu H_f a f nazýváme zobrazením. Pojem funkce může být také chápán geometricky.

1. Speciální typy funkcí

Definice 1 Funkce, pro niž platí:

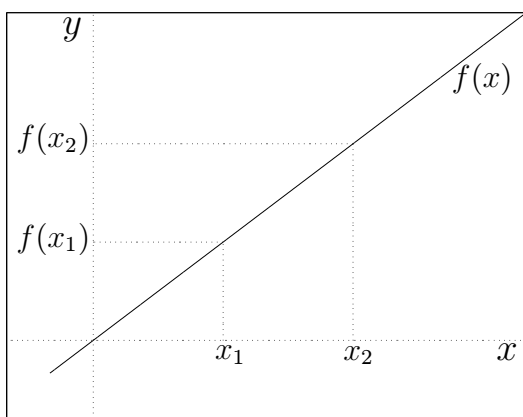
$$\forall x_1, x_2 \in D_f (x_1 \neq x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

se nazývá prostá.

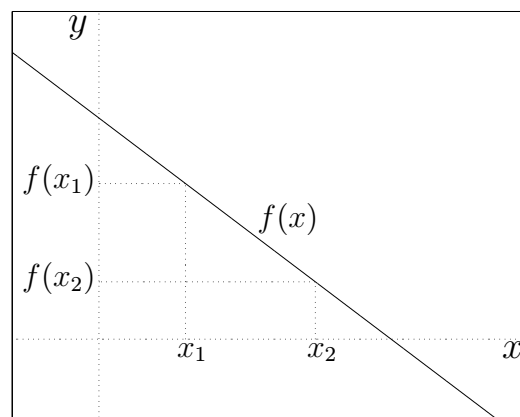
Příklad 3 Jsou funkce $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = x^{-1}$ jednohodnotové funkce ve svých definičních oborech D_f ? (Viz grafy funkcí.)

Definice 2 Funkce $f(x)$ je (na intervalu monotónnosti I):

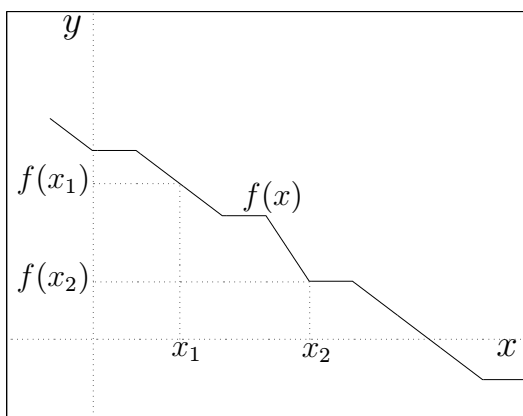
- rostoucí, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
- klesající, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$
- nerostoucí, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- neklesající, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.



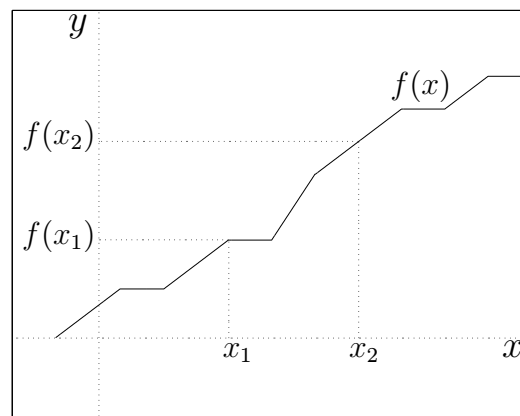
Obrázek 1.7.1: Funkce rostoucí



Obrázek 1.7.2: Funkce klesající



Obrázek 1.7.3: Funkce nerostoucí



Obrázek 1.7.4: Funkce neklesající

Definice 3 Rostoucí a klesající funkce se nazývají ryze monotónní.

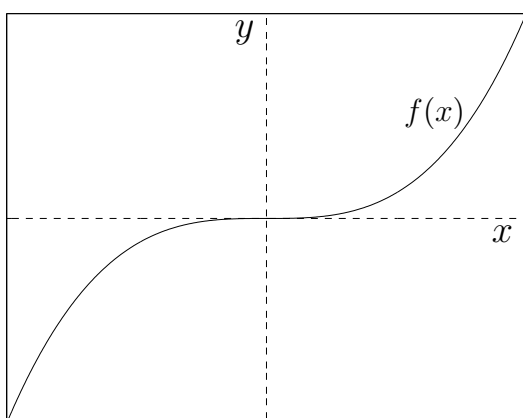
Definice 4 Funkce $f(x)$ se nazývá omezená, jestliže

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f : |f(x)| \leq M.$$

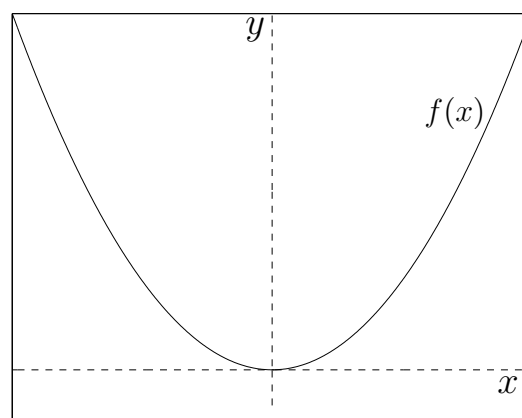
Příklad 4 Jsou funkce $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$ omezené?

Definice 5 Funkce $f(x)$ se nazývá:

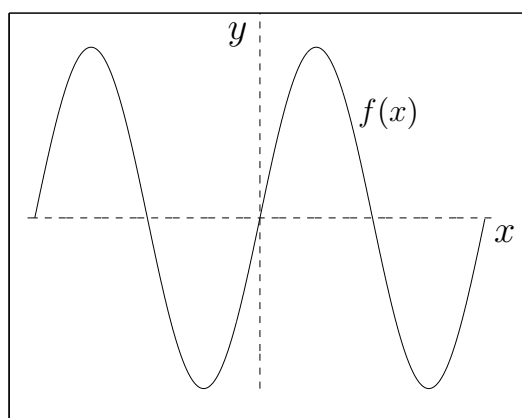
- *lichá*, jestliže $\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$,
- *sudá*, jestliže $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$,
- *periodická*, jestliže $\exists \omega > 0, \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f : f(x + \omega) = f(x)$.



Obrázek 1.7.5: Funkce lichá



Obrázek 1.7.6: Funkce sudá



Obrázek 1.7.7: Funkce periodická

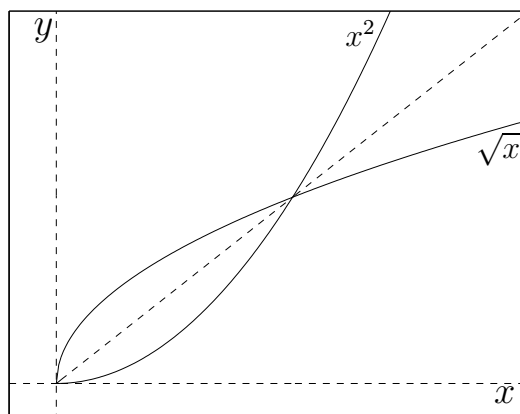
1.8 Inverzní funkce

Uvažujme libovolnou funkci $y = f(x)$ definovanou na množině E a označme $E_1 = f(E)$ obraz E . Přiřaďme každému $y \in E_1$ množinu všech $x \in E$, pro něž $y = f(x)$. Dostáváme funkci $x = \varphi(y)$ definovanou na E_1 . Funkce $\varphi(y)$ se nazývá funkce inverzní k $f(x)$.

Budeme předpokládat, že inverzní funkce je jednohodnotová. Takto dostáváme zřejmé identity: $\varphi[f(x)] = x$, $x \in E$ a $f[\varphi(y)] = y$, $y \in E_1$. Někdy je pohodlné označit funkci inverzní k f symbolem f^{-1} . Pak $f^{-1}f(x) = x$, $x \in E$ a $ff^{-1}(y) = y$, $y \in E_1$.

Příklad 5 • $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ($y = x^2$, $x = \sqrt{y}$),

- $y = kx$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1}{k}x$,
- $y = \cos x$, $y = \arccos x$.



Obrázek 1.8.1: Funkce inverzní

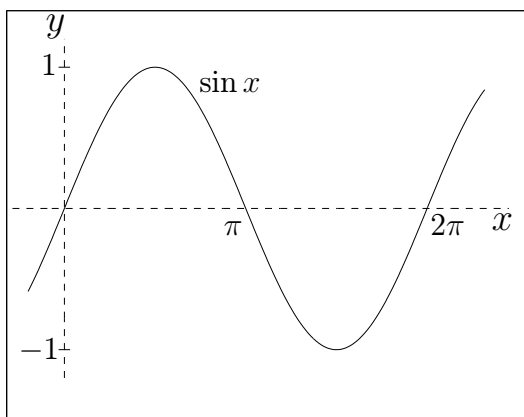
Věta 1.8.1 Grafy inverzních funkcí $f(x)$, $f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle osy $y = x$.

Důkaz. Nechť $y = f(x)$, $y = g(x)$ a $f[g(x)] = x$. Je-li $b = f(a)$, pak $g(b) = a$ a body $[a, b]$, $[b, a]$ jsou symetrické podle osy $y = x$.

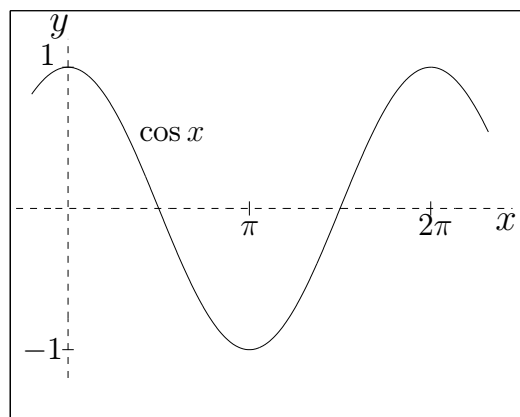
Věta 1.8.2 Nechť $y = f(x)$ je spojitá a ryze rostoucí (ryze klesající) funkce na $[a, b]$ a $A = f(a)$, $B = f(b)$. Pak obrazem $[a, b]$ je interval $[A, B]$ nebo $[B, A]$ a funkce $x = \varphi(y)$, inverzní k f , je jednohodnotová, ryze rostoucí (ryze klesající) a spojitá na $[A, B]$ (nebo $[B, A]$).

1.9 Trigonometrické funkce

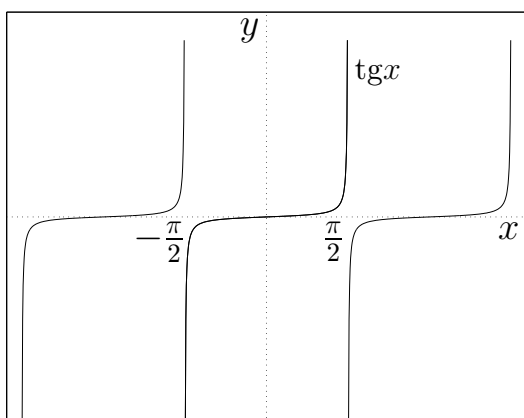
- Funkce sinus: $\sin \alpha$,
- Funkce kosinus: $\cos \alpha$,
- Funkce tangens: $\operatorname{tg} \alpha$,
- funkce kotangens: $\operatorname{cotg} \alpha$.



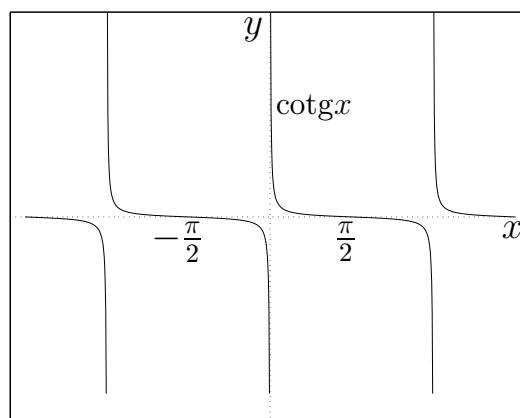
Obrázek 1.9.1: Funkce sinus



Obrázek 1.9.2: Funkce cosinus



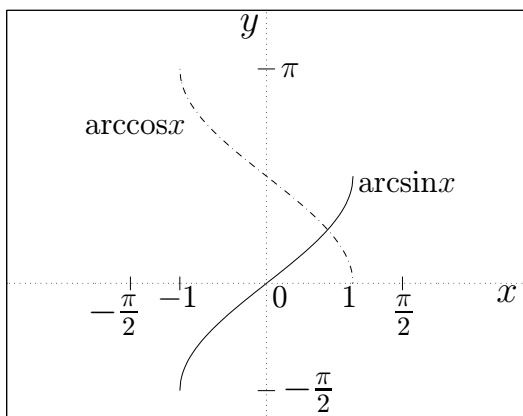
Obrázek 1.9.3: Funkce tangens



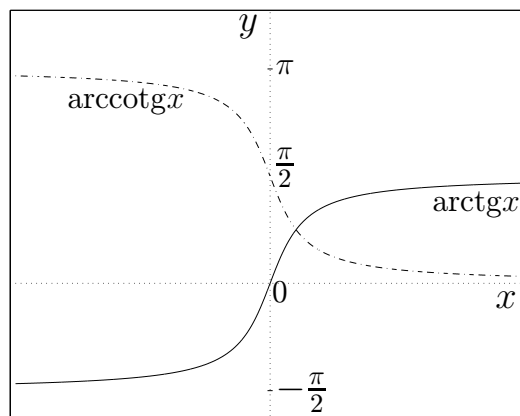
Obrázek 1.9.4: Funkce cotangens

1.10 Inverzní trigonometrické funkce

- $y = \arcsin x$ (arkus sinus) je inverzní k funkci $y = \sin x$; $\arcsin(\sin x) \equiv x, \sin(\arcsin x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$.
- $y = \arccos x$ (arkus kosinus) je inverzní k funkci $y = \cos x$; $\arccos(\cos x) \equiv x, \cos(\arccos x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$.
- $y = \operatorname{arctg} x$ (arkus tangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$,
- $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$; $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) \equiv x, \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$.



Obrázek 1.10.1: Funkce Arcsin, Arccoc



Obrázek 1.10.2: Funkce Arctg, Arccotg

1.11 Exponenciální a logaritmické funkce

- $y = a^x$ (exponenciální funkce), $D_f = \mathbb{R}, a > 0, a \in \mathbb{R}$,
- $y = \log_a x$ (logaritmická funkce) $D_f = (0, \infty)$ je inverzní k exponenciální funkci.

$$y = a^x \iff x = \log_a y.$$

Definice 6 $y = \log_a x = y$ if $a^y = x$; $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

Následující vzorec je užitečný:

$$\log_\beta \alpha = \frac{\log_\gamma \alpha}{\log_\gamma \beta}$$

Je-li $a = 10$, pak $\log_{10} x = \log x$; je-li $a = e$, pak $\log_e x = \ln x$.

1.12 Hyperbolické a inverzní hyperbolické funkce

Definice 7

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*hyperbolický sinus*),
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*hyperbolický kosinus*),
- $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (*hyperbolický tangens*),
- $\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (*hyperbolický kotangens*).

Inverzní hyperbolické funkce:

- $y = \operatorname{argsinh} x$ (je funkce inverzní k $y = \sinh x$)
- $y = \operatorname{argcosh} x$ (je funkce inverzní k $y = \cosh x$)
- $y = \operatorname{argtgh} x$ (je funkce inverzní k $y = \operatorname{tgh} x$)
- $y = \operatorname{argcotgh} x$ (je funkce inverzní k $y = \operatorname{cotgh} x$)

Některé vzorce:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}, \quad \sinh^2 x = \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}.$$

1.13 Definice funkce komplexní proměnné

Předpokládejme, že je dána vektorová funkce skalárního argumentu, jejíž průmět na osu z je identicky roven nule pro všechny hodnoty parametru t . Pak

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{1.13.1}$$

a křivka $\vec{r} = \vec{A}(t)$ leží celá v rovině Oxy . V tomto případě je příhodné považovat vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

za geometrickou reprezentaci komplexního čísla $z = x + iy$ a mluvit místo o vektorové funkci $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ reálné proměnné t .

Definice 8 *Jestliže je každé hodnotě parametru t přiřazeno určité komplexní číslo*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{1.13.2}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce nabývající reálných hodnot, $z(t)$ se nazývá komplexní funkce reálného argumentu t .

Parametr t nabývá hodnot z daného intervalu. *Hodograf* komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je, podle definice, křivka s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$; tedy, hodografy vektorové funkce (6.41.1) a komplexní funkce (6.41.2) jsou shodné. Definice limity a spojitosti komplexní funkce reálného argumentu jsou zcela analogické s odpovídajícími definicemi vektorové funkce. Všimněme si, že spojitost komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je ekvivalentní kontinuitě její reálné a imaginární složky $x = x(t)$ a $y = y(t)$. Hodograf spojitě funkce $z(t)$ pro hodnoty parametru t od t_1 do t_2 je spojitá čára spojující body $z(t_1)$ a $z(t_2)$ v komplexní rovině.

Příklad 6 Pro funkci

$$z(t) = t + it^2, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

máme $x = t$ a $y = t^2$. *Hodografem je parabola $y = x^2$. Pokud t nabývá hodnot od $-\infty$ do $+\infty$, body paraboly se pohybují tak, že horní oblast (nekonečno) ohraničená parabolou zůstává vždy vlevo.*

1.14 Mnohočleny a racionální funkce

Definice 9 Polynomem n -tého stupně proměnné x nazveme výraz

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a a_n, \dots, a_1, a_0 jsou libovolná reálná či komplexní čísla, přičemž $a_n \neq 0$.

Polynomu může být zapsán i ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Podle toho, z jaké množiny bereme koeficienty $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, mluvíme o polynomu celočíselném, reálném, racionálním, komplexním, atd. Polynomy můžeme sčítat, násobit číslem, násobit mezi sebou a dělit. Necht' pro $n \geq m$ máme

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

potom

$$P_n(x) + Q_m(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_n x^n,$$

$$\alpha P_n(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0),$$

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \dots + c_1 x + c_0,$$

kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Pro $n \geq m$ platí

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde $R_k(x)$ je zbytek stupně $k < m$, což můžeme zapsat ve tvaru

$$P_n(x) = S_{n-m}(x)Q_m(x) + R_k(x).$$

Definice 10 Polynom $D(x)$, který dělí beze zbytku polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ se nazývá společným dělitelem polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.

Polynom $D(x)$, který má ze všech společných dělitelů nejvyšší stupeň, se nazývá největší společný dělitel polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.

Eukleidův algoritmus

Nechť jsou dány nenulové polynomy P, Q , stupeň $P = \text{st}(P) > \text{st}(Q)$. Polynom P vydělíme polynomem Q a dostaneme částečný podíl S a zbytek R_1 , $\text{st}(R_1) < \text{st}(Q)$:

$$P = QS + R_1.$$

Nyní vydělíme polynom Q zbytkem R_1 a získáme částečný podíl S_1 a zbytek R_2 , $\text{st}(R_2) < \text{st}(R_1)$,

$$Q = R_1S_1 + R_2.$$

Vydělíme polynom R_1 zbytkem R_2 a dostaneme

$$R_1 = R_2S_2 + R_3.$$

Pokračujeme dále, až v k -tém kroku dostaneme

$$R_{k-2} = R_{k-1}S_{k-1} + R_k.$$

Protože $\text{st}(R_k) < \text{st}(R_{k-1}) < \dots < \text{st}(R_2) < \text{st}(R_1) < \text{st}(Q) < \text{st}(P)$, po konečném počtu t kroků dostaneme

$$R_{t-2} = R_{t-1}S_{t-1} + R_t,$$

$$R_{t-1} = R_tS_t + 0.$$

Z poslední rovnosti plyne, že polynom R_t je dělitelem polynomu R_{t-1} . Dosazením do předposlední rovnosti dostaneme

$$R_{t-2} = R_tS_tS_{t-1} + R_t = R_t(S_tS_{t-1} + 1),$$

neboli R_t je i dělitelem polynomu R_{t-2} a tak můžeme pokračovat dále a ukázat, že všechny polynomy $R_j, j < t$ jsou dělitelné polynomem R_t , tedy i P a Q jsou dělitelné R_t .

Obráceně, nechť je polynom D společným dělitelem polynomů P a Q . Potom D bude dělitelem polynomu R_1 . Jestliže D dělí Q a R_1 , potom dělí i R_2 . Jestliže dělí R_1 a R_2 , dělí i R_3 , atd., polynom D tedy musí dělit i R_t . R_t je tedy největším společným dělitelem polynomů P a Q .

Definice 11 Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže platí

$$P_n(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Věta 1.14.1 Základní věta algebry

Každý polynom s reálnými nebo komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má aspoň jeden kořen, obecně komplexní.

Věta 1.14.2 Bézoutova Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$ stupně $n \geq 1$ právě tehdy, když

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x),$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $n - 1$.

Důsledek 1 Každý polynom $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, stupně $n \geq 1$ s (komplexními) kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, přičemž kořeny nemusí být navzájem různé, se dá rozložit na součin kořenových činitelů

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Definice 12 Násobností kořene α rozumíme počet, kolikrát se α vyskytuje v rozkladu na kořenové činitele.

Důsledek 2 Kořen α polynomu $P_n(x)$ má násobnost k , jestliže $P_n(x)$ je dělitelný polynomem $(x - \alpha)^k$, ale není dělitelný polynomem $(x - \alpha)^{k+1}$.

Věta 1.14.3 Hornerovo pravidlo

Pro výpočet hodnoty polynomu

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

v bodě $x = \alpha$ nebo pro určení koeficientů b_i polynomu

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$$

vzniklého dělením polynomu $P_n(x)$ členem $(x - \alpha)$ používáme tohoto postupu:

$$\begin{array}{r|cccccc} x = \alpha & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & r \end{array},$$

kde platí

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= b_{n-1}\alpha + a_{n-1}, \\ &\dots \quad \dots \\ b_1 &= b_2\alpha + a_2, \\ b_0 &= b_1\alpha + a_1, \\ r &= b_0\alpha + a_0 = P_n(\alpha) \end{aligned}$$

Důsledek 3 Jestliže při použití Hornerova pravidla dostaneme $r = 0$, potom je α kořenem polynomu $P_n(x)$.

Věta 1.14.4 Vietovy vzorce

Mezi koeficienty a kořeny polynomu

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

platí vztahy

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), \\ a_{n-2} &= a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n), \\ &\dots \quad \dots \\ a_0 &= (-1)^n a_n(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n). \end{aligned}$$

Důsledek 4 Každý kořen dělí absolutní člen.

Věta 1.14.5 Mějme polynom s celočíselnými koeficienty

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Celé číslo α může být kořenem, jestliže α dělí absolutní člen a_0 .

Racionální číslo $\frac{p}{q}$ (kde p je celé číslo a q je přirozené číslo nesoudělné s p) může být kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže p dělí absolutní člen a_0 a q dělí koeficient u nejvyšší mocniny a_n .

Definice 13 Nechť $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy. Jejich podíl

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazveme racionální funkcí lomenou.

Je-li $n < m$, mluvíme o racionální funkci ryze lomené.

Věta 1.14.6 Každá racionální neryze lomená funkce $R(x)$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$R(x) = F(x) + G(x),$$

kde $F(x)$ je polynom stupně $n - m$ a $G(x)$ je racionální funkce ryze lomená.

Věta 1.14.7 O rozkladu na parciální zlomky

Mějme reálnou ryze lomenou racionální funkci

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

s rozkladem jmenovatele na kořenové činitele nad \mathbb{R}

$$Q_m(x) = a_m(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \dots (x^2 + p_vx + q_v)^{s_v},$$

kde α_i , $i = 1, 2, \dots, r$ jsou reálné kořeny násobnosti k_i a kvadratický trojčlem $x^2 + p_jx + q_j$ $j = 1, 2, \dots, v$, $p_j^2 - 4q_j < 0$, reprezentuje dvojici komplexně sdružených kořenů s násobností s_j . Potom

$$R(x) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{A_{i1}}{(x - \alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x - \alpha_i)^{k_i}} \right) + \sum_{j=1}^v \left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2 + p_jx + q_j)} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{M_{js_j}x + N_{js_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{s_j}} \right),$$

kde všechny koeficienty A_{ik} , M_{js} , N_{js} jsou reálná čísla.

Příklad 7 Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1}.$$

Řešení: Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů (nejlépe pomocí Hornerova schématu).

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 1)^2.$$

Máme jeden prostý reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ a jeden reálný kořen $x = -1$, který má násobnost 2. Dosadíme podle předchozí věty a dostaneme:

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Neznámé koeficienty určíme tak, že celou rovnici vynásobíme jmenovatelem racionální funkce (t.j. polynomem $2x^3 + 3x^2 - 1$) a upravíme:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 7x + 4 &= A2(x + 1)^2 + B2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) + C2\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ 6x^2 + 7x + 4 &= A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x - 1)(x + 1) + C(2x - 1), \\ 6x^2 + 7x + 4 &= A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x^2 + x - 1) + C(2x - 1). \end{aligned}$$

Srovnáním koeficientů polynomů na obou stranách rovnice dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6 &= 2A + 2B \\ 7 &= 4A + B + 2C \\ 4 &= 2A - B - C \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení

$$A = 2, B = 1, C = -1.$$

Rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Příklad 8 Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$F(x) = \frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)}.$$

Řešení: Jmenovatel má jeden reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ násobnosti 2 a dvojici komplexně sdružených kořenů. Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar:

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem dostaneme

$$16x^3 - 15x^2 + 6x + 5 = 4A \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2x + 5) + 4B(x^2 + 2x + 5) + 4(Cx + D) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic, která má řešení

$$A = 0, B = \frac{1}{4}, C = 4, D = 0.$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{1}{(2x - 1)^2} + \frac{4x}{x^2 + 2x + 5}.$$

Věta 1.14.8 Mějme reálnou ryze lomenou racionální funkci

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

jejíž jmenovatel má pouze prosté kořeny

$$Q_m(x) = a_m(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_m),$$

Potom

$$R(x) = \frac{L_1}{(x - \lambda_1)} + \frac{L_2}{(x - \lambda_2)} + \dots + \frac{L_m}{(x - \lambda_m)},$$

kde

$$L_i = \frac{P_n(\lambda_i)}{Q'_m(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Příklad 9 Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)}.$$

Řešení: Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů.

$$(x^2 - 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 2).$$

Všechny kořeny jsou reálné prosté. Rozklad bude mít tvar

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 3} + \frac{D}{x - 2}.$$

Po vynásobení rovnice jmenovatelem $(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)$ dostaneme

$$x^2 + 1 = A(x - 1)(x + 3)(x - 2) + B(x + 1)(x + 3)(x - 2) + C(x + 1)(x - 1)(x - 2) + D(x + 1)(x - 1)(x + 3).$$

Do poslední rovnice postupně dosazujeme jednotlivé kořeny. Pro $x_1 = -1$ dostaneme po dosazení:

$$\begin{aligned} (-1)^2 + 1 &= A(-1 - 1)(-1 + 3)(-1 - 2) + B(-1 + 1)(-1 + 3)(-1 - 2) + C \cdot 0 + D \cdot 0, \\ 2 &= A(-2)(2)(-3), \\ A &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Pro $x = 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= A(1 - 1)(1 + 3)(1 - 2) + B(1 + 1)(1 + 3)(1 - 2) + C \cdot 0 + D \cdot 0, \\ 2 &= B(2)(4)(-1), \\ B &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Pro $x = -3$:

$$\begin{aligned} (-3)^2 + 1 &= A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-3 + 1)(-3 - 1)(-3 - 2) + D \cdot 0, \\ 10 &= C(-2)(-4)(-5), \\ C &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Pro $x = 2$:

$$\begin{aligned} 2^2 + 1 &= A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D(2 + 1)(2 - 1)(2 + 3), \\ 5 &= D(3)(1)(5), \\ D &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Konečný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)} = \frac{1}{6(x + 1)} - \frac{1}{4(x - 1)} - \frac{1}{4(x + 3)} + \frac{1}{3(x - 2)}.$$

Kapitola 2

Matice a determinanty. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení.

2.1 Matice

Definice 14 *Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici $(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ přiřadíme prvek $a_{ij} \in \mathbb{R}$, obdržíme reálnou matici typu (m, n) nad \mathbb{R} . Čísla i, j jsou indexy, i je řádkový a j je sloupcový index.*

Matice zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice budeme označovat velkými písmeny.

Speciální typy matic:

Matice řádková

$$B = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Matice sloupcová

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Matice diagonální

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii} $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice D je typu (m, m) , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, a nebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

Jestliže $m = n$, potom mluvíme o čtvercové matici řádu m .

Matice jednotková
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice jednotková je tedy čtvercová diagonální matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky.

Matice nulová
$$\mathcal{O} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i, j.$$

Matice transponovaná
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice symetrická
$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j.$$

Matice téhož typu (m, n) nad \mathbb{R} budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

Definice 15 Matice $A = (a_{ij})$ je rovna matici $B = (b_{kl})$, jsou-li obě matice stejného typu a stejnohlé prvky se sobě rovnají, tj. $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $B \in \mathbb{R}_{m,n}$, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definice 16 Součtem dvou matic $A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matice $C \in \mathbb{R}_{m,n}$ taková, že $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Číselným násobkem $\alpha \in \mathbb{R}$ matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matice $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ taková, že $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Lineární kombinací matic $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}_{m,n}$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nazveme matici $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$.

Definice 17 Mějme rovnost

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = \mathcal{O} \quad (2.1.1)$$

kde \mathcal{O} je nulová matice. Matice A_1, A_2, \dots, A_k nazveme lineárně závislé, pokud $\exists \lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ a rovnost (2.1.1) platí.

Matice A_1, A_2, \dots, A_k nazveme lineárně nezávislé, pokud rovnost (2.1.1) platí tehdy a jen tehdy, když $\lambda_i = 0$ pro $\forall i = 1, 2, \dots, k$.

Důsledek 5 Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_k lineárně závislé, potom aspoň jedna z nich je lineární kombinací zbývajících.

Důsledek 6 Je-li některá z matic A_1, A_2, \dots, A_k lineární kombinací zbývajících, jsou matice A_1, A_2, \dots, A_k lineárně závislé.

Důsledek 7 Je-li některá z matic A_1, A_2, \dots, A_k nulová, jsou matice A_1, A_2, \dots, A_k lineárně závislé.

Příklad 10 Matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé, protože platí $A_1 + 2A_2 - A_3 = \mathcal{O}$.

Příklad 11 Určete lineární závislost či nezávislost matic

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Sestavíme si lineární kombinaci těchto vektorů podle definice 17:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Srovnáním stejnohlých prvků dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Podle definice 17 jsou matice A_1, A_2, A_3 lineárně nezávislé.

2.2 Determinant

Definice 18 Permutace je zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na sebe.

Definice 19 Inverzí v permutaci (i_1, i_2, \dots, i_n) rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

Příklad 12 Permutace $(2, 3, 1)$ má dvě inverze $2 - 1$ a $3 - 1$.

Definice 20 Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace (j_1, j_2, \dots, j_n) množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a $t(j)$ je rovno počtu inverzí v permutaci (j_1, j_2, \dots, j_n) .

Příklad 13 Křížové pravidlo pro výpočet determinantu matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Příklad 14 Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - afh - bdk.$$

Poznámka 1 Pro determinanty matic vyšších řádů podobný vzorec neexistuje.

Věta 2.2.1 Vlastnosti determinantů:

1. V definičním vyjádření determinantu matice A se vyskytuje člen $(a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n})$ se znaménkem $(+)$ pokud mají permutace $(i_1, i_2, \dots, i_n), (j_1, j_2, \dots, j_n)$ současně sudý počet inverzí a nebo současně lichý počet inverzí; a se znaménkem $(-)$ pokud má jedna permutace sudý a druhá lichý počet inverzí.
2. $\det A = \det(A^T)$, t.j. ekvivalence řádků a sloupců.
3. Záměnou dvou sloupců matice A se hodnota determinantu změní na opačnou.
4. Determinant matice, která má dva stejné sloupce, je roven nule.
5. Nechť B je matice, která vznikne z matice A vynásobením jednoho sloupce číslem λ a ponecháním ostatních beze změny, potom $|B| = \lambda|A|$, neboli společný dělitel všech prvků sloupce se může vytknout před determinant.
6. Nechť prvky s -tého sloupce matice A jsou lineární kombinace prvků tvaru $a_{is} = \beta b_{is} + \gamma c_{is}$, potom $|A| = \beta|A_b| + \gamma|A_c|$, kde matici A_b získáme z matice A nahrazením s -tého sloupce prvky b_{is} a ponecháním ostatních beze změny a matici A_c získáme obdobně nahrazením s -tého sloupce matice A prvky c_{is} a ponecháním ostatních beze změny.

7. Jestliže některý sloupec matice A je lineární kombinací zbývajících, potom $|A| = 0$.
8. Hodnota determinantu se nezmění, pokud přičteme k jednomu sloupci lineární kombinaci zbývajících.
9. Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Definice 21 Nechť v matici A řádu n vynecháme s -tý sloupec a k -tý řádek. Zbývající prvky tvoří matici řádu $(n - 1)$ a její determinant nazveme minorem M_{ks} prvku a_{ks} .

Definice 22 Algebraickým doplňkem A_{ks} prvku a_{ks} nazveme $A_{ks} = (-1)^{k+s} M_{ks}$.

Věta 2.2.2 Laplaceova věta o rozvoji determinantu.

Pro každou čtvercovou matici A a každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}.$$

Důsledek 8 Vzhledem k rovnoprávnosti řádků a sloupců platí $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}.$$

Příklad 15 Určete hodnotu determinantu matice A ,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Násobky druhého sloupce budeme přičítat ke zbývajícím tak, abychom ve třetím řádku dostali nuly. Dvojnásobek druhého sloupce přičteme k prvnímu sloupci, ke třetímu sloupci přičteme druhý a od čtvrtého sloupce odečteme druhý sloupec.

$$|A| = \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Rozvineme determinant podle třetího řádku a potom podle posledního sloupce:

$$= (-1)^{(3+2)} 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

Poznámka 2 Při výpočtu je vhodné si nejprve zapsat sloupec (řádek), jehož násobky budeme přičítat ke zbývajícím. Zapisujeme jej na jeho místo, protože nemůžeme měnit pořadí jednotlivých sloupců, aniž by došlo i ke změně hodnoty determinantu. Snížíme tím možnost, že se nechtěně dopustíme chyby.

Věta 2.2.3 Pro každou čtvercovou matici A řádu n a pro každou dvojici různých indexů $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq l$, platí

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \dots + a_{nk}A_{nl} = 0,$$

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \dots + a_{kn}A_{ln} = 0.$$

2.3 Hodnost matice

Definice 23 Necht' $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \leq \min(m, n)$. Vybereme v matici A libovolně k řádků a k sloupců. Elementy stojící na průsečících těchto řádků a sloupců tvoří matici řádu k . Její determinant nazveme minorem k -tého řádu matice A .

Důsledek 9 Minorů k -tého řádu matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \leq \min(m, n)$ můžeme vytvořit celkem $\binom{m}{k} \binom{n}{k}$.

Příklad 16 Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme z ní vytvořit celkem 12 minorů prvního řádu, 18 minorů druhého řádu a 4 minory třetího řádu. Všechny minory třetího řádu jsou přitom nulové.

Definice 24 Hodnost nulové matice je rovna nule.

Hodnost nenulové matice A je rovna k , jestliže existuje nenulový minor řádu k a všechny minory vyšších řádů, pokud existují, jsou rovny nule. Libovolný nenulový minor řádu k nazveme *bázovým* a jeho sloupce (řádky) nazveme *bázovými sloupci* (řádky).

Věta 2.3.1 Libovolný sloupec matice A je lineární kombinací bázových sloupců.

Věta 2.3.2 Má-li matice A hodnost h , má potom právě h lineárně nezávislých sloupců a naopak, má-li matice A právě h lineárně nezávislých sloupců, potom má hodnost h .

Důsledek 10 Determinant čtvercové matice A je nenulový právě tehdy, když všechny sloupce jsou lineárně nezávislé.

Definice 25 Za elementární úpravy matice A prohlásíme

1. Přejít od matice A k matici transponované A^T .
2. Vzájemnou výměnu dvou řádků.
3. Vynásobení všech prvků v jednom řádku nenulovým číslem.
4. Přičtení k jednomu řádku lineární kombinace zbývajících řádků.
5. Vynechání nulového řádku.

Věta 2.3.3 Elementární úpravy nemění hodnost matice.

Definice 26 Matici $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ nazveme *horní trojúhelníkovou maticí*, když $a_{ij} = 0 \forall i > j > \min(m, n)$. Matici A nazveme *dolní trojúhelníkovou maticí*, když $a_{ij} = 0 \forall i < j < \min(m, n)$.

Důsledek 11 *Postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na trojúhelníkovou matici. Tento postup se nazývá Gaussova eliminační metoda.*

Důsledek 12 *Postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na diagonální matici. Tento postup se nazývá Jordanova eliminační metoda.*

Důsledek 13 *Determinant trojúhelníkové matice řádu n je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

Příklad 17 *Určit hodnotu matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: První řádek vynásobený (-2) přičteme ke druhému, první řádek vynásobený (-3) přičteme ke třetímu a první řádek vynásobený (-4) přičteme k poslednímu řádku.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První a poslední řádek opíšeme, třetí přičteme ke druhému a zapíšeme třetí řádek jako druhý

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky necháme beze změny, poslední řádek násobíme (-4) a přičteme k němu desetinasobek třetího řádku

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 186 \end{pmatrix}.$$

Matice A je převedena na trojúhelníkový tvar, má čtyři nenulové řádky, první čtyři řádky a první čtyři sloupce tvoří nenulový minor řádu 4 (jeho hodnota je 304), hodnota matice A je proto rovna čtyřem.

2.4 Maticová algebra

Definice 27 *Součinem matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathbb{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathbb{R}_{m,p}$ pro kterou platí*

$$C = AB, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p.$$

Poznámka 3 *Násobení matic není komutativní, t.j. existují takové matice A, B , že platí:*

$$AB \neq BA,$$

a nebo některý ze součinů AB či BA není definován.

Příklad 18 *Nechť $A \in \mathbb{R}_{2,3}$ a $B \in \mathbb{R}_{3,4}$. Potom součin AB existuje, ale součin BA není definován.*

Důsledek 14 *Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B .*

Příklad 19 *Mějme dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB \neq BA.$$

Příklad 20

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme případ, že $A \neq \mathcal{O}$, $B \neq \mathcal{O}$, ale $AB = \mathcal{O}$.

Jedná se o situaci, která nemá obdobu v oboru reálných čísel. Nelze proto přenášet automaticky poznatky z číselných množin do teorie matic.

Věta 2.4.1 *Pro všechny matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $B, C \in \mathbb{R}_{n,p}$, $D \in \mathbb{R}_{p,q}$ platí*

1. $A(B + C) = AB + AC$,
2. $A(BD) = (AB)D$,
3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Věta 2.4.2 *Pro každou matici A typu (m, n) platí $AI = A$, kde I je jednotková matice řádu n .*

Důsledek 15 $IA = A$, kde $I \in \mathbb{R}_{m,m}$.

Věta 2.4.3 *Nechť A je matice typu m, n , potom součin AA^T je matice symetrická.*

Věta 2.4.4 *Nechť A, B, C jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí*

$$AB = CA = I.$$

Potom $B = C$.

Definice 28 Necht A, B jsou čtvercové matice řádu n a necht platí

$$AB = BA = I.$$

Potom matice B je inverzní maticí k matici A . Označení $B = A^{-1}$.

Příklad 21 Pro každou matici A nemusí existovat taková matice B , že platí $AB = I$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To ovšem znamená, že pro tuto matici A neexistuje matice B taková, že po jejich vynásobení dostaneme matici jednotkovou.

Definice 29 Matice, ke které existuje matice inverzní, se nazývá regulární. V opačném případě mluvíme o matici singulární.

Věta 2.4.5 Necht A, B jsou dvě regulární matice řádu n . Potom

1. Součin AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Matice A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.

Věta 2.4.6 Necht A, B jsou čtvercové matice řádu n . Potom $|AB| = |A||B|$.

Důsledek 16 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Důsledek 17 Matice A je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový.

Definice 30 Adjungovaná matice k matici A je matice $\text{adj } A = (a_{ij}^*)$, kde $a_{ij}^* = A_{ji}$.

Důsledek 18 Matici adjungovanou získáme, když každý prvek matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a výslednou matici transponujeme.

Věta 2.4.7 Buď A regulární matice. Potom $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)$.

Důsledek 19 $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

Příklad 22 Inverzní matice pro matici řádu 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 23 Určete inverzní matici k matici A , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Protože $|A| = -16 + 7 + 84 + 10 = 85$, je matice A regulární a tedy k ní existuje matice inverzní. Určíme jednotlivé algebraické doplňky.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 28, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

Potom

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad a \quad A^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Věta 2.4.8 Pro výpočet inverzní matice vyšších řádů používáme metodu doplnění s jednotkovou maticí: Vedle matice A (vpravo) napíšeme jednotkovou matici téhož řádu a pomocí řádkových elementárních úprav převedeme matici $(A|I)$ na tvar, kdy vlevo bude matice jednotková. Potom vpravo bude matice inverzní

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \sim (I|A^{-1})$$

Příklad 24 Určete inverzní matici k matici A , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zapišeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Od prvního řádku odečteme druhý:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících, poté odečítáme násobek druhého řádku od třetího:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Nyní odečítáme násobky třetího řádku od zbývajících a poté sečteme druhý a první řádek:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Tedy pro matici A je inverzní matice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 4 *Není nutné předem prověřovat regularitu matice A . Pokud matice A není regulární, tak pomocí řádkových úprav získáme v levé polovině nulový řádek. Provádíme totiž stejné úpravy jako při zjišťování hodnoty matice. Výpočet končí a říkáme, že matice inverzní není definována.*

Příklad 25 *Určete inverzní matici k matici B , jestliže*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zapišeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Sečteme druhý a třetí řádek:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Vlevo jsme dostali nulový řádek. Protože jsme použili pouze úpravy, které nemění hodnotu matice, je hodnota matice B rovna 2. Matice B je proto singulární a inverzní matice k matici B neexistuje.

2.5 Soustavy lineárních rovnic – základní pojmy

Definice 31 Rovnice $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}_{m,1}$, $x \in \mathbb{R}_{n,1}$ se nazývá soustava lineárních (algebraických) rovnic.

V rozepsaném tvaru máme

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.5.1)$$

A je matice koeficientů, b je sloupec pravých stran, x je sloupec neznámých,

matice $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$ se nazývá matice rozšířená.

Každý sloupec (sloupcová matice) α pro který platí $A\alpha = b$ se nazývá řešením soustavy (2.5.1).

Definice 32 Soustava (2.5.1) je řešitelná, má-li aspoň jedno řešení.

Soustava (2.5.1) je jednoznačně řešitelná, má-li právě jedno řešení.

Soustava (2.5.1) je víceznačně řešitelná, má-li více než jedno řešení.

Definice 33 Soustava lineárních algebraických rovnic se nazývá homogenní, jestliže je tvaru

$$Ax = \mathcal{O}, \quad (2.5.2)$$

kde \mathcal{O} je nulový sloupec. V opačném případě mluvíme o nehomogenní soustavě.

Definice 34 Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, pak přidruženou homogenní soustavou rozumíme soustavu $Ax = \mathcal{O}$ (t.j. homogenní soustavu se stejnou maticí koeficientů jakou má nehomogenní soustava).

Příklad 26 Mějme danu nehomogenní soustavu

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

Přidružená homogenní soustava má tvar

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

2.6 Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Věta 2.6.1 *Nechť soustava $Ax = b$ má regulární matici koeficientů. Potom má tato soustava právě jedno řešení. Můžeme je určit použitím “Cramerova pravidla” : k -tý člen řešení je zlomek, v jehož jmenovateli je determinant matice koeficientů A a v čitateli determinant matice D_k , která vznikne z matice A tak, že k -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy (2.5.1), ostatní sloupce ponecháme beze změny.*

Příklad 27 *Najít řešení soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Určíme determinant matice koeficientů

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14$$

Determinant matice A je nenulový, soustava je tedy jednoznačně řešitelná. Spočítáme determinanty matic D_i , kde matice D_i vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce sloupcem pravých stran naší soustavy.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -28, \quad |D_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Potom $x_i = \frac{|D_i|}{|A|}$, takže máme

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{-28}{14} = -2, \quad x_3 = \frac{0}{14} = 0.$$

Vyhodnocení: Cramerovy vzorce nám sice dávají přesné řešení, ale je zapotřebí pro ně vypočítat $(n + 1)$ determinantů n -tého řádu. Pro rozsáhlejší soustavy je jejich použití problematické, protože ani s pomocí výpočetní techniky nejsme schopni určit přesně hodnoty determinantů. Cramerovy vzorce navíc předpokládají regularitu matice koeficientů. Nedají se proto použít pro libovolnou soustavu.

Věta 2.6.2 Frobeniova.

Soustava (2.5.1) je řešitelná právě tehdy, když hodnota matice koeficientů se rovná hodnotě matice rozšířené.

Důsledek 20 *Je-li soustava (2.5.1) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, pak pro $h = n$ má soustava (2.5.1) právě jedno řešení a pro $h < n$ má soustava (2.5.1) nekonečně mnoho řešení, která závisí na $(n - h)$ parametrech.*

Příklad 28 Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + y + 2z &= 1 \\x + y + 3z &= 2\end{aligned}$$

Protože $|A| = -2 \neq 0$, jde o kramerovskou soustavu, která má řešení

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = \frac{1}{2}.$$

Příklad 29 Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + y + 2z &= 1 \\x + y + 3z &= 2\end{aligned}$$

$|A| = 0$, proto nemůžeme použít Cramerových vzorců.

$$h(A) = 2, \quad h(A|b) = 3 \Rightarrow h(A) \neq h(A|b).$$

Podle věty 2.6.2 nemá soustava řešení.

Příklad 30 Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + y + 2z &= 1 \\2x + 2z + 4z &= 2\end{aligned}$$

$|A| = 0$, proto nemůžeme použít Cramerových vzorců. Dále

$$h(A) = 2, \quad h(A|b) = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|b),$$

řešení závisí na jednom parametru $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x &= 1 - t \\y &= t \\z &= 0.\end{aligned}$$

Věta 2.6.3 Homogenní soustava (2.5.2) je vždy řešitelná.

Definice 35 Nulové řešení soustavy (2.5.2) nazveme triviálním.

Věta 2.6.4 Homogenní soustava (2.5.2) má netriviální řešení právě tehdy, když hodnost matice koeficientů je menší než počet neznámých.

Věta 2.6.5 Necht' u, v jsou řešením soustavy (2.5.2). Potom i jejich libovolná lineární kombinace $\alpha u + \beta v$ je řešením soustavy (2.5.2).

Definice 36 Maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy (2.5.2) nazveme fundamentální soustavou řešení soustavy (2.5.2).

Věta 2.6.6 Každá víceznačně řešitelná soustava (2.5.2) má vždy fundamentální soustavu řešení.

Příklad 31 Řešte homogenní soustavu rovnic

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0$$

$$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0$$

Řešení: Koeficienty soustavy si zapíšeme do matice a pomocí elementárních řádkových úprav si matici převedeme na stupňovitý tvar.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Máme dvě rovnice o pěti neznámých. Volíme proto tři parametry. Neznámé, které stojí na začátku řádku, jehož předchozí koeficienty jsou nulové, můžeme dopočítat. Zbývající volíme jako parametry. Zvolme $x_2 = 3s$, $x_4 = 3t$, $x_5 = 3u$, kde $s, t, u \in \mathbb{R}$. Potom

$$x = \begin{pmatrix} -2s - 2t + 8u \\ 3s \\ -9u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tři sloupcové matice vpravo pak představují fundamentální soustavu řešení, protože pokud je zapíšeme jako sloupce do matice, tak druhý, čtvrtý a pátý řádek nám vytvářejí nenulový minor řádu 3.

Věta 2.6.7 Nechť p, q jsou řešení soustavy (2.5.1). Potom $(p - q)$ je řešením přidružené homogenní soustavy.

Důsledek 21 Součet řešení soustavy (2.5.1) a řešení přidružené homogenní soustavy je řešením soustavy (2.5.1).

Důsledek 22 Všechna řešení soustavy (2.5.1) získáme jako součet jednoho (parciálního) řešení soustavy (2.5.1) a fundamentální soustavy řešení přidružené homogenní soustavy.

2.7 Gaussova eliminační metoda

Definice 37 Dvě řešitelné soustavy lineárních rovnic se nazývají ekvivalentní, jestliže mají stejnou množinu řešení.

Poznámka 5 Dvě ekvivalentní soustavy mohou mít různý počet rovnic, ale musí mít stejný počet neznámých.

Mějme dvě takové soustavy

$$Ax = b, \quad A'x = b'.$$

Potom z podmínek řešitelnosti plyne, že

$$h(A) = h(A|b) = h(A') = h(A'|b').$$

Protože mají stejnou množinu řešení, tak platí:

$$A\alpha = b \Leftrightarrow A'\alpha = b'.$$

Potom konečným počtem řádkových elementárních úprav lze matici $(A|b)$ převést na matici $(A'|b')$. Nelze kombinovat řádkové a sloupcové úpravy. Můžeme používat pouze řádkové úpravy a ze sloupcových pouze výměnu sloupců v matici A , což je vlastně přeznačení proměnných.

Pomocí povolených elementárních úprav si upravíme soustavu $Ax = b$ na tvar

$$\begin{aligned} c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h + c_{1,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{1,n}y_n &= d_1 \\ c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h + c_{2,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{2,n}y_n &= d_2 \\ &\dots\dots\dots \\ c_{h,h}y_h + c_{h,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{h,n}y_n &= d_h \end{aligned}$$

kde (y_1, y_2, \dots, y_n) je vhodná permutace proměnných (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Je-li $h = n$ má soustava právě jedno řešení — jde o kramerovskou soustavu.

Je-li $h < n$, potom proměnné y_{h+1}, \dots, y_n prohlásíme za parametry a soustavu upravíme na tvar

$$\begin{aligned} c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h &= d_1 - c_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{1,n}y_n \\ c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h &= d_2 - c_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{2,n}y_n \\ &\dots\dots\dots \\ c_{h,h}y_h &= d_h - c_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{h,n}y_n \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Tato soustava je ekvivalentní s původní soustavou $Ax = b$ a každé volbě parametrů y_{h+1}, \dots, y_n odpovídá právě jedno řešení. Parametrů je celkem $(n - h)$. Jestliže za prvky y_{h+1}, \dots, y_n bereme sloupce regulární matice řádu $(n - h)$, potom bereme za parametry lineárně nezávislé prvky a obdržíme obecné řešení soustavy (2.5.1).

Tento postup se nazývá Gaussova eliminační metoda.

Jestliže budeme dále pokračovat v řádkových úpravách, můžeme soustavu (2.7.1) upravit na tvar

$$\begin{aligned} y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_h &= g_1 - f_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{1,n}y_n \\ y_2 + \cdots + 0y_h &= g_2 - f_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{2,n}y_n \\ &\dots \dots \\ y_h &= g_h - f_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{h,n}y_n \end{aligned}$$

zde máme na hlavní diagonále vlevo jednotky a zbývající prvky nalevo jsou nulové. Tento postup se nazývá Jordanova eliminace.

Příklad 32 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 &= 3 \\ -4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Zapišeme rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ -4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 16 & 4 \\ 0 & 10 & 14 & 18 & 22 & 6 \\ 0 & 13 & 18 & 23 & 28 & 8 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 16 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 & 12 & 4 \end{array} \right) &\sim \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o pěti neznámých

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Zvolíme dva parametry $x_4 = s, x_5 = t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 - 2x_4 - 3x_5 = -1 - 2s - 3t \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 2 + s + 2t \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{aligned}$$

Řešením naší soustavy je $x = (0, 2 + s + 2t, -1 - 2s - 3t, s, t)^T$.

Často bývá vhodnější pokračovat dále v maticových úpravách a převést matici na diagonální tvar. V našem případě budeme mít

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

Potom

$$x_1 = 0, x_2 = 2 + x_4 + 2x_5, x_3 = -1 - 2x_4 - 3x_5$$

a analogicky jako v předchozím případě si volíme dva parametry x_4 a x_5 a dostaneme stejný výsledek. $(0, 2, -1, 0, 0)^T$ tvoří partikulární řešení a $(0, 1, -2, 1, 0)^T, (0, 2, -3, 0, 1)^T$ je fundamentální soustava řešení přidružené homogenní soustavy.

Kapitola 3

Vektorové prostory

3.1 Vektorový prostor

Definice 38 Na množině M je definována binární operace $\circ : M \times M \rightarrow M$, jestliže $\forall x, y \in M$ platí $(x \circ y) \in M$.

Příklad 33 Operace násobení na množině \mathbb{Z} je binární operací, protože součin dvou celých čísel je celé číslo.

Operace dělení na množině \mathbb{Z} není binární operací, protože např. $(3 : 2)$ není celé číslo.

Definice 39 Necht' M je množina a $+$ je binární operace na M . Uspořádaná dvojice $(M, +)$ se nazývá grupou, jestliže platí axiomy

$$A) \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in M, \quad (\text{Asociativní zákon})$$

$$B) \quad \exists e \in M : e + x = x + e = x, \quad \forall x \in M, \quad (\text{Existence neutrálního prvku})$$

$$C) \quad \forall x \in M \exists x^{-1} \in M : x + x^{-1} = x^{-1} + x = e, \quad (\text{Existence inverzního prvku})$$

Definice 40 Pokud v grupě $(M, +)$ platí navíc komutativní zákon

$$D) \quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in M,$$

pak mluvíme o komutativní grupě (abelovské grupě).

Důsledek 23 V každé grupě $(M, +)$ platí:

1. $(x^{-1})^{-1} = x$

2. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

3. Jednoznačná řešitelnost rovnic
 $a + x = b, z + a = b \quad \forall a, b \in M$

Příklad 34 1. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ jsou komutativní grupy.

2. (\mathbb{R}, \cdot) není grupou, protože k prvku 0 neexistuje inverzní prvek.
3. $(\{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)$ je komutativní grupou s neutrálním prvkem 1.
4. Množina všech matic typu (m, n) a operace sčítání matic $(\{M_{m,n}\}, +)$ je komutativní grupa.
5. Množina všech čtvercových matic řádu n a operace násobení matic $(\{M_n\}, \cdot)$ není grupou. Inverzní prvek není vždy definován, protože inverzním prvkem je zde inverzní matice a ta existuje pouze u regulárních matic.
6. Množina všech regulárních matic řádu n a operace násobení matic $(\{R_n\}, \cdot)$ je grupou. Je to grupa nekomutativní.
7. Množina $C[a, b]$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ a operace sčítání funkcí tvoří komutativní grupu, kde operace sčítání je definována následovně:
 $\forall f, g \in C[a, b], (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Definice 41 Nechť $(M, +)$ je grupa a $N \subset M$. Potom $(N, +)$ nazveme podgrupou, jestliže $(N, +)$ je grupou.

Příklad 35 1. Množina všech horních trojúhelníkových matic typu (m, n) s operací sčítání matic $(\{H_{m,n}\}, +)$ tvoří podgrupu v grupě $(\{M_{m,n}\}, +)$.

2. $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa v grupě $(\mathbb{C}, +)$.
3. Množina všech polynomů tvoří podgrupu v grupě $(C[a, b], +)$.

Věta 3.1.1 Nechť $(M, +)$ je grupou a $N \subset M$. $(N, +)$ je podgrupou jestliže platí:

- 1) $\forall x, y \in N, x + y \in N$,
- 2) $\forall x \in N, x^{-1} \in N$.

Důsledek 24 Každá podgrupa obsahuje neutrální prvek.

Definice 42 Nechť $(M, +)$ je komutativní grupa s neutrálním prvkem e . Nechť na M je definována binární operace \bullet tak, že $(M \setminus \{e\}, \bullet)$ je grupa a nechť platí distributivní zákon

$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c).$$

Potom uspořádaná trojice $(M, +, \bullet)$ se nazývá tělesem.

Je-li $(M \setminus \{e\}, \bullet)$ komutativní grupou, mluvíme o komutativním tělese a nebo o poli.

Příklad 36 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jsou komutativní tělesa.

2. Nechť Z_p je zbytková třída podle prvočíselného modulu p . Definujme si binární operace \oplus, \odot následovně: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in Z_p : \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x + y}, \bar{x} \odot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$. Potom (Z_p, \oplus, \odot) je komutativní těleso.

Definice 43 Nechť $(L, +)$ je komutativní grupa, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je komutativní těleso a nechť je definována operace $\cdot : \mathbb{R} \times L \rightarrow L$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$, která splňuje následující podmínky $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ asociativita pro násobení
2. $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$ distributivita I.
 $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$ distributivita II.
3. $1 \cdot x = x$

Potom uspořádaná trojice $(L, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .

Prvky z L budeme nazývat vektory, prvky z \mathbb{R} skaláry. Značit budeme vektory malými písmeny latinské abecedy a skaláry malými písmeny řecké abecedy.

Poznámka 6 Pro vektorový prostor se používá i název lineární prostor.

Věta 3.1.2 Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor, \mathcal{O} je neutrální prvek grupy $(L, +)$. Potom $\forall a \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1. $0 \cdot a = \mathcal{O}$,
2. $\alpha \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$,
3. $\alpha \cdot a = \mathcal{O} \iff \alpha = 0 \vee a = \mathcal{O}$,
4. $(-\alpha) \cdot a = (\alpha \cdot a)^{-1}$.

Příklad 37 1. Množina \mathbb{R}^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel spolu s operacemi $+, \cdot$ definovaných následovně $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$ tvoří vektorový prostor.

2. Množina $\{M_{m,n}, +, \cdot\}$ všech matic typu (m, n) s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem tvoří vektorový prostor.
3. Množina $C[a, b]$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ vzhledem k operacím sčítání funkcí a násobení funkce číslem tvoří vektorový prostor.

Definice 44 Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Neprázdnou podmnožinu K vektorového prostoru L nazveme podprostorem prostoru L , jestliže je K vektorovým prostorem vzhledem ke stejným operacím jako vektorový prostor $(L, +, \cdot)$.

Množina K se nazývá nosičem podprostoru.

Příklad 38 1. Množina $\{H_{m,n}, +, \cdot\}$ všech horních trojúhelníkových matic tvoří podprostor v prostoru $\{M_{m,n}, +, \cdot\}$.

2. Podprostorem v $\{C[a, b], +, \cdot\}$ je množina všech polynomů $\{P(\mathbb{R}), +, \cdot\}$.
3. Množina $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ tvoří podprostor v $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

4. Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic o n neznámých tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(M_{(n,1)}, +, \cdot)$ sloupcových matic typu $(n, 1)$.
5. Množina $\{\mathcal{O}\}$ je podprostorem a nazývá se triviální podprostor.

Věta 3.1.3 Neprázdňá podmnožina K vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ je podprostorem v L , právě když pro $\forall u, v \in K, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$u + v \in K, \alpha \cdot u \in K.$$

Věta 3.1.4 Průnik libovolného počtu podprostorů vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ je opět vektorovým podprostorem v L .

Definice 45 Buď M podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Průnik všech podprostorů obsahujících M nazveme lineárním obalem množiny M a označíme $\langle M \rangle$.

Definice 46 Necht' u_1, u_2, \dots, u_n jsou vektory z vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Lineární kombinací vektorů u_i nazveme každý vektor tvaru

$$v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n \cdot u_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Věta 3.1.5 Necht' M je podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Pak platí:

- 1) Je-li $M = \emptyset$, je $\langle M \rangle = \mathcal{O}$.
- 2) Je-li $M \neq \emptyset$, je $\langle M \rangle$ množina všech lineárních kombinací tvaru

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n \cdot u_n, \quad \text{kde } u_i \in M, \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Definice 47 Podmnožina M vektorového prostoru L se nazývá generující, jestliže $\langle M \rangle \equiv L$.

Příklad 39 1. Vektory

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

tvoří generující množinu pro $(M_{2,2}, +, \cdot)$ vektorový prostor všech matic řádu 2.

2. Vektory $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, x+x^3, x^3-x^2+7$ tvoří generující množinu prostoru všech polynomů stupně nejvýše třetího.
3. Vektory $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ tvoří generující množinu ve vektorovém prostoru všech polynomů.

Věta 3.1.6 Podmnožina M vektorového prostoru L je generující právě tehdy, když každý vektor z L je lineární kombinací vektorů z M .

Definice 48 Vektory a_1, a_2, \dots, a_n z vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazveme lineárně nezávislé, jestliže

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n = \mathcal{O} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

a nazveme je lineárně závislé, jestliže existuje aspoň jeden nenulový koeficient α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tak, že platí

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n = \mathcal{O}.$$

Definice 49 Množina $M \subset L$ je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná neprázdná podmnožina $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ je tvořena lineárně nezávislými vektory. Množina $M \subset L$ je lineárně závislá v opačném případě.

Věta 3.1.7 Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Potom platí:

1. Jsou-li prvky $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i prvky $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, kde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.
2. Je-li mezi vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ nulový vektor, jsou vektory a_1, a_2, \dots, a_n lineárně závislé.
3. Jsou-li vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ lineárně závislé, je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.
4. Jsou-li vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ lineárně závislé, potom pro libovolné $a_{n+1} \in L$ jsou lineárně závislé i vektory $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$.

3.2 Báze, dimenze, souřadnice.

Definice 50 Podmnožina \mathcal{B} vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ se nazývá báze vektorového prostoru, jestliže množina \mathcal{B} je lineárně nezávislá a $\langle \mathcal{B} \rangle \equiv L$.

Říkáme také, že báze je lineárně nezávislá generující množina vektorů.

Věta 3.2.1 Buď $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots\}$ báze vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Pak každý nenulový vektor u lze jednoznačně, až na pořadí, vyjádřit ve tvaru

$$u = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n,$$

kde $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{B}$ a vektory a_i jsou po dvou různé.

Věta 3.2.2 V každém netriviálním vektorovém prostoru existuje aspoň jedna báze.

Definice 51 Řekneme, že netriviální vektorový prostor $(L, +, \cdot)$ nad \mathbb{R} má konečnou dimenzi, jestliže v L existuje generující množina tvořená konečným počtem vektorů.

Věta 3.2.3 *Z každé generující množiny vektorového prostoru konečné dimenze lze vybrat bázi.*

Úmluva: Všude dále budeme pod vektorovým prostorem rozumět vektorový prostor konečné dimenze.

Věta 3.2.4 Steinitzova o výměně.

Nechť $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tvoří generující množinu vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$, nechť $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů z $(L, +, \cdot)$. Potom $k \leq n$ a při vhodném označení je množina $\{b_1, b_2, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ generující množinou pro $(L, +, \cdot)$.

Důkaz: Vektor $b_1 \in L$ a proto jej lze vyjádřit podle věty 3.1.6 jako lineární kombinaci vektorů generující množiny:

$$b_1 = (\alpha_1 \cdot a_1) + (\alpha_2 \cdot a_2) + \dots + (\alpha_n \cdot a_n), \quad (3.2.1)$$

kde aspoň jeden z koeficientů $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ je nenulový, neboť b_1 je vektor z lineárně nezávislé množiny a tedy nemůže být nulový. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že nenulový koeficient je u vektoru a_1 (v opačném případě provedeme přeznačení vektorů generující množiny). Z rovnice 3.2.1 si vyjádříme a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot [b_1 - (\alpha_2 \cdot a_2) - \dots - (\alpha_n \cdot a_n)]. \quad (3.2.2)$$

Jestliže nyní ve vyjádření libovolného vektoru v jako lineární kombinace prvků generující množiny nahradíme vektor a_1 vztahem (3.2.2), dostaneme vektor v vyjádřený jako lineární kombinaci vektorů $\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Potom tyto vektory tvoří novou generující množinu. Vyjádříme si nyní b_2 jako jejich lineární kombinaci:

$$b_2 = (\beta_1 \cdot b_1) + (\beta_2 \cdot a_2) + (\beta_3 \cdot a_3) + \dots + (\beta_n \cdot a_n), \quad (3.2.3)$$

kde aspoň jeden z koeficientů β_2, \dots, β_n bude nenulový. Pokud by byly všechny nulové, pak by b_2 bylo násobkem b_1 a to nemůže nastat, protože b_1, b_2 jsou prvky z lineárně nezávislé množiny. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nenulový koeficient je u a_2 . Vyjádříme si z rovnice (3.2.3) vektor a_2 :

$$a_2 = \frac{1}{\beta_2} \cdot [b_2 - \beta_1 \cdot b_1 - \beta_3 \cdot a_3 - \dots - \beta_n \cdot a_n]. \quad (3.2.4)$$

A opět každý vektor vyjádřený jako lineární kombinace vektorů generující množiny $\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ záměnou a_2 podle (3.2.4) dostaneme vyjádřený jako lineární kombinaci vektorů $\{b_1, b_2, a_3, \dots, a_n\}$. Pokračujeme dále podle indukce. Počet lineárně nezávislých vektorů musí být menší nebo roven počtu vektorů generující množiny. Tento počet je konečný a proto se po konečném počtu kroků zastavíme. \square

Důsledek 25 *Každé dvě báze vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ mají stejný počet prvků a každá lineárně nezávislá podmnožina L s tímto počtem prvků je bázi.*

Věta 3.2.5 *Nechť $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ nad \mathbb{R} . Množina \mathcal{B} je bázi prostoru L právě tehdy, když každý vektor $v \in L$ se dá jednoznačně vyjádřit (s přesností do pořadí) jako lineární kombinace prvků z \mathcal{B} .*

Příklad 40 *Mějme prostor $(M_{2,2}, +, \cdot)$. Dokažte, že jeho bázi tvoří vektory*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Podle předchozí věty stačí ukázat, že každý vektor z $M_{2,2}$ se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů A, B, C, D . Mějme libovolný vektor

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a hledáme koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby platilo

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = X.$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= a \\ \beta + \gamma + \delta &= b \\ \gamma + \delta &= c \\ \delta &= d \end{aligned}$$

Jde o nehomogenní soustavu s regulární maticí koeficientů (je to trojúhelníková matice), která je jednoznačně řešitelná pro libovolný tvar pravé strany. To znamená, že libovolný vektor X se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků A, B, C, D a tedy tyto prvky tvoří bázi.

Definice 52 *Nechť $L \neq \{\mathcal{O}\}$ je vektorový prostor konečné dimenze. Dimenzí prostoru L nazveme počet prvků jeho báze. Píšeme $\dim L = n$.*

Triviální vektorový prostor $\mathcal{V} = \{\mathcal{O}\}$ má dimenzi 0.

Vektorový prostor dimenze n budeme značit L_n .

Definice 53 *Nechť je uspořádaná množina $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázi vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ dimenze n . Potom $\forall x \in L$ platí*

$$x = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \dots + \alpha_n \cdot b_n,$$

kde koeficienty α_i jsou určeny jednoznačně. Prvek $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ nazveme souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi \mathcal{B} .

Věta 3.2.6 *Každý podprostor P vektorového prostoru L konečné dimenze má také konečnou dimenzi $m \leq n$.*

Důsledek 26 *Nechť P je podprostor prostoru L konečné dimenze. Jestliže $\dim P = n$, potom $P \equiv L$.*

Příklad 41 *Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ určete v závislosti na parametru α dimenzi lineárního obalu vektorů $a = (\alpha, -4, -1)$, $b = (4, -6, -3)$, $c = (1, 1, -\alpha)$.*

Řešení: Lineární obal množiny vektorů je podprostorem a úloha má smysl. Určíme lineární závislost či nezávislost vektorů a, b, c . Zapišeme vektory je do matice a pomocí elementárních úprav matici převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & -4 & -1 \\ 4 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 4 & -6 & -3 \\ \alpha & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -10 & 4\alpha - 3 \\ 0 & -4 - \alpha & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -10 & 4\alpha - 3 \\ 0 & 0 & -6\alpha^2 + 13\alpha - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rovnice $-6\alpha^2 + 13\alpha - 2 = 0$ má kořeny $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$, proto $\dim \langle a, b, c \rangle = 2$ pro $\alpha = 2$ a nebo $\alpha = \frac{1}{6}$ a $\dim \langle a, b, c \rangle = 3$ pro $\alpha \neq 2$ a $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

3.3 Transformace souřadnic.

Definice 54 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze n . Nechť $\mathcal{A} = ({}_1\infty, {}_1\epsilon, \dots, {}_1\setminus)$ a $\mathcal{B} = ({}_1\infty, {}_1\epsilon, \dots, {}_1\setminus)$ jsou dvě báze tohoto prostoru. Potom prvky báze \mathcal{B} se dají jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze \mathcal{A} .*

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \dots + \alpha_{n1}a_n, \\ b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{n2}a_n, \\ &\dots \quad \dots \\ b_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \dots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

neboli

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}). \quad (3.3.1)$$

Matici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ nazveme maticí přechodu od báze \mathcal{A} k bázi \mathcal{B} .

Ve vztahu (3.3.1) máme vpravo formální součin matic, kde první matice je řádková a její prvky jsou vektory a druhá je čtvercová a její prvky jsou skaláry.

Věta 3.3.1 *Matice přechodu je vždy regulární.*

Věta 3.3.2 O transformaci souřadnic.

Nechť máme vektor x vyjádřený jako lineární kombinaci ve dvou různých bázích $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)\xi_{\mathcal{A}}$ a $x = (b_1, b_2, \dots, b_n)\xi_{\mathcal{B}}$. Nechť $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ je maticí přechodu. Potom

$$\xi_{\mathcal{A}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) \xi_{\mathcal{B}}.$$

Důsledek 27

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Příklad 42 Necht v $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ máme dány dvě báze

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, a $\mathcal{C} = \{(-1, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Určete matici přechodu od báze \mathcal{B} k bázi \mathcal{C} a naopak. Určete $x_{\mathcal{C}}$, $y_{\mathcal{B}}$, jestliže

$x_{\mathcal{B}} = (-1, 3, 0)^T$, $y_{\mathcal{C}} = (2, 4, 7)^T$.

Řešení: $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{C} = \{k, l, m\}$. Prvky báze \mathcal{C} si vyjádříme jako lineární kombinace prvků báze \mathcal{B} .

$$k = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c,$$

$$l = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c,$$

$$m = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c,$$

To znamená, že musíme řešit tři soustavy rovnic se stejnou maticí koeficientů a různými pravými stranami. Budeme je všechny tři řešit najednou, protože u matice koeficientů bychom prováděli opakovaně stejné úpravy. Zapišeme si vektory báze \mathcal{B} i \mathcal{C} sloupcově do matice, přitom vektory báze \mathcal{B} tvoří matici koeficientů a vektory báze \mathcal{C} jsou “pravé strany”, které máme ale zapsány v jedné matici, a pomocí řádkových elementárních úprav najdeme řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Matice přechodu od báze \mathcal{B} k bázi \mathcal{C} je

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od báze \mathcal{C} k bázi \mathcal{B} bude pak matice inverzní

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením nyní dostaneme $x_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})x_{\mathcal{B}} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)^T$, $y_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})y_{\mathcal{C}} = (-4, -1, 7)^T$.

Věta 3.3.3 Necht $\mathcal{A} = (\uparrow_{\infty}, \uparrow_{\epsilon}, \dots, \uparrow_{\setminus})$ je báze vektorového prostoru L , M je regulární matice řádu n . Potom $(a_1, a_2, \dots, a_n)M$ je taktéž báze vektorového prostoru L a všechny báze prostoru L můžeme získat tímto způsobem.

Kapitola 4

Skalární, vektorový a smíšený součin

4.1 Skalární součin

Definice 55 Necht' $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze n nad \mathbb{R} . Zobrazení $g : L \times L \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x, y)$ se nazývá skalárním součinem na L , jestliže $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ a $\forall x, y, z \in L$ platí:

1. $g(x, y) = g(y, x)$, komutativita
2. $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$, distributivita
3. $g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$, vytýkání skalárního násobku
4. $g(x, x) \geq 0$, přičemž $g(x, x) = 0$ pouze pro $x = \mathcal{O}$. pozitivní definitnost

Příklad 43 Mějme prostor $(C[a, b], +, \cdot)$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$. Definujme si zobrazení:

$$\forall u, v \in C[a, b] : g(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Zobrazení g splňuje všechny požadavky definice 55, a tedy se jedná o skalární součin. Proověřte.

Důsledek 28 Platí:

1. $g(\mathcal{O}, x) = 0 \quad \forall x \in L$.
2. $g\left(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j g(x_i, y_j)$.

Věta 4.1.1 V libovolném vektorovém prostoru dimenze n je možné definovat skalární součin.

Definice 56 Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá Eukleidovský vektorový prostor.

Jako standardní skalární součin na \mathbb{R}^n budeme označovat

$$x \bullet y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Definice 57 Nechť L je Eukleidovský prostor dimenze n . Normou vektoru $x \in L$ nazveme číslo

$$\|x\| = \sqrt{g(x, x)} \quad (= \sqrt{x \bullet x}).$$

Věta 4.1.2 $\forall x, y \in (L_n, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$ platí Cauchyova — Schwarzova nerovnost:

$$|x \bullet y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta 4.1.3 $\forall x, y \in L$ platí trojúhelníková nerovnost.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Důsledek 29 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ právě tehdy, když $|x \bullet y| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Definice 58 Velikost úhlu φ mezi dvěma nenulovými vektory je definována takto:

$$\cos \varphi = \frac{x \bullet y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Poznámka 7 Podle Cauchyovy — Schwarzovy nerovnosti je definice korektní. Čitatel je menší nebo roven jmenovateli. Omezujeme se na $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$.

Definice 59 Prvky $x, y \in L$ nazveme ortogonálními, jestliže platí $x \bullet y = 0$.

Poznámka 8 Jde o zobecnění pojmu “kolmost” pro libovolné prostory.

Věta 4.1.4 Pro každé dva ortogonální vektory platí Pythagorova rovnost

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definice 60 Báze vektorového prostoru se nazývá ortogonální, jestliže je tvořena vektory po dvou ortogonálními.

Báze vektorového prostoru se nazývá ortonormální, jestliže platí

$$a_i \bullet a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Důsledek 30 Jsou-li ve vektorovém prostoru dány nenulové vektory a_1, a_2, \dots, a_n po dvou ortogonální, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Věta 4.1.5 Gramova—Schmidtova

V každém netriviálním eukleidovském vektorovém prostoru lze sestavit ortonormální bázi.

Důkaz: Pomocí matematické indukce. Mějme bázi $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Nejdříve vytvoříme ortogonální bázi $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ a pak ji normalizujeme. Každý prvek nové báze \mathcal{B} je roven stejnohlému prvku staré báze \mathcal{A} a lineární kombinaci již vytvořených prvků nové báze \mathcal{B} .

$$b_1 = a_1.$$

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1,$$

kde α_1 je neznámý koeficient. Vynásobíme skalárně tuto rovnost vektorem b_1 a protože vektory b_1, b_2 mají být ortogonální, musí platit

$$0 = (a_2 \bullet b_1) + \alpha(b_1 \bullet b_1),$$

$$\alpha = -\frac{a_2 \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1}.$$

Určili jsme koeficient α a tím také vektor b_2 . Vektor b_2 musí být nenulový, jinak by platilo, že $a_2 = -\alpha b_1 = -\alpha a_1$ a to by byl spor s tvrzením, že a_1, a_2 jsou prvky báze, t.j. jsou lineárně nezávislé. Pokračujeme dále

$$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$$

a postupujeme stejně jako v předchozím případě:

$$\beta_i = -\frac{a_3 \bullet b_i}{b_i \bullet b_i}, \quad i = 1, 2.$$

b_3 opět musí být nenulový. atd. Používáme tedy obecný vztah

$$b_k = a_k + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j b_j, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

kde

$$\gamma_j = -\frac{a_k \bullet b_j}{b_j \bullet b_j}.$$

Nakonec provedeme normalizaci

$$c_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$$

a máme ortonormální bázi $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. □

Poznámka 9 Stejným způsobem můžeme postupovat i při hledání ortonormální báze podprostoru zadaného generující množinou. Jestliže jsou vektory generující množiny lineárně závislé, objeví se během konstrukce některý z vektorů b_i jako nulový. Pak ovšem nemůže být prvkem báze, proto jej vyloučíme a pokračujeme dále.

Příklad 44 Určete ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory

$$a = (1, 1, -1, -1), b = (1, -1, 1, 1), c = (-1, -2, 0, 1), d = (1, -2, 0, 1).$$

Řešení: Hledané ortogonální vektory si označíme k, l, m, n . Potom

$$k = a,$$

$$l = b + \alpha k, \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow l = (3, -1, 1, 1).$$

$$m = c + \beta k + \gamma l, \quad \Rightarrow \beta = 1, \gamma = 0, \quad \Rightarrow m = (0, -1, -1, 0).$$

$$n = d + \delta k + \eta l + \zeta m, \quad \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}, \eta = -\frac{1}{2}, \zeta = -1, \quad \Rightarrow n = (0, 0, 0, 0).$$

Ortogonalní bázi proto tvoří vektory k, l, m .

4.2 Ortogonální průmět.

Definice 61 Dva podprostory K a M vektorového prostoru L jsou ortogonální, když $\forall x \in K, \forall y \in M : x \bullet y = 0$.

Důsledek 31 Nechť K a M jsou ortogonální podprostory. Potom

$$K \cap M = \mathcal{O} \Rightarrow K + M = K \oplus M.$$

Definice 62 Ortogonálním doplňkem podprostoru K nazveme množinu

$$M = \{x \in (L \setminus K) : x \bullet y = 0 \forall y \in K\}.$$

Důsledek 32 Ortogonální doplněk podprostoru doplněný nulovým vektorem je podprostor.

Příklad 45 Určete ortogonální doplněk podprostoru

$$K = \langle a = (-1, 2, 0, 1), b = (3, 1, -2, 4), c = (-4, 1, 2, -3) \rangle.$$

Řešení: Ortogonální doplněk bude tvořen vektory $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, pro něž platí

$$v \bullet a = v \bullet b = v \bullet c = 0.$$

Dosažením dostaneme homogenní soustavu rovnic. Matici koeficientů elementárními úpravami převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Máme soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých. Řešení bude záviset na dvou parametrech a má tvar $v = (4s - t, 2s - t, 7s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $s^2 + t^2 \neq 0$. (Parametry s, t se nemohou oba současně rovnat nule, protože to bychom dostali nulový vektor a ten nepatří do ortogonálního doplňku.) Tím máme popsán ortogonální doplněk.

Pokud chceme bázi ortogonálního podprostoru M , volíme $s = 1, t = 0$ a $s = 0, t = 1$ a dostaneme $M = \langle (4, 2, 7, 0), (-1, -1, 0, 1) \rangle$.

Definice 63 *Ortogonalní průmět vektoru v do podprostoru K je vektor $u \in K$, pro který platí $v = u + z$, kde z je ortogonální k podprostoru K .*

Věta 4.2.1 *Nechť K je podprostor vektorového prostoru L . Potom $\forall v \in L$ můžeme sestavit jeho ortogonalní průmět do podprostoru K .*

Poznámka 10 *Tento postup se využívá v numerické matematice, kde se nazývá “metoda nejmenších čtverců.”*

Příklad 46 *V prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ určete ortogonalní průmět vektoru $x = (1, 2, 3)$ do podprostoru $K = \langle a, b \rangle$, kde $a = (-1, 1, 1)$, $b = (1, 1, 1)$.*

Řešení:

$$x = \alpha a + \beta b + z,$$

kde $z \perp a, b$ a tedy $z \cdot a = z \cdot b = 0$.

$$x \cdot a = \alpha(a \cdot a) + \beta(b \cdot a),$$

$$x \cdot b = \alpha(a \cdot b) + \beta(b \cdot b).$$

Dosazením získáme soustavu rovnic

$$3\alpha + \beta = 4,$$

$$\alpha + 3\beta = 6,$$

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{7}{4},$$

hledaný průmět u je

$$u = \alpha a + \beta b = \frac{3}{4}(-1, 1, 1) + \frac{7}{4}(1, 1, 1) = \left(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Zkouška:

$$z = x - u = (1, 2, 3) - \left(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

potom $z \cdot a = z \cdot b = 0$.

Poznámka 11 *Při výpočtu ortogonalního průmětu musíme počítat se zlomky, pokud nám vyjdou. Zde si nemůžeme dovolit (tak jako při výpočtu ortogonální báze) změnit normu vektoru jeho vynásobením nenulovým číslem.*

4.3 Vektorový počet v E^3 - vektorový a smíšený součin.

Definice 64 Dvě báze \mathcal{A}, \mathcal{B} téhož vektorového prostoru L nazveme souhlasně orientované, jestliže matice přechodu od \mathcal{A} k \mathcal{B} má kladný determinant a nesouhlasně orientované v opačném případě.

Důsledek 33 Protože $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ a pro každou regulární matici M je $|M^{-1}| = |M|^{-1}$, takže obě matice mají determinant buď současně kladný a nebo současně záporný. Tím se množina všechází vektorového prostoru L rozpadne na dvě disjunktní třídy.

Každé dvě báze, patřící do stejné třídy, mají matice přechodu s kladným determinan-tem. Každé dvě báze, patřící různým třídám, mají matice přechodu se záporným determi-nantem.

Jiné označení - kladné , pravotočivé, E^+ .
- záporné, levotočivé, E^- .

V praxi (hlavně technické) se za kladný, pravotočivý systém bere následující:

Definice 65 Mějme dánu soustavu souřadnou $(P, (e_1, e_2, e_3))$. Do roviny (P, e_1, e_2) umístíme hodinky tak, aby ciferník směřoval do poloprostoru v němž leží e_3 . Úhel mezi vektory e_1, e_2 musí být menší než π . Přejdeme-li nyní z e_1 na e_2 proti směru hodinových ručiček, tvoří vektory (e_1, e_2, e_3) kladně orientovanou soustavu. V případě přechodu po směru hodinových ručiček jde o záporně orientovanou soustavu.

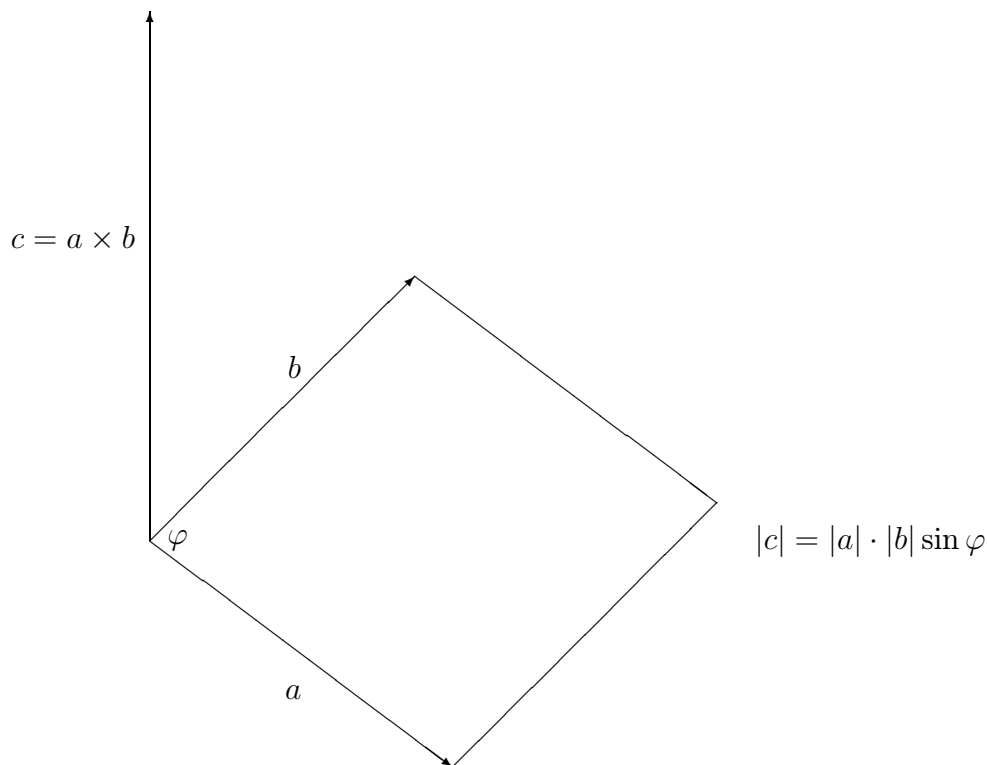
Jiná definice: **Pravidlo pravé ruky.**

Vezmeme si menší z obou úhlů, které svírají vektory a a b . Položíme palec pravé ruky na vektor a a ukazováček pravé ruky na vektor b . Jestliže dlaň směřuje do poloprostoru, kde leží vektor c , jsou vektory a, b, c souhlasně orientované. V opačném případě jsou nesouhlasně orientované.

Důsledek 34 Kanonická báze (i, j, k) prostoru E^3 je pravotočivá (kladná). Přitom $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$.

Definice 66 Měme orientovaný prostor E^3 . Pro každé dva vektory $a, b \in E^3$ definujeme jejich vektorový součin následovně: $a \times b = c$, kde $|c| = |a| \cdot |b| \sin \varphi$ a φ je úhel mezi vektory a, b a trojice $(a, b, a \times b)$ tvoří kladně orientovanou soustavu.

Důsledek 35 Geometrický význam vektorového součinu.



Obr. č. 1

Věta 4.3.1 Je-li (e_1, e_2, e_3) pravotočivá ortonormální báze v E^3 , pak $e_i \times e_j = \pm e_k$ pro každou permutaci (i, j, k) z množiny $\{1, 2, 3\}$, přičemž znaménko (+) se bere pro sudé permutace a znaménko (−) pro liché permutace.

Věta 4.3.2 Nechť (i, j, k) je pravotočivá ortonormální báze v E^3 .
Nechť $a = \alpha i + \beta j + \gamma k$, $b = \varepsilon i + \zeta j + \eta k$. Potom

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta & \eta \end{vmatrix}$$

Poznámka 12 Je to formální determinant. Jeho prvky jsou čísla a vektory. Formálně na něj aplikujeme Sarrusovo pravidlo a získáme správnou hodnotu, která nebude číslem, ale bude vektorem.

Věta 4.3.3 Základní vlastnosti vektorového součinu.

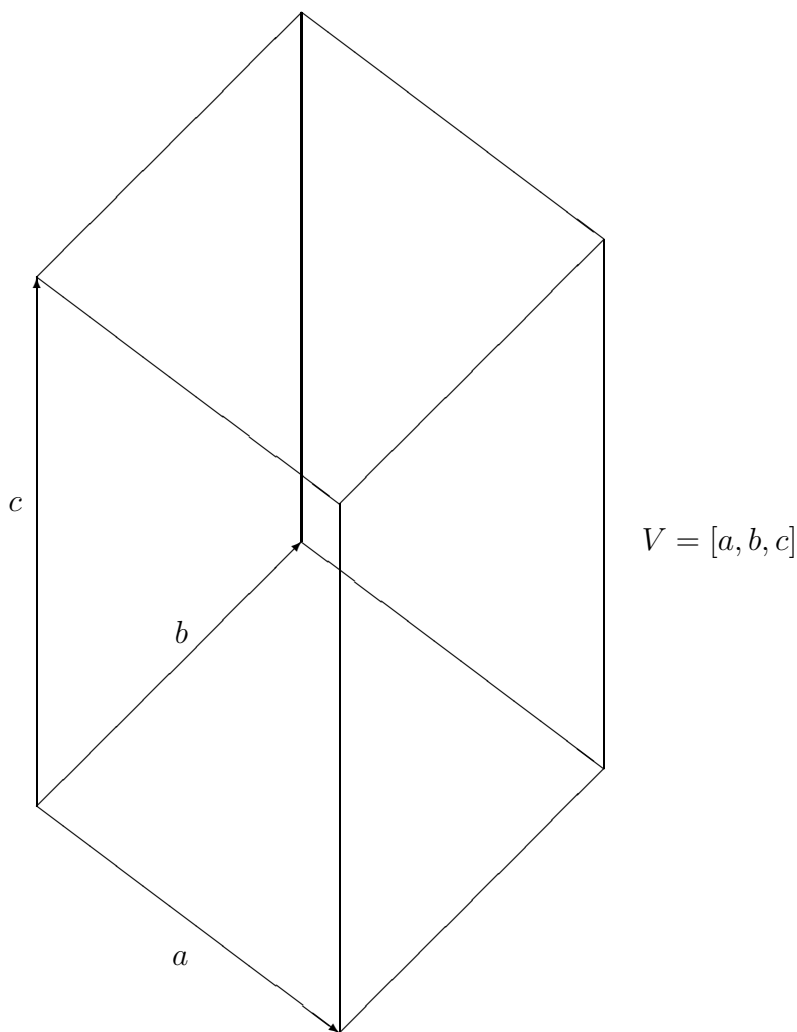
1. $a \times b = -(b \times a)$.
2. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
3. $a \times (\beta b) = (\beta a) \times b = \beta(a \times b)$.

4. a, b jsou lineárně závislé právě tehdy když $a \times b = \mathcal{O}$.

Důkaz: Plyne přímo z definice 66 a věty 4.3.2 a základních vlastností determinantu. \square

Definice 67 Smíšený součin vektorů $a, b, c \in E^3$ je $[a, b, c] = a \bullet (b \times c)$.

Věta 4.3.4 Necht' a, b, c jsou lineárně nezávislé vektory z E^3 . Potom $\pm[a, b, c]$ je objem rovnoběžnostěnu s hranami a, b, c . Znaménko (+) bereme při kladné orientaci uspořádané trojice a, b, c a znaménko (−) při záporné.



Obr. č. 2

Věta 4.3.5 Necht' $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Potom platí

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Věta 4.3.6 *Základní vlastnosti smíšeného součinu:*

1. $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[c, b, a] = -[b, a, c] = -[a, c, b]$.
2. $[\varrho a, b, c] = [a, \varrho b, c] = [a, b, \varrho c] = \varrho [a, b, c]$.
3. $[a + b, c, d] = [a, c, d] + [b, c, d]$.
4. *Vektory a, b, c jsou lineárně závislé právě tehdy, když $[a, b, c] = 0$.*

Kapitola 5

Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů

5.1 Lineární útvary v E^3 .

Přímka

$X = A + t\mathbf{u}$ je vektorová rovnice přímky p .

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \\ z = a_3 + tu_3 \end{array} \right\} \text{ je parametrická rovnice přímky.}$$

Vyloučením parametru t dostaneme dvě rovnice

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ všeobecné rovnice přímky.}$$

Jde o rovnice dvou různých rovin, jejichž průsečíkem je přímka p .

Příklad 47 *Dokažte, že se bude opravdu jednat vždy o různé roviny.*

Řešení: Vektor \mathbf{u} je směrovým vektorem přímky p právě tehdy, když jeho souřadnice (x, y, z) vyhovují soustavě $\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array} \right.$, (jde o skalární součin směrového vektoru \mathbf{u} přímky p a normálového vektoru $\mathbf{n}_i = (a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2$, roviny)

Rovina

$X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ je vektorová rovnice roviny ρ .

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3 \end{array} \right\} \text{ je parametrická rovnice roviny.}$$

Vyloučením parametrů t, s dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0,$$

t.j. obecnou rovnici roviny ρ .

Každý vektor $\mathbf{w} \neq \mathcal{O}$ je směrovým vektorem roviny ρ pokud jeho souřadnice (w_1, w_2, w_3)

vyhovují rovnici $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$.

Všechny nenulové násobky vektoru $\mathbf{n} = (a, b, c)$ jsou normálové vektory.

Obecnou rovnici roviny dostaneme řešením determinantu

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Polorovina, polopřímka, úsečka

Nechť $A, B \in E^3$, $A \neq B$. Vektorová rovnice $X = A + t\mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} = B - A$ a $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ je rovnicí polopřímky AB .

Pro $t \in \langle 0, -\infty \rangle$ jde o rovnici polopřímky BA .

Pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ jde o rovnici úsečky AB .

Zcela analogicky i pro parametrické rovnice.

Jestliže ve vektorové rovnici roviny položíme $t \in \mathbb{R}$, $s \in \langle 0, +\infty \rangle$ dostaneme vektorovou rovnici poloroviny s hraniční přímkou $p : X = A + t\mathbf{u}$ a vnitřním bodem $C = A + \mathbf{v}$.

Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v E^3 jsou buď

různoběžné = mají společný právě jeden bod,

rovnoběžné = leží v jedné rovině a nejsou různoběžné,

mimoběžné = neleží v jedné rovině.

Nechť přímky p, q jsou zadány rovnicemi

$$p : X = P + s\mathbf{u}, \quad q : Y = Q + t\mathbf{v} \quad (5.1.1)$$

nebo

$$p \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad q \begin{cases} \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2 = 0 \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Vzájemná poloha přímek p, q potom záleží na řešitelnosti soustavy rovnic

$$P - Q = t\mathbf{v} - s\mathbf{u} \quad (5.1.3)$$

a nebo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2 = 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Označme A matici koeficientů soustavy (5.1.3) a A^* matici rozšířenou této soustavy.

Označme B matici koeficientů soustavy (5.1.4) a B^* matici rozšířenou této soustavy.

Potom p, q jsou:

1. mimoběžné $\iff h(A^*) = 3$
 $\iff h(B^*) = 4$
2. různoběžné $\iff h(A) = h(A^*) = 2$
 $\iff h(B) = h(B^*) = 3$
3. rovnoběžné a různé $\iff h(A) = 1 \wedge h(A^*) = 2$
 $\iff h(B) = 2 \wedge h(B^*) = 3$
4. totožné $\iff h(A) = h(A^*) = 1$
 $\iff h(B) = h(B^*) = 2$

Úhel φ přímek p, q definujeme jako menší z úhlů, které svírají přímky p, q , pokud jsou různoběžné a jako nulový, pokud jsou rovnoběžné. Jestliže \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou směrové vektory p, q , potom

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Vzájemná poloha přímky a roviny.

Přímka a rovina jsou

- různoběžné = mají právě jeden společný bod.
- rovnoběžné
 - různé = nemají žádný společný bod.
 - splývající = přímka leží v rovině.

Nechť přímka p je dána rovnicí (5.1.1) a nechť \mathbf{n} je normálový vektor roviny ϱ . Potom

1. p a ϱ jsou různoběžné $\iff \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} \neq 0$.
2. p a ϱ jsou rovnoběžné, různé, t.j. $p \not\subset \varrho \iff \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0 \wedge A \notin \varrho$.
3. p a ϱ jsou rovnoběžné, splývající, t.j. $p \subset \varrho \iff \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0 \wedge A \in \varrho$.

Přímka p je kolmá na rovinu ϱ , jestliže je směrový vektor přímky nenulovým násobkem normálového vektoru roviny. Úhel přímky p a roviny ϱ je definován jako úhel směrového vektoru přímky u a jeho ortogonálního průmětu u' do roviny ϱ . Pokud je $p \perp \varrho$ je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Úhel počítáme podle vzorce

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}'|}$$

Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny jsou

- různoběžné = mají společnou přímku.

- rovnoběžné, různé = nemají společný bod.
- rovnoběžné, splývající.

Nechť

$$\begin{aligned} \rho: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ \sigma: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Nechť A a A^* jsou matice koeficientů a matice rozšířená soustavy (5.1.5). Potom ρ a σ jsou

1. různoběžné $\iff h(A) = h(A^*) = 2$
2. rovnoběžné, různé $\iff h(A) = 1 \wedge h(A^*) = 2$
3. totožné $\iff h(A) = h(A^*) = 1$

Úhel dvou rovin můžeme určit jako úhel jejich normálových vektorů.

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$$

5.2 Analytická geometrie lineárních útvarů.

Vzdálenost bodu od přímky

Mějme přímku $p \equiv (A, B)$ a bod C , potom

$$d = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}|}$$

Příčka mimoběžek

Nechť přímka p je určena bodem A a směrovým vektorem a , přímka q je určena bodem B a směrovým vektorem b . Označme $\overline{AB} = c$, potom

$$d = \frac{|[a, b, c]|}{|a \times b|}$$

Rovnice roviny procházející body A, B, C

Nechť $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, potom rovnice roviny procházející těmito body je formální determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.3 Kanonické tvary kuželoseček.

Definice 68 Množinu bodů z E^2 o souřadnicích (x, y) nazveme kuželosečkou, jestliže vyhovují rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

kde $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$. Kvadratickou částí rovnice kuželosečky je $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$, lineární částí rovnice je $2a_1x + 2a_2y$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

je maticí kuželosečky.

Kanonické tvary kuželoseček	
imaginární elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
parabola	$y^2 - 2px = 0$
bod	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
dvě různoběžné přímky	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
\emptyset	$x^2 + a^2 = 0$
dvě rovnoběžné přímky	$x^2 - a^2 = 0$
dvě splývající přímky	$x^2 = 0$

5.4 Kanonické tvary kvadrik.

Definice 69 Množinu bodů z E^3 o souřadnicích (x, y, z) nazveme kvadrikou, nebo kvadratickou plochou, jestliže vyhovují rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

kde $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a_0 \in \mathbb{R}$. Kvadratickou částí rovnice kvadriky je $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, lineární částí rovnice je $2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$.

Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

je maticí kvadriky.

Kanonické tvary kvadrik	
imaginární elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$
elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
jednodílný hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
dvoudílný hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$
eliptický paraboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$
hyperbolický paraboloid	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

imaginární kuželová plocha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
eliptická kuželová plocha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
imaginární válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$
eliptická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
hyperbolická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
parabolická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2} - 2py = 0$
dvě imaginární různoběžné roviny	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
dvě různoběžné roviny	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
dvě imaginární rovnoběžné roviny	$x^2 + a^2 = 0$
dvě rovnoběžné roviny	$x^2 - a^2 = 0$
dvě splývající roviny	$x^2 = 0$

5.5 Kuželosečky a kvadriky — základní vlastnosti

Definice 70 Kvadratická plocha s maticí A se nazývá regulární, jestliže $|A| \neq 0$. Kvadratická plocha se nazývá singulární, jestliže $|A| = 0$.

Věta 5.5.1 Regulární kvadratické plochy jsou: elipsoid, hyperboloid, paraboloid.

Definice 71 Kvadratická plocha se nazývá středová, jestliže má jedinný střed souměrnosti (nazývá se střed kvadratické plochy).

Věta 5.5.2 Bod $S = (s_1, s_2, s_3)$ je středem kvadratické plochy s maticí A právě tehdy, když uspořádaná trojice (s_1, s_2, s_3) je jediným řešením soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 &= 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Věta 5.5.3 Každá kuželosečka či kvadrika se dá vhodnou transformací převést na kanonický tvar.

Příklad 48 Určete kanonickou rovnici kuželosečky

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0.$$

Řešení: Použijeme Lagrangeovu metodu doplnění na čtverec. Vezmeme si všechny členy obsahující x a doplníme je na úplný čtverec. Potom provedeme totéž pro členy obsahující y .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 &= 0, \\ (x^2 + 4xy + 2x) + y^2 + 1 &= 0, \\ [(x + 2y + 1)^2 - 4y^2 - 4y - 1] + y^2 + 1 &= 0, \\ (x + 2y + 1)^2 - 3y^2 - 4y &= 0, \\ (x + 2y + 1)^2 - 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) &= 0, \\ (x + 2y + 1)^2 - 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} &= 0, \\ -\frac{(x + 2y + 1)^2}{\frac{4}{3}} + \frac{3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{4}{3}} &= 1. \end{aligned}$$

Označme

$$\xi = (x + 2y + 1) \quad \eta = \left(y + \frac{2}{3}\right).$$

Potom

$$-\frac{\xi^2}{\frac{4}{3}} + \frac{3\eta^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Dostali jsme rovnici hyperboly.

Kapitola 6

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

6.1 ε - okolí

Definice 72 ε - okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$.

Označení: $O(a), O(a, \varepsilon), U(a), U(a, \varepsilon)$.

Pravé okolí: $[a, a + \varepsilon)$.

Levé okolí: $(a - \varepsilon, a]$.

6.2 Limita funkce

Definice 73 Číslo b se nazývá (vlastní) limita funkce f v bodě a , jestliže funkce je definována v okolí tohoto bodu a jestliže pro $\forall \varepsilon \exists \delta > 0$ (v závislosti na ε) taková, že $\forall x : |x - a| < \delta, x \neq a$ máme $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tento fakt symbolicky zapisujeme následujícím způsobem:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ nebo } f(x) \rightarrow b \text{ (} x \rightarrow a \text{)}.$$

Příklad 49 Necht' $f(x) = x^3$. Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$. Víme, že $|x^3 - 8| = |x^2 + 2x + 4| \cdot |x - 2|$. Podívejme se, co se děje, když se x blíží 2 v jistém okolí bodu 2, např. v okolí s poloměrem 1, tj.

$$2 - 1 < x < 2 + 1 \implies 1 < x < 3.$$

Pro libovolnou hodnotu x v tomto okolí platí

$$7 < |x^2 + 2x + 4| < 19,$$

a tedy

$$|x^3 - 8| < 19|x - 2|.$$

Nechť ε je libovolné pevně zvolené (malé) kladné číslo. Z předchozí nerovnosti plyne, že

$$|x^3 - 8| < \varepsilon \text{ if } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{19} = \delta.$$

($\varepsilon/19$ musí být menší než poloměr okolí, tj. 1.)

Geometricky splnění nerovnosti $|f(x) - b| < \varepsilon$ při splnění nerovnosti $|x - a| < \delta$ znamená, že jestliže sestrojíme na ose Oy okolí bodu b s libovolně malým poloměrem ε , pak lze určit poloměr δ pro takové okolí bodu a na ose Ox , že hodnoty argumentu x (s výjimkou $x = a$) budou patřit do 2δ -okolí bodu a a hodnoty funkce padnou do 2ε okolí bodu b .

Příklad 50 Definujme funkci

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Ukážeme, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \frac{1}{2}.$$

Musíme dokázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - 1| < \delta, x \neq 1 \implies \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že

$$\left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}|x - 1|$$

a

$$\left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \text{ if } |x - 1| < 2\varepsilon = \delta.$$

Příklad 51 Dokažte, že limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \bar{\exists}.$$

Důkaz. Nechť limita je rovna číslu b , tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = b.$$

Vybereme posloupnost $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$. Zřejmě $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0.$$

Tedy $b = 0$. Vybereme jinou posloupnost $\{x_n\} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Zřejmě $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1.$$

Tedy $b = 1$. Došli jsme ke sporu, protože jestliže limita existuje, pak hodnota b musí být určena jednoznačně. (Nakreslete graf funkce $y = \sin \frac{1}{x}$).

Příklad 52 Existuje $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$?

Příklad 53 Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Najdeme $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Pro libovolné $x \neq 2$ máme $f(x) = x + 2$, a protože definice limity pro $x \rightarrow 2$ nezahrnuje hodnotu funkce f v bodě $x = 2$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

6.3 Pravostranná a levostranná limita funkce. Limita zprava a zleva

Definice 74 Pravostranná limita:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in (a, +\infty) \cap D_f} f(x).$$

Číslo b je pravostrannou limitou, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Levostranná limita:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in (-\infty, a) \cap D_f} f(x).$$

Číslo b je levostrannou limitou, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Příklad 54 Najděte jednostranné limity pro $x \rightarrow 1$, jestliže

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Řešení: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

Věta 6.3.1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad (a \neq \infty)$$

\iff

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b.$$

6.4 Nevlastní limita funkce

Definice 75 Funkce f má v bodě $x = a$ nevlastní limitu (tj. limita je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$), jestliže

$$\forall M > 0 \exists \delta \forall x : |x - a| < \delta, x \neq a : f(x) > M \text{ (or } f(x) < -M).$$

Píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

6.5 Další případy limit

Následující limity mohou být definovány analogicky k předchozím definicím vlastních a nevlastních limit (viz podkapitoly 6.2 a 6.4):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= b, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= b. \end{aligned}$$

6.6 Některé věty o limitách

Věta 6.6.1 Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b$ a $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = c$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = b \pm c,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) f_2(x) = b \cdot c,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b}{c}$$

jestliže $c \neq 0$ a $f_2(x) \neq 0$ (v jistém okolí $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$).

Věta 6.6.2 Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1$ a $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$ a jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že v něm

$$f_1(x) < f_2(x) \quad (\text{nebo } f_1(x) \leq f_2(x))$$

pro $x \in U(a), x \neq a$ pak $b_1 \leq b_2$.

Příklad 55 Jestliže $f_1(x) = 1 + x^2$, $f_2(x) = 1 + |x|$, $x \in U(0, \frac{1}{2}) \implies f_1(x) < f_2(x)$ a $b_1 \leq b_2$, tj. $b_1 = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = b_2$.

Věta 6.6.3 Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$ a $b_1 < b_2$ pak $\exists U(a, \delta) \setminus \{a\}$ takové, že $f_1(x) < f_2(x) \quad \forall x \in U(a, \delta) \setminus \{a\}$.

Příklad 56 Jestliže $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 + x^2$, $a = 0$, pak $b_1 = 0 < b_2 = 1$ and $x^2 < 1 + x^2 \quad \forall x \in U(0, 1) \setminus \{0\}$.

Věta 6.6.4 Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$ a jestliže

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$$

pro $x \in U(a)$, $x \neq a$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b.$$

6.7 Limita složené funkce

Pojem složené funkce (nebo také *funkce jiné funkce*):

$$y = f(z), \quad z = \varphi(x) \implies y = f[\varphi(x)];$$

f nazýváme vnější funkcí, φ pak vnitřní funkcí.

Příklad 57 $f(x) = 1 + \cos x$, $\varphi(x) = (x-1)^2$, $f[\varphi(x)] = 1 + \cos(x-1)^2$, $\varphi[f(x)] = \cos^2 x$.

Věta 6.7.1 Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = c$ a $\exists U(a, \epsilon)$ takové, že

$$f(x) \neq b \quad \text{for } x \in U(a, \epsilon), x \neq a \tag{6.7.1}$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi[f(x)] = c.$$

Příklad 58 Jestliže $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$ pak $b = 4$, $c = \frac{1}{4}$ a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \varphi[f(x)] = \frac{1}{4} \quad \left(= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} \right).$$

Podmínka (6.7.1) je nutná!

Příklad 59

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$
 Necht' $a = 0$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi[f(x)] = 0 \neq 1 = \varphi(2)$

$$\varphi[f(x)] = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

6.8 Některé známé limity

(i)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \doteq 2,71828,$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^c, \quad c \in \mathbb{R},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

(Tuto limitu lze získat z předchozí limity substitucí $a^x - 1 = z$)

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

6.9 Spojitost funkce

Definice 76 Funkce f se nazývá spojitá v bodě a , jestliže je definována v okolí $U(a, \varepsilon)$ a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Definice 77 Funkce f se nazývá zprava (zleva) spojitá v bodě a , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \right).$$

Poznámka. Zkráceně zapisujeme:

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Poznámka. Zkrácený zápis $x \rightarrow a^+$ je ekvivalentní zápisu $x \rightarrow a$, $x > a$ a zkrácený zápis $x \rightarrow a^-$ je ekvivalentní zápisu $x \rightarrow a$, $x < a$.

Zavedme pojem přírůstek funkce.

Definice 78 Rozdíl

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

se nazývá přírůstek funkce f v bodě x příslušný přírůstku Δx nezávisle proměnné x .

Zkráceně zapisujeme: $\Delta f = \Delta f(x)$; $\Delta y = \Delta y(x)$, ($y = f(x)$), $\Delta y(x) = \Delta f(x)$.

Poznámka. Přírůstek Δx nezávisle proměnné x nezávisí na x . Nechť například $x = x_0 = 1$, $x = x_1 = 10$, $x = a = -9$, $\Delta x = 0, 1$. Pak $x_0 + \Delta x = 1, 1$; $x_1 + \Delta x = 10, 1$; $a + \Delta x = -8, 9$.

Poznámka. Definice funkce spojitě v bodě a můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = f(a).$$

Definice 79 Funkce f se nazývá spojitá na otevřeném intervalu (a, b) , jestliže je spojitá v každém jeho bodě $c \in (a, b)$.

Definice 80 Funkce f se nazývá spojitá na otevřeném intervalu $[a, b]$, jestliže je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a navíc je v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva.

Úkol. Napište analogicky definici spojitosti funkce na intervalech $(a, b]$ a $[a, b)$.

Úkol. Je funkce

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

spojitá (nespojitá) zprava (zleva) v bodě $x = 0$?

6.10 Některé vlastnosti spojitých funkcí

Věta 6.10.1 Jsou-li funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ spojité v bodě a , pak jejich součet (nebo rozdíl) $f(x) \pm \varphi(x)$, součin $f(x) \cdot \varphi(x)$ a podíl $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (v případě, že $\varphi(a) \neq 0$) jsou také spojité v bodě a .

Věta 6.10.2 Je-li funkce $\varphi(x)$ spojitá v bodě a a funkce $f(y)$ v bodě $b = \varphi(a)$, pak složené funkce $F(x) \equiv f[\varphi(x)]$ je spojitá v bodě a .

Věta 6.10.3 Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a , pak existuje okolí $U(a)$, v němž je $f(x)$ omezená.

Příklad 60 Konstantní funkce $f(x) = C$ je definována a je spojitá pro libovolnou hodnotu x , protože její přírůstek odpovídající libovolnému přírůstku Δx argumentu je $\Delta C = C - C = 0$, a tedy podmínka $\Delta C \rightarrow 0$ (pro $\Delta x \rightarrow 0$) je automaticky splněna.

Příklad 61 Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je definována pro všechny body reálné osy a je v nich spojitá. Skutečně, funkce $y = x$ je spojitá pro libovolné x , neboť

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x) - x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Tedy funkce $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, \dots , $x^n = x^{n-1} \cdot x$ jsou také spojité.

Příklad 62 Polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$) je spojitá funkce pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Racionální lomená funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, m$) je spojitá pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$.

6.11 Odstranitelná nespojitost

Definice 81 Je-li f nespojitá v bodě $x = a$ a pokud současně existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, říkáme, že tento bod je bodem odstranitelné nespojitosti funkce.

Tento pojem má význam, neboť v tomto případě může být funkce f redefinována v bodě a (za předpokladu, že je definována v a) a nebo dodefinována v bodě a (jestliže původně nebyla v bodě a definována) tak, že položíme

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

takže (téměř definovaná!) funkce f je v tomto bodě spojitá.

Příklad 63 *Funkce*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x = 1$. Tato nespojitost je odstranitelná, neboť položíme-li $f(1) = 2$, (nová) funkce f bude spojitá v $x = 1$.

Příklad 64 *Funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ je omezená a má neodstranitelný bod nespojitosti $x = 0$.*

Příklad 65 *Funkce $y = (\text{sign } x)^2$ kde*

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

má odstranitelný bod nespojitosti $x = 0$.

6.12 Klasifikace nespojitostí

Definice 82 *Existují-li pro funkci f v (konečném) bodě a (konečná) čísla $f(a^-)$, $f(a^+)$ a má-li funkce v a přesto bod nespojitosti, říkáme, že tato funkce má bod nespojitosti prvního druhu v bodě a .*

Příklad 66 *Funkce*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 3, & x = 1, \\ 2, & x > 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} & f_2(x) &= \begin{cases} 2, & x > 1, \\ 1, & x \leq 1, \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} 2, & x \geq 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} & f_4(x) &= \begin{cases} 3, & x = 1, \\ 1, & x^2 < 1, \end{cases} \\ f_5(x) &= \begin{cases} 2, & x > 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} & f_6(x) &= \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 1, & x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

mají v bodě $x = 1$ bod nespojitosti prvního druhu.

Definice 83 *Číslo $\delta = \delta(a) = f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá skok nespojitosti. (Bod $x = a$ se pak nazývá bodem skokové nespojitosti.)*

Poznámka. Je-li $x = a$ bodem odstranitelné nespojitosti, pak $\delta(a) = 0$.

Definice 84 *Je-li funkce f definována v okolí bodu a (popřípadě s výjimkou bodu a samotného) a má-li v bodě a bod nespojitosti, který nepatří do třídy nespojitostí prvního druhu, říkáme, že funkce má v a bod nespojitosti druhého druhu.*

Příklad 67 *Funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu. Funkce $y = \frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu.*

6.13 Funkce spojitá na uzavřeném intervalu

Věta 6.13.1 *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, je na něm omezená.*

Zkráceně zapisujeme skutečnost, že funkce f je spojitá na $[a, b]$ takto: $f \in C[a, b]$ nebo $f \in C$ na $[a, b]$.

Věta 6.13.2 (*Weierstrass*) *Funkce $f \in C$ na $[a, b]$ nabývá v nějakých bodech intervalu $[a, b]$ svého maxima a minima, tj. existují body α a β patřící do $[a, b]$ takové, že*

$$\min_{x \in [a, b]} = f(\alpha), \quad \max_{x \in [a, b]} = f(\beta).$$

Tedy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ pro všechna $x \in [a, b]$.

Poznámka. Např. funkce $y = x$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0, 1)$ a je na něm omezená; avšak na tomto intervalu nedosahuje svého suprema $\sup_{x \in (0, 1)} x = 1$, tj. neexistuje

$x_0 \in (0, 1)$ takové, že by funkční hodnota v tomto bodě byla rovna 1. Vidíme, že funkce je rovna 1 pro $x = 1$. Vidíme, že požadavek spojitosti funkce na *uzavřeném* intervalu $[a, b]$ (zahrnujícím oba krajní body a a b) je zásadní.

Zřejmě $\sup_{x \geq 0} \arctg x = \frac{\pi}{2}$. Neexistuje však bod x na polopřímce $x \geq 0$, v němž by funkce $\arctg x$ nabývala hodnoty $\frac{\pi}{2}$; tedy pro $x \geq 0$ nedosahuje svého maxima. Podmínky výše uvedené věty jsou i v tomto případě porušeny, protože definiční obor spojitě funkce $\arctg x$ není omezený.

Věta 6.13.3 *Je-li $f \in C$ na $[a, b]$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje na otevřeném intervalu (a, b) alespoň jeden bod c , pro nějž $f(c) = 0$.*

Důsledek. Funkce $f \in C$ na $[a, b]$ nabývá na tomto intervalu všech hodnot mezi hodnotami v koncových bodech.

Důsledek. Každá polynomiální rovnice $P_n(x) = 0$ lichého stupně n , $a_n \neq 0$ má nejméně jedno řešení.

Příklad 68 *Rovnice $\cos x - x = 0$ má kořen ležící na intervalu $(0, \pi)$, protože $f(0) > 0$, $f(\pi) < 0$ kde $f(x) = \cos x - x$ a $f(x)$ je spojitá funkce.*

6.14 Tečna ke křivce

Nechť Γ je graf spojitě funkce $y = f(x)$. Vybereme na funkci Γ bod A s souřadnicí x_0 a jiný bod C se souřadnicí $x_0 + \Delta x$, ($\Delta x \neq 0$). Sečna S procházející bodem A a C svírá s kladnou poloosou x úhel β . Tangens úhlu β vyjádříme vzorcem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Nechť Δx se blíží nule; pak pro spojitou funkci f se hodnota Δy také bude blížit nule a bod C se bude pohybovat podél Γ a bude se přibližovat k bodu A . Jestliže se v tomto limitním procesu ukáže, že poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se blíží jedné a že pro nějakou konečnou limitu (číslo) k libovolné takové, pro něž Δx se blíží k nule platí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow k \quad (\Delta x \longrightarrow 0),$$

pak úhel β se bude také blížit k jistému úhlu α . Spolu se změnou β bude sečna S rotovat kolem A a bude se v limitě přibližovat k přímce T procházející bodem A a svírající úhel α s kladnou poloosou x . To znamená, že T je tečnou k funkci Γ v bodě A a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

Tak jsme dokázali, že jestliže se poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blíží konečné limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$, křivka Γ má v bodě A tečnu, jejíž směrnice je rovna této limitě.

Rovnici tečny lze zapsat takto: $y - y_0 = k(x - x_0)$, kde

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

6.15 Derivace

Definice 85 Derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je definována jako vlastní limita

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(Jiný zápis: $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$.)

Poslední limita může být přepsána takto:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Příklad 69 Pro $n \in \mathbb{N}$ máme $(x^n)' = nx^{n-1}$. Opravdu, podle Newtonovy binomické věty

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + nx (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right] = \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Věta 6.15.1 Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci f' , je v tomto bodě spojitá.

6.16 Geometrický a fyzikální význam derivace

Geometrický význam — viz část 6.14

Fyzikální význam: Okamžitá rychlost.

Nechť se bod pohybuje po přímce a nechť funkce $s = f(t)$ vyjadřuje závislost jeho vzdálenosti s od počátečního bodu O (bráno s odpovídajícím znaménkem) v čase t . V okamžiku t je bod ve vzdálenosti $s = f(t)$ od O . V jiném časovém okamžiku $t + \Delta t$ je ve vzdálenosti $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ od O . Jeho průměrná rychlost během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je vyjádřena jako

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Okamžitá („skutečná“) rychlost v bodu v okamžiku t může přirozeně být definována jako limita, k níž se v_{av} blíží, když $\Delta t \rightarrow 0$, tj.

$$v(t) = v_{ins}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

6.17 Tabulka derivací základních elementárních funkcí

$$(C)' = 0, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0,$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, a > 0,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$(|x|)' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x,$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}, \quad (\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{(\sinh x)^2}.$$

6.18 Derivace zprava a zleva

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta x > 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta x < 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

6.19 Některá základní pravidla pro derivování

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x), \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{1}{g^2(x)} (f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)), \\ (f(x)^{g(x)})' &= g(x)[f(x)]^{g(x)-1} f'(x) + [f(x)]^{g(x)} (\ln f(x)) g'(x). \end{aligned}$$

6.20 Derivace složené funkce

$$y = f[\varphi(x)], \quad y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

6.21 Diferenciál funkce

Definice 86 Funkce f se nazývá diferencovatelná v bodě x_0 , jestliže její přírůstek $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit jako

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{6.21.1}$$

kde $A = f'(x_0) = \text{const}$, $\Delta x = x - x_0$ a $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Příklad 70 Funkce $y = x^2$ je diferencovatelná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, protože

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

a $A = 2x$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x$.

Definice 87 Hlavní – lineární – část přírůstku (6.21.1) se nazývá diferenciál funkce f v bodě x vzhledem k danému přírůstku Δx a značí se $df(x) = f'(x)\Delta x$ (nebo $dy = f'(x)dx$).

Poznámka. a) $dx = \Delta x$, b) $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, jestliže $\Delta x \rightarrow 0$ a $f'(x_0) \neq 0$.

Geometrický význam diferenciálu. Rovnice tečny:

$$y - y_0 = \text{tg} \alpha \cdot (x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

jestliže $x = x_0 + \Delta x$. Tedy $y = y_0 + f'(x_0)\Delta x = y_0 + dy(x_0)$.

Příklad 71 Máme odhadnout množství materiálu potřebného k výrobě krabice ve tvaru krychle, jestliže víme, že její vnitřní hrany jsou 10 cm dlouhé a že tloušťka stěn je 0,1 cm.

Objem krychle s hranou a je vyjádřen funkcí $V(a) = a^3$. Objem materiálu potřebného na stěny krychle je přibližně vyjádřen přírůstkem této funkce:

$$\Delta V = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0,1 = 300 \cdot 0,1 = 30 \text{ cm}^3.$$

6.22 Derivace inverzní funkce

$$y = f(x), \quad x = g(y), \quad f[g(y)] \equiv y, \quad f'[g(y)] \cdot g'(y) = 1 \quad \implies$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}. \quad (6.22.1)$$

Příklad 72 $y = x + \ln x$, $x'(y) = ?$

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x(y)}{1 + x(y)}.$$

6.23 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Derivace vyšších řádů:

$$f''(x) = [f'(x)]', \quad f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Příklad 73 • $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, y' = \alpha x^{\alpha-1}, y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \dots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. If $\alpha \in \mathbb{N}$ then $y^{(\alpha)} = \alpha(\alpha-1) \dots 1x^0 = \alpha!$ and $y^{(\alpha+1)} = y^{(\alpha+2)} = \dots = 0$,

$$\bullet y = 2^x, y' = 2^x \ln 2, y'' = 2^x (\ln 2)^2, \dots, y^{(n)} = 2^x (\ln 2)^n.$$

Leibnizova formule. Je-li $f(x) = u(x)v(x)$, pak

$$f^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1} u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u''v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} u^{(l)}v^{(n-l)}.$$

Diferenciály vyšších řádů:

$$dy = f'(x)dx, \quad d^2y = d(dy), \dots, \quad d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Nechť $y = f(x)$. Vypočtěte d^2y : $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' = f''(x)(dx)^2 + f'(x)(dx)'dx = f''(x)(dx)^2$, protože $(dx)' = (\Delta x)' = 0$ (Δx je považováno za konstantní veličinu nezávislou na x). V obecném případě

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

6.24 Numerické derivování

Nejjednodušší vzorce pro numerické derivování

Předpokládejme, že v nějakém bodě x má funkce f derivaci

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Potom je přirozené položit

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Vyvstává otázka: jaká je chyba (tj. jaký je rozdíl mezi členy na pravé a na levé straně) této přibližné rovnosti? Abychom získali kvantitativní odhady této chyby, sám fakt, že existuje $f'(x)$, je nedostatečný. Proto obvykle při analýze chyb přibližných metod numerické derivace požadujeme, aby měla daná funkce derivaci řádu vyššího než počítaná derivace. Nechť $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, kde $h > 0$ je krok. Položme $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, atd. Předpokládejme, že $f \in C^2([x_0, x_1], \mathbb{R})$. Potom existuje bod ξ takový, že

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_1. \quad (6.24.1)$$

Je-li $f \in C^3([x_{-1}, x_1], \mathbb{R})$, pak navíc

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \quad (6.24.2)$$

Z podmínky, že $f \in C^{(4)}[x_{-1}, x_1]$, dostáváme

$$f''_0 = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} - \frac{h^4}{12} \cdot f^{(4)}(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \quad (6.24.3)$$

Bod ξ ve výše uvedených vzorcích není znám.

Vztahy (6.24.1) a (6.24.3) mohou být dokázány přesně. Tyto důkazy vynecháváme.

Vztahy (6.24.1) - (6.24.3) se nazývají *vzorce pro numerické derivování se zbytkem* a vztahy

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad f'_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \quad f''_0 \approx \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$$

jednoduše *vzorce pro numerické derivování*. Chyby těchto vzorců jsou

$$\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)|,$$

(chyba je prvního řádu vzhledem k h (nebo je řádu h));

$$\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f'''(x)|,$$

(říkáme, že chyba zde a v následujícím vztahu je druhého řádu vzhledem k h (neboli je řádu h^2)),

$$\left| f''_0 - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f^{(4)}(x)|.$$

6.25 Derivování s programem MAPLE V

Derivování pomocí programu MAPLE V se provádí pomocí příkazu "diff". Prvním argumentem příkazu "diff" je výraz, který má být zderivován, druhým argumentem je proměnná, vzhledem k níž budeme derivovat.

Příklad 74 Najděte derivaci funkce

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x.$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
diff(sin(x)*tan(x),x);
```

Výsledek vypsáný programem MAPLE je tvaru:

$$\cos(x) \tan(x) \sin(x)(1 + \tan(x)^2)$$

Příklad 75 Najděte derivaci funkce

$$x^{x^x}.$$

pomocí programu MAPLE V.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
diff(x^(x^x),x);
```

Výsledek vypsáný programem MAPLE je tvaru:

$$x^{(x^x)} \left(x^x (\ln(x) + 1) + \frac{x^x}{x} \right)$$

6.26 Taylorovy polynomy

????jinam???

Uvažme následující problém: Jaké podmínky zaručují, že funkce $f(x)$ může být přibližně zapsána jako polynom? Předpokládejme, že $f(x) \in C^n$ (kde n je dostatečně vysoké číslo) v okolí $\mathcal{O}(\xi)$. Pokusme se přibližně nahradit tuto funkci $f(x)$ polynomem

$$f(x) \doteq a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

Lehce nahlédneme, že (pro $x = x_0$) $a_0 = f(x_0)$. Derivujme tento polynom. Dostáváme

$$f'(x) \doteq a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

a vidíme, že $a_1 = f'(x_0)$. Analogicky

$$f''(x) \doteq 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

a, jako výše, $a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$. Pokračujeme-li tímto způsobem, dostáváme po n té derivaci

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dosazením těchto výrazů do původní nerovnosti dostáváme

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Koeficienty

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se nazývají *Taylorovy koeficienty* a součty

$$T_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Taylorovy polynomy.

6.27 Taylorův vzorec

???jinam??? Napišme

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom a $R_n(x)$ je zbytek.

Věta 6.27.1 (Lagrangeova věta) *Je-li $f(x) \in C^{(n+1)}$ na $\mathcal{O}(\xi)$ pak*

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

pro všechna $x \in \mathcal{O}(\xi)$, kde ξ je číslo ležící mezi x_0 a x .

6.28 Inverzní trigonometrické funkce a jejich derivace

- $y = \arcsin x$ (arkus sinus) je inverzní k funkci $y = \sin x$; $\arcsin(\sin x) \equiv x$, $\sin(\arcsin x) \equiv x$, $x \in D_f = [-1, 1]$.

Derivace funkce $y = \arcsin x$:

$$y = \arcsin x \implies x = \sin y;$$

podle vzorce (6.22.1)

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $y = \arccos x$ (arkus kosinus) je inverzní k funkci $y = \cos x$; $\arccos(\cos x) \equiv x$, $\cos(\arccos x) \equiv x$, $x \in D_f = [-1, 1]$.

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $y = \operatorname{arctg} x$ (arkus tangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x$, $x \in D_f = (-\infty, +\infty)$,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

- $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$; $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) \equiv x$, $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) \equiv x$, $x \in D_f = (-\infty, +\infty)$.

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

6.29 Derivace hyperbolických funkcí

- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$

6.30 Derivace inverzních hyperbolických funkcí

- $y = (\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$,
- $y = (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$,
- $y = (\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$,
- $y = (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x| > 1$

Dokažme první vzorec: $y = \operatorname{argsinh} x \implies x = \sinh y$,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

6.31 Klasifikace funkcí

1. Základní elementární funkce

Definice 88 Třída základních elementárních funkcí zahrnuje následující funkce:

- (a) mocninná funkce $y = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}$;
- (b) exponenciální funkce $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; logaritmická funkce $y = \log_a x$, $a > 0$, $a > 1$;
- (c) trigonometrické funkce ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$) a inverzní trigonometrické funkce ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$).

2. Elementární funkce

Definice 89 Funkce, které vzniknou ze základních elementárních funkcí a konstant pomocí konečného počtu aritmetických operací a skládání funkcí se nazývají elementární funkce.

Např.

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - e^x}}$$

je elementární funkce.

3. Algebraické funkce

Definice 90 Algebraická funkce je funkce $y = y(x)$ daná algebraickou rovnicí

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

kde $P_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$ jsou polynomy.

Speciální případy:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(pro $P_1(x) \equiv -1$, $P_j(x) \equiv 0$, $j > 1$) nebo

$$y = \frac{-P_0(x)}{P_1(x)}$$

(pro $P_j(x) \equiv 0$, $j > 1$).

4. Transcendentní funkce

Definice 91 Každá funkce, která nepatří do třídy algebraických funkcí, se nazývá transcendentní.

6.32 Některé věty o diferencovatelných funkcích

Věta 6.32.1 (Fermatova věta) *Jestliže*

- a) $f(x) \in C$ na $[a, b]$,
 - b) v bodě ξ nabývá $f(x)$ své nejvyšší (nebo nejnižší) hodnoty
 - c) $\exists f'(\xi)$
- pak $f'(\xi) = 0$.

Věta 6.32.2 (Rolleova věta) *Jestliže*

- a) $f(x) \in C$ na $[a, b]$,
 - b) $f(x) \in C^1$ na (a, b) ,
 - c) $f(a) = f(b)$
- pak $\exists \xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Věta 6.32.3 (Lagrangeova věta) *Jestliže*

- a) $f(x) \in C$ na $[a, b]$,
 - b) $f(x) \in C^1$ na (a, b)
- pak $\exists \xi \in (a, b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Geometrický význam.

Jiný tvar Lagrangeovy věty:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) .$$

Přírůstek funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ závisí na hodnotě derivace a přírůstku nezávisle proměnné.

Věta 6.32.4 (Cauchyova věta) *Jestliže*

- a) $f(x), \varphi(x) \in C$ na $[a, b]$,
 - b) $f(x), \varphi(x) \in C^1$ na (a, b) ,
 - c) $\varphi'(x) \neq 0$ na (a, b) ,
- pak existuje číslo $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} .$$

Věta 6.32.5 (L'Hospitalovo pravidlo) *Je-li*

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x) = 0(\infty),$$

a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Příklad 76

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

6.33 Testování monotónnosti funkce

Věta 6.33.1 (Nutné podmínky monotónnosti funkce) *Jestliže $\exists f'(x)$ na (a, b) a*

- 1) $f(x)$ roste na $(a, b) \implies f'(x) \geq 0$ na (a, b) ,
- 2) $f(x)$ klesá na $(a, b) \implies f'(x) \leq 0$ na (a, b) ,
- 3) $f(x)$ je rovno konstantě na $(a, b) \implies f'(x) = 0$ na (a, b) .

Věta 6.33.2 (Dostatečné podmínky pro monotónnost) *Jestliže $f(x) \in C$ na $[a, b]$, $f'(x) \in C^1$ na (a, b) a*

- 1) $f'(x) > 0$ na $(a, b) \implies f(x)$ roste na $[a, b]$,
- 2) $f'(x) < 0$ na $(a, b) \implies f(x)$ klesá na $[a, b]$,
- 3) $f'(x) = 0$ na $(a, b) \implies f(x) \equiv k$ na $[a, b]$.

6.34 Extrémy funkcí

Definice 92 *Bod x_0 se nazývá lokální maximum (lokální minimum) funkce $f(x)$ jestliže $f(x_0) \geq f(x)$, $x \in \mathcal{O}(\xi_r)$ ($f(x_0) \leq f(x)$, $x \in \mathcal{O}(\xi_r)$).*

Definice 93 *Body, v nichž funkce nabývá svého maxima nebo minima se souhrnně označují jako body extrému. Hodnota funkce v těchto bodech se nazývá extrém.*

Věta 6.34.1 (Nutná podmínka pro existenci extrému) *Jestliže funkce $f(x)$ má extrém v bodě x_0 , jeho derivace v tomto bodě (pokud $\exists f'(x_0)$) je rovna nule nebo neexistuje.*

6.35 Nutné podmínky pro extrémy**Věta 6.35.1**

- A) *Je-li $f'(x)$ kladná pro $x < x_0$ a záporná pro $x > x_0$, bod x_0 je bodem lokálního maxima. Je-li $f'(x)$ záporná pro $x < x_0$ a kladná pro $x > x_0$, bod x_0 je bodem lokálního minima.*
- B) *Je-li $f'(x_0) = 0$ a*
 - $f''(x_0) > 0$, *bod x_0 je bodem lokálního minima,*

- $f''(x_0) < 0$, bod x_0 je bodem lokálního maxima.

C) Je-li $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, n je sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$ (< 0), bod x_0 je bodem lokálního minima (maxima).

6.36 Konvexnost a konkávnost křivky. Inflexní body.

Definice 94 Říkáme, že oblouk křivky je konvexní, jestliže leží celý na jedné straně tečny vedené kterýmkoli bodem oblouku.

Rozlišujeme dva druhy konvexních oblouků: konvexní nahoru (konkávní dolů), konvexní dolů (konkávní nahoru, konvexní).

Definice 95 Bod křivky, který odděluje její konvexní oblouk od konkávního se nazývá inflexní bod.

Věta 6.36.1 Je-li $f''(x) < 0$, pak oblouk $y = f(x)$ je konkávní; je-li $f''(x) > 0$, pak oblouk $y = f(x)$ je konvexní.

Věta 6.36.2 (Nutná podmínka pro inflexní bod) Je-li x_0 inflexním bodem, pak $f''(x_0) = 0$.

Věta 6.36.3 (Dostatečné podmínky pro inflexní bod)

A) Jestliže $f''(x)$ mění znaménko, když x prochází x_0 , pak x_0 je inflexním bodem.

B) Jestliže $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexním bodem.

C) Jestliže $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a n je liché, pak x_0 je inflexní bod.

6.37 Asymptoty křivky

A) Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, křivka $y = f(x)$ má vertikální asymptotu $x = x_0$.

B) Jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - Kx] = q \in \mathbb{R}$, křivka $y = f(x)$ má asymptotu danou rovnicí $y = kx + q$.

6.38 Obecné schéma pro vyšetřování průběhu funkce

Je nutno vyšetřit:

- I. (a) Definiční obor D_f funkce $f(x)$.
- (b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti.
- (c) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a vertikální asymptoty.

- (d) Průsečíky se souřadnými osami.
- (e) Symetrie grafu funkce (sudá, lichá).
- (f) Periodičnost funkce.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémů.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí.

6.39 Některé numerické metody pro řešení nelineárních rovnic a soustav rovnic

1. Metoda půlení (Metoda rozdělování úsečky na dva stejné díly)

Uvažujme rovnici

$$f(x) = 0,$$

kde funkce $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$ a

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Abychom našli kořen ležící v intervalu $[a, b]$, rozdělíme interval na polovinu. Jestliže $f((a+b)/2) = 0$, pak $\xi = (a+b)/2$ je kořenem rovnice. Jestliže

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$

vybereme ten z intervalů $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$, v jehož koncových bodech má funkce $f(x)$ opačná znaménka. Tento nově vzniklý interval $[a_1, b_1]$ znovu rozpůlíme a zopakujeme postup, až nakonec během procesu budto získáme přesný kořen nebo nekonečnou posloupnost vnořených intervalů

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

takovou, že

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{6.39.1}$$

a

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Pokud levé koncové body

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

tvorí monotónní neklesající omezenou posloupnost a pravé koncové body

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

monotónní nerostoucí posloupnost, pak existuje společná limita

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Přibližujeme-li se limitě v (6.39.1) pro $n \rightarrow \infty$, dostáváme $[f(\xi)]^2 \leq 0$, tedy $f(\xi) = 0$, což znamená, že ξ je kořenem rovnice. Je zřejmé, že

$$0 \leq \xi - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a).$$

2. Metoda tečen (Metoda proporciálních částí)

Předpokládejme, že $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Potom je místo půlení intervalu $[a, b]$ přirozenější rozdělit interval v poměru

$$f(a) : f(b).$$

Tím dostáváme odpovídající hodnotu kořene

$$x_1 = a + h_1,$$

kde

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)} \cdot (b - a) = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a).$$

Aplikujeme-li tento postup na interval $[a, x_1]$ nebo $[x_1, b]$ v jejichž koncových bodech má funkce $f(x)$ opačná znaménka, dostáváme druhou aproximaci kořene x_2 , atd. Geometricky je metoda proporciálních částí ekvivalentní nahrazení křivky

$$y = f(x)$$

tětivou procházející body $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$. Skutečně, rovnice tětivy AB je

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Položíme-li $x = x_1$ a $y = 0$, dostáváme

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a).$$

Předpokládejme, že $f''(x) > 0$ pro $a \leq x \leq b$ (případ $f''(x) < 0$ se redukuje na náš případ, pokud napíšeme rovnici jako: $-f(x) = 0$). Pak bude křivka $y = f(x)$ *konkávní* a tedy bude ležet pod tečnou AB . Mohou nastat dva případy: $f(a) > 0$ a $f(a) < 0$.

V prvním případě je koncový bod a pevný a postupné aproximace

$$x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tvoří omezenou posloupnost a

$$a < \xi < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0.$$

Ve druhém případě je koncový bod b pevný a postupné aproximace

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} \cdot (b - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

tvoří omezenou rostoucí posloupnost a

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \xi < b.$$

Lze dokázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi, \quad \text{and} \quad f(\xi) = 0.$$

3. Newtonova metoda (Metoda tečen)

Nechť existuje kořen rovnice $f(x) = 0$. Newtonova metoda je ekvivalentní nahrazování malých částí oblouku křivky $y = f(x)$ tečnou vedenou bodem křivky. Předpokládejme, že $f''(x) > 0$ pro $a \leq x \leq b$ a $f(b) > 0$. Vyberme např. $x_0 = b$, pro nějž $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Vedme tečnu ke křivce $y = f(x)$ bodem $B_0(x_0, f(x_0))$. Proprvní aproximaci x_1 kořene ξ vezměme úsek vyřatý na ose x touto tečnou. Bodem $B_1(x_1, f(x_1))$ znovu vedeme tečnu, jejíž x -ová souřadnice průsečíku dává druhou aproximaci x_2 kořene ξ atd. Je zřejmé, že rovnice tečny v bodě $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$ je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Položíme-li $y = 0$, $x = x_{n+1}$, dostáváme vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{6.39.2}$$

Všimněme si, že v našem případě pokládáme $x_0 = a$ a tedy $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$. Pokud bychom vedli tečnu ke křivce $y = f(x)$ bodem $A(a, f(a))$, dostali bychom bod x'_1 , který leží vně intervalu $[a, b]$ a metoda by selhala.

Věta 6.39.1 *Jestliže $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x)$, $f''(x)$ jsou nenulové a zachovávají znaménko na $a \leq x \leq b$, pak lze z počáteční aproximace $x_0 \in [a, b]$, pro niž $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ užitím Newtonovy metody (6.39.2) vypočítat samotný kořen ξ rovnice $f(x) = 0$ s libovolnou přesností.*

Pro přesnost dostáváme vzorec (???)

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|.$$

4. Iterační metoda

Nechť je dána rovnice

$$f(x) = 0, \quad (6.39.3)$$

kde $f(x)$ je spojitá funkce a chceme určit její reálné kořeny. Nahradíme (6.39.3) ekvivalentní rovnicí

$$x = \varphi(x). \quad (6.39.4)$$

Nějakým způsobem vybereme přibližnou hodnotu kořene, x_0 , a dosadíme ji do správného člene (6.39.4), abychom získali číslo

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (6.39.5)$$

Nyní dosadíme x_1 do správného člene (6.39.5) za x_0 a dostaneme nové číslo

$$x_2 = \varphi(x_1).$$

Opakováním tohoto procesu dostáváme posloupnost čísel

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Je-li tato posloupnost konvergentní, pak limita

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

je kořenem (6.39.3).

Geometricky lze iterační metodu vysvětlit následovně: (see figure):

Věta 6.39.2 *Nechť funkce φ je definována a diferencovatelná na intervalu $[a, b]$ se všemi hodnotami $\varphi(x) \in [a, b]$. Pak existuje ryzí zlomek q takový, že*

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

pro $a < x < b$. Pak iterační proces

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

konverguje, bez ohledu na počáteční hodnotu $x_0 \in [a, b]$; limitní hodnota $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ je jediným kořenem rovnice

$$x = \varphi(x)$$

na intervalu $[a, b]$.

Poznámka 13 *Iterační proces může divergovat (viz obrázek):*

5. Iterační metoda pro soustavu dvou rovnic

Nechť je dána rovnice o dvou neznámých

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{6.39.6}$$

Máme za úkol najít její reálné kořeny s předem danou přesností. Uvádíme iterační proces, který za jistých okolností dovoluje zlepšení přibližných hodnot kořenů. Za tím účelem zapíšeme (6.39.6) jako

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y), \\ y &= \varphi_2(x, y), \end{aligned} \tag{6.39.7}$$

a zkonstruujeme postupné aproximace podle následujících vzorců:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \varphi_2(x_n, y_n), \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{6.39.8}$$

Existují-li limity

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

pak bod (ξ, η) je kořenem (6.39.6).

Věta 6.39.3 *Nechť je v uzavřeném intervalu $R = \{a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$ jediný kořen $x = \xi, y = \eta$ of (6.39.7). Jsou-li $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ spojitě diferencovatelné na R , počáteční aproximace (x_0, y_0) a všechny následující aproximace $(x_n, y_n), n = 1, 2, \dots$ patří do R ;*

$$\begin{aligned} |\varphi'_{1x}(x, y)| + |\varphi'_{2x}(x, y)| &\leq q_1 < 1, \\ |\varphi'_{1y}(x, y)| + |\varphi'_{2y}(x, y)| &\leq q_2 < 1 \end{aligned}$$

pak proces postupných aproximací (6.39.8) konverguje ke kořeni (ξ, η) soustavy (6.39.7).

6. Přibližný odhad ???

Pro iterační metodu máme

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Dá se dokázat, že

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} \cdot |x_n - x_{n-1}|.$$

Příklad 77 *Najděte reálné kořeny rovnice*

$$x - \sin x = 0,25$$

na tři platné číslice.

Řešení. Napíšeme rovnici jako

$$x = \sin x + 0,25.$$

Graficky vidíme, že rovnice má v intervalu $[1, 1; 1, 3]$ jeden reálný kořen ξ , přibližně rovný $x_0 = 1,2$. Položme

$$\varphi(x) = \sin x + 0,25.$$

Protože $\varphi'(x) = \cos x$ a $|\varphi'(x)| \leq \approx 0,62 = q$, $x \in (0,9; 1,5)$, pak

$$x_n = \sin x_{n-1} + 0,25, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tyto odhady leží v intervalu $(0,9; 1,5)$ a $x_n \rightarrow \xi$ pro $n \rightarrow \infty$.

Sestrojíme posloupnost aproximací x_n , $n = 1, 2, \dots$, až dvě sousední aproximace x_{n-1} , x_n budou vyhovovat požadavkům na chybu

$$\frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = 0,51 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \approx 0,0025.$$

Máme

$$x_1 = \sin 1,2 + 0,25 = 1,182,$$

$$x_2 = 1,175,$$

$$x_3 = 1,173,$$

$$x_4 = 1,172,$$

$$x_5 = 1,172.$$

Tedy $\xi = 1,17 \pm 0,005$.

7. Řešení rovnic pomocí programu MAPLE V

Příklad 78 Najděte reálný kořen rovnice

$$x - \sin x = 0,25$$

pomocí programu MAPLE V (viz Příklad 77).

Řešení. Napišm odpovídající příkaz v MAPLE:

```
s:=solve({x=sin(x)+0.25},{x});
```

Výsledek vypsáný programem MAPLE má tvar:

$$s:={x=1.171229653}$$

Příklad 79 Najděte kořeny polynomičké rovnice

$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
s:=solve({x^6+4*x^5+4*x^4-x^2-4*x-4},{x});
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE má tvar:

```
s:={x=1},{x=-1},{x=I},{x=-I},{x=-2},{x=-2}
```

Skutečně, rovnice může být zapsána ve tvaru:

$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x + 2)^2 = 0.$$

Vyřešme tento příklad pomocí substituce:

```
poly:=x^6+4*x^5+4*x^4-x^2-4*x-4;
```

MAPLE dává:

$$poly := x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4$$

Potom příkaz

```
solve(poly=0,x);
```

dává výsledek

```
1, -1, I, -I, -2, -2
```

Příklad 80 Najděte kořeny polynommické rovnice

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Obvyklý příkaz

```
s:=solve({x^3-6*x+2},{x});
```

dává jako výsledek nejasná transcendentní čísla. Pak je možno použít příkaz

```
s:=fsolve({x^3-6*x+2},{x});
```

Tak dostáváme

```
s:={x=-2.601679132},{x=.3398768866},{x=2.261802245}
```

Příklad 81 Najděte kořeny polynommické rovnice

$$x^4 + 4x + 1 = 0$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Obvyklý příkaz

```
s:=solve({x^4+4*x+1},{x});
```

odkazuje na kořeny téže rovnice

$$s := \{x = \text{RootOf}(-Z^4 + 4Z + 1)\}$$

Příkaz

```
s:=fsolve({x^4+4*x+1},{x});
```

dává pouze reálné kořeny

```
s:={x=-1.493358557},{x=-.2509921575}
```

Všechna řešení této polynomiální rovnice dostaneme pomocí příkazu

```
s:=fsolve({x^4+4*x+1},{x}, complex);
```

Dostáváme

```
s:={x=-1.493358557},{x=-.2509921575},
{x=.8721753570-1.381031598*I},{x=.8721753570+1.381031598*I}
```

6.40 Vektorová funkce skalárního argumentu

1. Vektorová funkce. Hodograf.

Z vektorové algebry víme, že vektor \vec{A} , jehož průměty na osy jsou po řadě rovny x , y a z , lze zapsat jako

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

kde \vec{i} , \vec{j} a \vec{k} jsou jednotkové vektory souřadných os. Jsou-li průměty x , y a z konstanty, říkáme, že vektor \vec{A} je *konstantní*. Nyní předpokládejme, že průměty vektoru jsou funkce parametru t pohybujícího se v rozmezí daného intervalu:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Pak říkáme, že vektor \vec{A} sám je *variabilní*: každé hodnotě t parametru odpovídá jistá (vektorová) hodnota \vec{A} :

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Definice 96 Jestliže každé hodnotě parametru t z daného intervalu odpovídá jistý vektor $\vec{A}(t)$, nazýváme $\vec{A}(t)$ vektorovou funkcí skalárního argumentu t .

Je pohodlné položit počátek vektoru $\vec{A}(t)$ do počátku souřadné soustavy; pak při změně hodnoty t koncový bod vektoru $\vec{A}(t)$ (se souřadnicemi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) opíše křivku L pro kterou vztahy

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

slouží jako parametrické rovnice.

Vektor $\vec{A}(t)$ není nic jiného než *radius vektor* \vec{r} pohybujícího se bodu M křivky L . Tuto křivku lze specifikovat pomocí jediné *vektorové rovnice*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Definice 97 *Křivka L popsaná koncovým bodem proměnného vektoru $\vec{A}(t)$ začínajícího v počátku se nazývá hodograf vektorové funkce $\vec{r} = A(t)$. Počátek se pak nazývá pólem hodografu.*

2. Limita a spojitost vektorové funkce

Definice 98 *Říkáme, že vektor \vec{B} je limitou vektorové funkce $\vec{A}(t)$ as $t \rightarrow t_0$, zapisujeme*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{A}(t) = B,$$

jestliže pro všechny hodnoty t ležící dostatečně blízko t_0 je modul rozdílu vektorů $|\vec{A}(t) - \vec{B}|$ libovolně malý.

Je-li

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

a

$$\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

pak

$$|\vec{A}(t) - \vec{B}| = \sqrt{[x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 + [z(t) - c]^2}.$$

Je zřejmé, že podmínka, aby $|\vec{A}(t) - \vec{B}|$ šlo k nule pro $t \rightarrow t_0$ má za důsledek $x(t) \rightarrow a$, $y(t) \rightarrow b$, $z(t) \rightarrow c$. Obrácené tvrzení platí samozřejmě také. Takže lze stručně prohlásit, že *průměty limit vektorové funkce $\vec{A}(t)$ jsou rovny limitám jeho průmětů.*

Definice 99 *Říkáme, že vektor $\vec{A}(t)$ je spojitý pro danou hodnotu t parametru, jestliže je definován v okolí bodu t a jestliže*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \vec{A}(t)| = 0.$$

Nechť je rozklad vektoru $\vec{A}(t)$ na složky podle souřadných os

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Pak

$$\vec{A}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\vec{i} + y(t + \Delta t)\vec{j} + z(t + \Delta t)\vec{k}$$

a, podle pravidel vektorové algebry,

$$\Delta \vec{A}(t) = \vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k},$$

kde $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ atd. Protože

$$|\Delta \vec{A}(t)| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

podmínka $|\Delta \vec{A}(t)| \rightarrow 0$ implikuje, že $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$. Obrácené tvrzení je také zřejmé: Jestliže $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ jde k nule, $|\Delta \vec{A}(t)|$ jde také k nule. To znamená, že spojitost vektorové funkce $\vec{A}(t)$ je ekvivalentní spojitosti jejích průmětů $x(t), y(t), z(t)$.

3. Derivace vektorové funkce

Zkonstruuje poměr

$$\frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

Definice 100 Derivace vektorové funkce $\vec{A}(t)$ je limita (pokud existuje)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t} = \vec{A}'(t) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}.$$

Podle definice limity je derivace vektorové funkce také *vektor*.

Je-li modul vektorové funkce $\vec{A}(t)$ konstanta (zatímco směr se může měnit), její derivace $\vec{A}'(t)$ je *vektor kolmý k původnímu vektoru $\vec{A}(t)$* . Opravdu, v tomto případě leží hodograf na sféře, a tedy jeho derivace $\vec{A}'(t)$, tečna k hodografu, je kolmá k vektoru průvodiči $\vec{A}(t)$. Tedy *derivace vektoru s konstantním modulem je k danému vektoru kolmá*.

Nyní prakticky určíme derivaci $\vec{A}'(t)$ dané vektorové funkce $\vec{A}(t)$. Nechť je vektorová funkce $\vec{A}(t)$ určena svým rozkladem

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Pak máme

$$\frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.$$

Při limitním přechodu pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostáváme

$$\vec{A}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Z toho vyplývá, že

$$|\vec{A}'(t)| = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}.$$

4. Základní pravidla pro derivování vektorové funkce

Využijeme-li vyjádření derivace $\vec{A}'(t)$, lze lehce ukázat, že všechna základní pravidla o derivování pro skalární funkce lze téměř beze změny přenést na vektorové funkce:

1.

$$[\vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}'_1(t) + \vec{A}'_2(t);$$

2.

$$[f(t)\vec{A}(t)]' = f'(t)\vec{A}(t) + f(t)\vec{A}'(t)$$

kde $f(t)$ je skalární funkce.

Pravidla pro derivování skalárního a vektorového součinu $\vec{A}_1(t) \cdot \vec{A}_2(t)$ a $\vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2(t)$ dvou vektorových funkcí jsou také zcela analogické odpovídajícím pravidlům pro součin skalárních funkcí:

1.

$$[\vec{A}_1(t) \cdot \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}'_1(t) \cdot \vec{A}_2(t) + \vec{A}_1(t) \cdot \vec{A}'_2(t);$$

2.

$$[\vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}'_1(t) \times \vec{A}_2(t) + \vec{A}_1(t) \times \vec{A}'_2(t).$$

5. Aplikace v mechanice

Nechť t je čas pohybu a nechť hodograf vektorové funkce $\vec{r} = \vec{A}(t)$ je trajektorie bodu M . Vzdálenost bodu M od pevného počátečního bodu budeme označovat s a počítáme ji podle trajektorie a bereme se znamínkem $+$ nebo $-$ v závislosti na tom, zda se bod M od počátečního bodu pohybuje v kladném nebo záporném směru. Poloha bodu M je plně určena veličinou s , což je *křivková souřadnice* bodu M . Rovnice $s = s(t)$ vyjadřuje *zákon pohybu podél trajektorie*.

Podle definice je *rychlost* v daném bodě M v daném časovém okamžiku t dána derivací vektorové funkce $\vec{r} = \vec{A}(t)$ podle času:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A}'(t).$$

Následně *vektor rychlosti* pohyblivého bodu je *tečný vektor* k trajektorii v odpovídajícím bodě ve směru pohybu.

Modul rychlosti je vyjádřen vztahem

$$|v| = |\vec{A}'(t)| = \frac{ds}{dt},$$

tedy, je roven *derivaci křivkové souřadnice s vzhledem k t* .

Je-li pohyb přímočarý, skalární veličina

$$\frac{ds}{dt}$$

plně určuje rychlost. Tuto veličinu nazýváme rychlostí přímočarého pohybu v daném bodě. Vektor

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

se nazývá *zrychlení* pohybu.

6.41 Komplexní funkce reálné proměnné

1. Definice komplexní funkce

Předpokládejme, že je dána vektorová funkce skalárního argumentu, jejíž průmět na osu z je identicky roven nule pro všechny hodnoty parametru t . Pak

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{6.41.1}$$

a křivka $\vec{r} = \vec{A}(t)$ leží celá v rovině Oxy . V tomto případě je vhodné uvažovat vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

jako geometrický obraz komplexního čísla $z = x + iy$ a mluvit, ve shodě s tímto, místo o vektorové funkci $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ reálné proměnné t .

Definice 101 *Je-li každé hodnotě reálného parametru t přiřazeno komplexní číslo*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (6.41.2)$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce nabývající reálných hodnot, $z(t)$ se nazývá komplexní funkce reálného argumentu t .

Parametr t se pohybuje uvnitř intervalu. *Hodograf* komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je podle definice křivka s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$; tedy hodograf vektorové funkce (6.41.1) a komplexní funkce (6.41.2) jsou totožné. Definice limity a spojitosti komplexní funkce jsou zcela analogické odpovídajícím definicím pro vektorové funkce. Všimněte si, že spojitost komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je ekvivalentní spojitosti její reálné a imaginární části $x = x(t)$ and $y = y(t)$. Hodograf spojitě funkce $z(t)$ vykreslený pro parametr t v intervalu (t_1, t_2) je spojitá čára spojující body $z(t_1)$ a $z(t_2)$ v komplexní rovině.

Příklad 82 *Pro funkci*

$$z(t) = t + it^2, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

máme $x = t$ a $y = t^2$. Hodografem je parabola $y = x^2$. Pro t nabývající hodnot od $-\infty$ do $+\infty$ opíše pohyblivý bod paraboly křivku tak, že horní (nekonečná) oblast omezená parabolou zůstává vždy vlevo.

2. Derivace komplexní funkce reálné proměnné

Derivace komplexní funkce $z(t)$ je definována běžným způsobem, tj. jako podíl přírůstku funkce $\Delta z = z(t + \Delta) - z(t)$ a přírůstku nezávisle proměnné Δt :

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Tedy derivace $z'(t)$ je komplexní funkcí téhož argumentu. Geometricky lze derivaci interpretovat tak, že vektor odpovídající komplexnímu číslu $z'(t_0)$ je rovnoběžný s tečnou k hodografu funkce $z(t)$ v bodě hodografu, který odpovídá hodnotě parametru $t = t_0$. Pro danou komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ dostáváme vztah pro derivování

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Tento vztah naznačuje, že komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ může být derivována jednoduše jako lineární kombinace, v níž i je považováno za běžnou konstantu.

Kapitola 7

Diferenciální počet funkcí více proměnných

7.1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

1. Funkce v \mathbb{R}^n

Definice 102 *Proměnná y se nazývá funkce proměnných*

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

definovaná na množině $D \subset \mathbb{R}^n$, jestliže je každému bodu množiny přiřazena určitá hodnota proměnné y .

Označujeme:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nebo stručně:

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá definičním oborem funkce f . Jestliže $D \subset \mathbb{R}^2$, užíváme zkrácený zápis $z = f(x, y)$. Skutečnost $D \subset \mathbb{R}^3$ často zapisujeme $u = f(x, y, z)$. Jako příklad mohou sloužit funkce $y = x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n$ and $y = \exp \frac{x_1}{x_2} + x_3 x_4$.

Je-li $z = f(x, y)$ funkce dvou nezávisle proměnných x a y , jejím grafem je množina bodů, jejichž x -ovými a y -ovými souřadnicemi jsou hodnoty x a y a třetí souřadnice je odpovídající hodnota z , tj. množina bodů $(x, y, f(x, y))$. Grafem funkce definované na oblasti roviny je obvykle plocha.

Příklad 83 *Plocha daná vztahem*

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

je horní polokoule. Plocha daná vztahem

$$z = x^2 + y^2$$

je rotační paraboloid.

2. Limita funkce

Definice 103 Říkáme, že funkce $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ limitu rovnou číslu A , jestliže funkce je definována v okolí x^0 s výjimkou nejvýše bodu x^0 samotného a jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pro všechna $x \neq x^0$ splňující nerovnost

$$|x_i - x_i^0| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Z této definice vyplývá, že pokud limita A existuje, pak je jediná. Taková limita se nazývá **vlastní**. Jestliže $A = \infty$ (pokuste se modifikovat výše uvedenou definici pro tento případ), pak se limita nazývá **nevlastní**. Pro označení tohoto faktu užíváme následující zápis

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$$

nebo

$$\lim_{\substack{x_i \rightarrow x_i^0 \\ i = 1, 2, \dots, n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A.$$

Příklad 84 Najděte $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ kde

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Sestavíme tuto pomocnou nerovnost:

$$(x^3 + y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6 < 2(x^6 + y^6) < 2(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6) = 4(x^2 + y^2)^3.$$

Tedy

$$|x^3 + y^3| < 2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

a

$$|f(x, y)| < 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nyní je zřejmé, že

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

Příklad 85 *Existuje*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y)$$

pro

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} ?$$

a) Necht' $y = x$. Pak

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = 0$$

Tedyt jestliže A existuje, pak $A = 0$.

b) Necht' $y = 2x$. Pak

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}.$$

Vidíme, že funkce $\varphi(x, y)$ nemá limitu v bodě $(0, 0)$.

Uvedeme některá užitečná pravidla pro výpočet limity (předpokládáme existenci vlastních limit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \Phi$):

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = F \pm \Phi$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = F \cdot \Phi$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{F}{\Phi}$

jestliže $\varphi(x) \neq 0$ a $\Phi \neq 0$.

3. Spojitost funkce

Definice 104 Říkáme, že funkce $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je spojitá v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, jestliže je definována v okolí bodu x^0 včetně bodu x^0 samotného a jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0).$$

Příklad 86 *Je funkce*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{jestliže } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{jestliže } x = y = 0 \end{cases}$$

spojitá v bodě $(0, 0)$? Ano, protože podle Příkladu 84

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(x, y).$$

Podmínka spojitosti funkce f v bodě x^0 může být přepsána ve tvaru:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x^0 + h) = f(x^0),$$

kde $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Přírůstek (nebo absolutní přírůstek) funkce f v bodě x^0 odpovídající přírůstku h vektorového argumentu je definován následovně:

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + h) - f(x^0).$$

Můžeme tedy přepsat definici spojitosti f v bodě x^0 pomocí přírůstků:

Funkce je spojitá v x^0 , jestliže

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x^0) = 0$$

kde

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Obvyklá pravidla pro počítání se spojitými funkcemi nadále platí, např. součet, rozdíl, součin a podíl dvou funkcí $f(x)$ a $\varphi(x)$ je spojitý v bodě x^0 , pokud jsou zde spojitě funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ (pro podíl navíc požadujeme, aby $\varphi(x^0) \neq 0$).

4. Parciální derivace

Definice 105 Parciální derivace $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vzhledem k nezávisle proměnné x_j v bodě (x_1, x_2, \dots, x_n) je definována jako limita

$$\begin{aligned} f'_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, za předpokladu, že existuje.

Používáme následující označení: f'_{x_j} , $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Poznámka 14 Parciální derivace f'_{x_j} není nic jiného než obyčejná derivace funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, na niž pohlížíme jako na funkci proměnné pouze x_j pro pevné $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$.

Příklad 87 Jako příklad uveďme funkce $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^5 x_3^7$ a $f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 x_2^5 x_3^6$.

5. Geometrický význam parciální derivace

Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ geometricky představuje místo bodů $(x, y, f(x, y))$, kde $(x, y) \in D_f$, tedy plochou v trojdimenzionálním prostoru, v němž jsou zavedeny pravoúhlé kartézské souřadnice (x, y, z) . Derivace $f'_x(x_0, y_0)$ (za předpokladu, že existuje) je rovna tangentu úhlu (sklonu) svíraného tečnou k této části plochy a osou x vedenou v rovině $y = y_0$ bodem x_0 .

Analogicky interpretujeme význam parciální derivace $f'_y(x, y)$.

6. Gradient

Vektor

$$\text{grad } \omega(x) = (\omega'_{x_1}(x), \omega'_{x_2}(x), \dots, \omega'_{x_n}(x))$$

se nazývá gradient funkce ω v bodě x . Používáme následující označení: $\text{grad } \omega(x)$, $\nabla \omega(x)$ (nabla).

Věta 7.1.1 *Gradient funkce*

$$F(x, y, z) \equiv z - f(x, y)$$

je kolmý k tečné rovině vedené bodem (x, y, z) plochy $z = f(x, y)$.

K důkazu: Rovnice tečné roviny v bodě (x_0, y_0) plochy $(x, y, (f(x, y)))$, $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ je:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

a tečný vektor T_x, T_y má souřadnice:

$$T_x = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)), \quad T_y = (0, 1, f'_y(x_0, y_0)).$$

Vypočtete $\nabla F = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$. Pak oba skalární součiny jsou rovny nule:

$$(T_x, \nabla F) = 0, \quad (T_y, \nabla F) = 0$$

a následně

$$\nabla F \perp TP \text{ (tečná rovina).}$$

Věta 7.1.2 *Derivace funkce $f(x)$ ve směru jednotkového vektoru ω je rovna průmětu gradientu f v tomto bodě do daného směru:*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = (\text{grad } f, \omega) = \text{grad}_\omega f.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\begin{aligned} (\text{grad } f, \omega) &= |\text{grad } f| |\omega| \cdot \cos(\text{grad } f, \omega) = \\ &= |\text{grad } f| \cdot \cos(\text{grad } f, \omega) = \text{grad}_\omega f. \end{aligned}$$

Věta 7.1.3 *Směrová derivace funkce f je maximální, jestliže gradient f je rovnoběžný s ω .*

Důkaz. Protože maximální hodnoty je dosaženo, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = |\text{grad } f| \cdot \cos(\text{grad } f, \omega) = |\text{grad } f|,$$

tj. jestliže $\cos(\text{grad } f, \omega) = 1$, pak zjevně $\text{grad } f \parallel \omega$.

Kapitola 8

Diferenciální počet funkcí více proměnných 2.

7. Parciální derivace vyšších řádů

Derivace f'_{x_j} , $j = 1, 2, \dots, n$ se nazývají také parciální derivace prvního řádu (první parciální derivace) funkce f . Výrazy

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

(nebo $f''_{x_i x_j}$) se nazývají parciální derivace druhého řádu (druhé parciální derivace). Pro $i = j$ je označujeme jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(nebo $f''_{x_i^2}$). Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů, např.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial}{\partial x_k}}_{m \text{ -krát}} = \frac{\partial^m}{\partial x_k^m}$$

nebo

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^5}{\partial z \partial y^2 \partial z \partial x}.$$

8. Nezávislost smíšených derivací na pořadí derivování

Derivace $f''_{x_i x_j}$, $f'''_{x_i^2 x_j}$, $i \neq j$ apod. se nazývají smíšené parciální derivace.

Věta 8.0.4 *Nechť je funkce $z = f(x, y)$ definována na otevřené množině G roviny xy . Jestliže má parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} v bodě $(x, y) \in G$, jsou si v tomto bodě tyto derivace rovny.*

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Věta 8.0.5 Jestliže všechny parciální derivace funkce

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(příslušné danému vektoru $K = (k_1, \dots, k_n)$ s celočíselnými souřadnicemi, které vyjadřují maximální parciální derivace vzhledem k proměnným x_1, x_2, \dots, x_n) jsou spojitě na \mathbb{R}^n v bodě x , pak lze libovolně změnit pořadí derivování v libovolné z těchto derivací bez vlivu na konečný výsledek.

Příklad 88

$$\frac{\partial^5 f}{\partial z \partial y^2 \partial z \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}.$$

Příklad 89

$$z = x^3 y^2, z'_x = 3x^2 y^2, z'_y = 2x^3 y, z''_{xy} = 6x^2 y = z''_{yx}.$$

9. Diferencovatelná funkce. Totální diferenciál.

Definice 106 Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je diferencovatelná v daném bodě (x_1, x_2, \dots, x_n) , jestliže její celkový přírůstek (nebo stručně přírůstek) lze zapsat ve tvaru

$$\Delta f(x) = f'_{x_1}(x)h_1 + f'_{x_2}(x)h_2 + \dots + f'_{x_n}(x)h_n + \varepsilon(h)\|h\|,$$

kde $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ je funkce taková, že $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Definice 107 Hlavní část celkového přírůstku se nazývá **totální diferenciál** (nebo stručně diferenciál) funkce, tj.

$$df(x) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x)h_i.$$

Zřejmě $dx_i = h_i$, ($dx = \Delta x = (x+h) - x = h$; $dx_i = \Delta x_i = (x_i+h_i) - x_i = h_i$, $i = 1, \dots, n$). Říkáme, že funkce diferencovatelná v každém bodě určité oblasti je diferencovatelná na této oblasti.

Poznámka 15 Totální diferenciál můžeme v tom případě zapsat takto:

$$df(x) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x)dx_i.$$

Příklad 90 Necht $z = 3axy - x^3 - y^3$, $a \in \mathbb{R}$. Pak

$$dz = (3ay - 3x^2)dx + (3ax - 3y^2)dy.$$

Jestliže například $z = z_0 = (1, 2)$, pak

$$dz(1, 2) = (6a - 3)dx + (3a - 12)dy.$$

Příklad 91 Pro funkci $z = x^y$, $x > 0$ dostáváme

$$dz = (yx^{y-1})dx + (x^y \ln x)dy.$$

Můžeme formulovat následující pravidla pro diferenciály:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = du \cdot v + v \cdot du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(vdu - u dv), \text{ if } v \neq 0.$$

Příklad 92 (Tento příklad ukazuje, že existence parciální derivace není dostatečným předpokladem diferencovatelnosti funkce.) Je funkce

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

diferencovatelná v bodě $(0, 0)$? Vypočteme parciální derivace

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \cdot (|xy|)'_x = \frac{|y|\operatorname{sign}x}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|y|\operatorname{sign}x}}{2\sqrt{|x|}} \text{ pro } xy \neq 0$$

a

$$f'_y(x, y) = \frac{\sqrt{|x|\operatorname{sign}y}}{2\sqrt{|y|}} \text{ pro } xy \neq 0.$$

Tyto vztahy nejsou vhodné pro výpočet hodnot $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$. Pro výpočet těchto hodnot musíme postupovat podle definice:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(h, 0) - f(0, 0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 0 = 0$$

a podobným způsobem

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Nyní vypočteme

$$\Delta f(x, y)|_{(0,0)} = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \varepsilon(h_1, h_2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

a

$$\Delta f(0, 0) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \sqrt{|h_1 h_2|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Je vidět, že můžeme položit

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Bohužel limita

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0} \varepsilon(h_1, h_2)$$

neexistuje, neboť např. pro $h_1 = h_2$:

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \varepsilon(h_1, h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a pro $h_1 = 2h_2$:

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \varepsilon(h_1, h_1/2) = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Tedy funkce $f(x, y)$ není diferencovatelná.

10. Diferenciály vyšších řádů

Definice 108 Druhý diferenciál funkce $f(x)$ (kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) odpovídající nezávislým přírůstkům (diferenciálům) dx_1, dx_2, \dots, dx_n je definován rovnostmi

$$d^2 f = d(df).$$

Obecně je diferenciál l -tého řádu (l -tý diferenciál) funkce f pro nezávislé diferenciály dx_1, dx_2, \dots, dx_n definován indukcí pomocí rekurentní formule

$$d^l f = d(d^{l-1} f), \quad l = 2, 3, \dots$$

Pro nezávisle proměnné x_1, x_2, \dots, x_n máme $dx_j = \Delta x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Diferenciály dx_j budeme také nazývat nezávislé diferenciály, abychom zdůraznili, že jsou nezávislé na $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. „Nezávislost“ veličin dx_j se formálně ukazuje v průběhu derivování: derivujeme-li vzhledem k x_1, x_2, \dots, x_n , považujeme ostatní nezávisle proměnné za konstanty, tj. $d(dx_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Příklad 93 Vypočtěme druhý diferenciál

$$d^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} d^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= d(df(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right) dx_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d(dx_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i. \end{aligned}$$

Proto např.

$$d^2 f(x, y) = f''_{xx} (dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} (dy)^2.$$

Zavedme operátor

$$D_n = \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} dx_n,$$

se kterým zacházíme podle vztahu

$$D_n f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i .$$

Pak lze lehce ověřit, že

$$d^k f = (D_n)^k f.$$

Např. pro případ $n = 2, k = 2$ máme

$$\begin{aligned} (D_2)^2 &= \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 \right)^2 = \\ &= \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_1^2} (dx_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_2^2} (dx_2)^2. \end{aligned}$$

Nakonec dostáváme

$$d^2 f(x, y) = D_2^2 f(x, y) = f''_{xx} (dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} (dy)^2.$$

V obecném případě dostáváme pro $n = 2$ (podle binomické věty)

$$\begin{aligned} (D_2)^k &= \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} dx_2 \right)^k = \\ &= \frac{\partial^k \cdot}{\partial x_1^k} (dx_1)^k + \binom{k}{1} \frac{\partial^k \cdot}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} (dx_1)^{k-1} dx_2 + \\ &+ \binom{k}{2} \frac{\partial^k \cdot}{\partial x_1^{k-2} \partial x_2^2} (dx_1)^{k-2} dx_2^2 + \cdots + \binom{k}{p} \frac{\partial^k \cdot}{\partial x_1^{k-p} \partial x_2^p} (dx_1)^{k-p} dx_2^p + \cdots + \\ &+ \binom{k}{k-1} \frac{\partial^k \cdot}{\partial x_1 \partial x_2^{k-1}} dx_1 (dx_2)^{k-1} + \frac{\partial^k \cdot}{\partial x_2^k} (dx_2)^k . \end{aligned}$$

11. Rovnice tečné roviny k ploše

Nechť je dána funkce $z = f(x, y) \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, kde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená oblast. Předpokládejme, že $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Množina bodů $(x, y, f(x, y))$ generuje plochu S . Uvažujme řezy plochy S rovinami $y = y_0$ a $x = x_0$. Vedme tečny $M_0 T_x$ a $M_0 T_y$ bodem $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ k rovinným křivkám vzniklým v řezech. Rovina T procházející těmito přímkami, které se protínají v bodě M_0 , se nazývá tečná rovina k ploše S v bodě M_0 , bod M_0 se nazývá bodem dotyku roviny T a plochy S .

Přímka $M_0 T_x$ je určena rovnicemi

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), \quad y = y_0,$$

a přímkou M_0T_y :

$$z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad x = x_0.$$

Rovnici roviny T procházející body $M_0(x_0, y_0, z_0)$ lze vyjádřit jako

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Protože $M_0T_x \subset T$, $M_0T_y \subset T$, dostáváme $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$ a rovnice T bude mít tvar

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

12. Geometrická interpretace totálního diferenciálu funkce dvou proměnných

Lehce nahlédneme, že z rovnice tečné roviny vyplývá

$$\Delta z_T = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

kde $\Delta z = z - z_0$, $\Delta x = x - x_0$ a $\Delta y = y - y_0$. Protože x a y jsou nezávisle proměnné, poslední rovnici lze napsat ve tvaru

$$\Delta z_T = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

a nebo v následujícím tvaru (který udává také stručný tvar rovnice tečné roviny)

$$\boxed{\Delta z_T = dz}$$

kde

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Věta 8.0.6 *Totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$ je roven přírůstku z na tečné rovině vedené ke grafu funkce odpovídajícím bodem.*

Má-li x přírůstek Δx a y přírůstek Δy , pak funkce z má odpovídající přírůstek Δz re-
prezentovaný úsečkou R_1M_1 rovnou přírůstku na souřadnici z příslušného bodu plochy S
(tj. $R_1M_1 = \Delta z$), zatímco diferenciál dz je reprezentován úsečkou R_1T_1 , což je přírůstek
souřadnice z příslušného bodu tečné roviny T (tj. $R_1T_1 = dz$).

13. Aplikace totálního diferenciálu na přibližné výpočty

Připomeňme definici diferencovatelné funkce

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x)h_i + \varepsilon(h) \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}$$

nebo, stručněji

$$\Delta f(x) = df(x) + \varepsilon(\Delta x) \|\Delta x\|,$$

kde $\Delta x = h$, (i.e. $\Delta x_1 = h_1, \Delta x_2 = h_2, \dots, \Delta x_n = h_n$), $\Delta x_i = (x_i + h_i) - x_i$ a $\|\Delta x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$. Odtud vyplývá:

$$\boxed{\Delta f(x) \approx df(x) \text{ if } \Delta x \rightarrow 0 \text{ a } df(x) \neq 0 \text{ for } \Delta x \neq 0.}$$

Tento přibližný vzorec může být dokázán vzhledem k tomu, že

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Lze určit chybu tohoto vzorce.

Příklad 94 *Napišme přibližný vzorec pro výpočet hodnot funkce*

$$z = \ln(xy + 2y^2 - 2x)$$

v okolí bodu (1, 1).

Máme $x_0 = 1, y_0 = 1$,

$$z'_x(x, y) = \frac{y - 2}{xy + 2y^2 - 2x}, \quad z'_x(1, 1) = -1,$$

$$z'_y(x, y) = \frac{x + 4y}{xy + 2y^2 - 2x}, \quad z'_y(1, 1) = 5,$$

a $z(1, 1) = 0$. Tedy v okolí bodu (1, 1)

$$\ln(xy + 2y^2 - 2x) \approx -(x - 1) + 5(y - 1).$$

Pro $x = y = 1, 1$

$$\ln(1, 1^2 + 2 \cdot 1, 1^2 - 2, 2) \approx -0, 1 + 5 \cdot 0, 1 = 0, 4$$

a přesnější hodnota je

$$\ln(1, 1^2 + 2 \cdot 1, 1^2 - 2, 2) = \ln 1, 43 \approx 0, 357.$$

14. Derivace složené funkce

Věta 8.0.7 *Nechť je funkce $u = f(x, y, z)$ diferencovatelná v bodě $(x, y, z) \in G$ a nechť funkce*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (8.0.1)$$

závislé na skalárním argumentu t mají derivace vzhledem k t . Pak derivaci složené funkce vzhledem k t

$$u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$$

(tedy derivace f podél křivky určené vlastnostmi (8.0.1)) lze vyjádřit vzorcem

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t).$$

Analogicky pokud např. $z = f(u, v)$, kde $u = \varphi(x, y)$ a $v = \psi(x, y)$, pak parciální derivace funkce

$$z = F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

jsou vyjádřeny vztahy

$$z'_x = F'_x = f'_u(\varphi(x, y), \psi(x, y))\varphi'_x(x, y) + f'_v(\varphi(x, y), \psi(x, y))\psi'_x(x, y),$$

$$z'_y = F'_y = f'_u(\varphi(x, y), \psi(x, y))\varphi'_y(x, y) + f'_v(\varphi(x, y), \psi(x, y))\psi'_y(x, y).$$

Výše uvedená pravidla lze aplikovat na funkce libovolného počtu nezávisle proměnných a libovolného počtu přechodných argumentů. Všimněme si rozdílů mezi derivacemi

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Zatímco první je totální derivace, tj. obyčejná derivace z jako funkce x , druhé je (explicitní) parciální derivace z vzhledem k argumentu x vystupujícímu v původním vyjádření funkce, tj. vypočtená za předpokladu, že všechny ostatní argumenty, ač závislé na x ve složené funkci, jsou v tomto procesu derivování považovány za konstanty.

Příklad 95 *Uvažujme funkci*

$$z = e^u \sin v,$$

kde pokládáme $u = xy$ a $v = x + y$. Pak

$$z'_x = e^{xy}y \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y) = e^{xy}[y \sin(x+y) + \cos(x+y)],$$

$$z'_y = e^{xy}x \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y) = e^{xy}[x \sin(x+y) + \cos(x+y)].$$

Příklad 96 *Nechť*

$$z = x^3 e^{u^2},$$

kde u je funkce proměnné x , tj. $u = \varphi(x)$. Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 3x^2 e^{u^2}$$

a

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{u^2} + x^3 e^{u^2} 2u\varphi'(x)$$

nebo

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{\varphi^2(x)} + 2x^3 e^{\varphi^2(x)} \varphi(x) \varphi'(x).$$

Derivace vyšších řádů vypočteme analogicky.

15. Směrová derivace

Definice 109 *Nechť* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ *jsou libovolné pevné jednotkové vektory. (Směrová) derivace funkce* f *v bodě* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ve směru vektoru* ω *(podél* ω) *je limita*

$$f'_\omega(x) = \frac{\partial f}{\partial \omega}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\omega) - f(x)}{t}$$

(za předpokladu, že existuje).

Věta 8.0.8 *Je-li funkce* f *diferencovatelná v bodě*

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

pak existuje její derivace ve směru libovolného jednotkového vektoru

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

a lze ji vyjádřit vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \cdot \omega_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \cdot \omega_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \cdot \omega_n.$$

Poznámka 16 *Parciální derivace* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, *jsou směrové derivace podle vektorů* $(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$.

Geometrický význam. Je-li $z = f(x, y)$, pak $f'_\omega(P)$ je rovno tangente úhlu sevřeného tečnou k řezu plochy $z = f(x, y)$ rovinou kolmou k rovině xy a procházející vektorem $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Příklad 97 *Najděte derivaci funkce* $u = xy^2z^3$ *v bodě* $M(3, 2, 1)$ *ve směru vektoru* $\omega_1 = (2, 2, 1)$.

Řešení. Vektor ω_1 není jednotkový. Proto vypočteme

$$\omega = \frac{\omega_1}{|\omega_1|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

a

$$u'_\omega(M) = y^2 z^3|_M \cdot \frac{2}{3} + 2xy z^3|_M \cdot \frac{2}{3} + 3xy^2 z^2|_M \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

16. Taylorův vzorec

Uvažujme dva body $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Taylorův vzorec pro funkci $f(x)$ n proměnných v bodě P^0 se zbytkem R_n v Lagrangeově tvaru lze vyjádřit jako:

$$f(P) = f(P^0) + \frac{1}{1!}df(P^0) + \frac{1}{2!}d^2f(P^0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}d^{(n-1)}f(P^0) + R_n,$$

kde

$$R_n = \frac{1}{n!}d^n f(P^0 + \theta \cdot (P - P^0)), \theta \in (0, 1), \theta = \text{const.}$$

Bod $P^0 + \theta \cdot (P - P^0)$ lze vyjádřit v souřadnicovém tvaru jako

$$P^0 + \theta \cdot (P - P^0) = (x_1^0 + \theta \cdot (x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta \cdot (x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + \theta \cdot (x_n - x_n^0)).$$

Příklad 98 Rozviňme podle Taylorova vzorce funkci $z = x^y$ v okolí bodu $(1, 1)$ pro $n = 3$.
ŘEŠENÍ. Nejprve vypočteme parciální derivace:

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x,$$

$$z''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad z''_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad z''_{y^2} = x^y (\ln x)^2,$$

$$z'''_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \quad z'''_{y^3} = x^y (\ln x)^3,$$

$$z'''_{x^2y} = (y-1)x^{y-2}(1 + y \ln x) + x^{y-1} \cdot \frac{y}{x} = x^{y-2} ((y-1)(1 + y \ln x) + y),$$

$$z'''_{xy^2} = yx^{y-1}(\ln x)^2 + 2x^y \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} (y(\ln x)^2 + 2 \ln x).$$

Položme $P^0 = (1, 1)$. Pak

$$f(P^0) = 1, \quad f'_x(P^0) = 1, \quad f'_y(P^0) = 0.$$

Totální diferenciál má pak tvar

$$df(P^0) = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x = x - x^0 = x - 1.$$

Dále

$$f''_{x^2}(P^0) = 0, \quad f''_{xy}(P^0) = 1, \quad f''_{y^2}(P^0) = 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} d^2 f(P^0) &= f''_{x^2}(P^0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(P^0)\Delta x \Delta y + f''_{y^2}(P^0)(\Delta y)^2 = \\ &= 2\Delta x \Delta y = 2(x-1)(y-1). \end{aligned}$$

Zbytek lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{6} [\tilde{y}(\tilde{y}-1)(\tilde{y}-2)\tilde{x}^{\tilde{y}-3} \cdot (\Delta x)^3 + \\ &\quad + 3\tilde{x}^{\tilde{y}-2} ((\tilde{y}-1)(1 + \tilde{y} \ln \tilde{x}) + \tilde{y}) \cdot (\Delta x)^2 \Delta y + \\ &\quad + 3\tilde{x}^{\tilde{y}-1} (\tilde{y}(\ln \tilde{x})^2 + 2 \ln \tilde{x}) \cdot \Delta x (\Delta y)^2 + \\ &\quad + \tilde{x}^{\tilde{y}} (\ln \tilde{x})^3 \cdot (\Delta y)^3], \end{aligned}$$

kde $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y - 1$ a

$$\tilde{x} = 1 + \theta(x - 1), \tilde{y} = 1 + \theta(y - 1).$$

Tedy Taylorův rozvoj funkce je dán takto:

$$x^y = 1 + (x - 1) + \frac{1}{2} 2(x - 1)(y - 1) + R_3 = x + (x - 1)(y - 1) + R_3.$$

Dosaďme konkrétní numerické hodnoty. Jestliže například $x = 1,04$ a $y = 1,03$, tj. $\Delta x = 0,04$ a $\Delta y = 0,03$, pak

$$1,04^{1,03} = 1,04 + 0,0012 + R_3 = 1,0412 + R_3.$$

Protože $0 < \tilde{x} < 1,04$ a $0 < \tilde{y} < 1,03$, dostáváme pro zbytek R_3 odhad

$$\begin{aligned} |R_3| < \frac{1}{6} [1,03 \cdot 0,03 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,04^3 + \\ &+ 3 \cdot 1 \cdot (0,3 \cdot (1 + 1,03) + 1,03) \cdot 0,04^2 \cdot 0,03 + \\ &+ 3 \cdot 1 \cdot (1,03 + 2) \cdot 0,04 \cdot 0,03^2 + \\ &+ 4 \cdot 2 \cdot 0,03^3] < \underline{\underline{0,00017}}. \end{aligned}$$

Přesněji: $1,04^{1,03} \approx 1,041224406$.

17. Implicitní funkce

Připomeňme, že implicitní funkce jedné proměnné je určena rovnicí

$$F(x, y) = 0. \tag{8.0.2}$$

Existují případy, kdy tato rovnice neurčuje funkci: například rovnice

$$x^2 + y^2 + 5 = 0$$

nemá žádné reálné kořeny a tedy y nemůže být považováno za funkci x . Podáme podmínky zaručující, že jedna z neznámých obsažených v rovnici (8.0.2) je určena jako funkce druhé.

Věta 8.0.9 *Nechť $F(x, y)$ je funkce spojitá i se svými parciálními derivacemi v okolí bodu $M_0(x_0, y_0)$. Jestliže*

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{a} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

pak pro hodnoty x ležící dostatečně blízko x_0 má rovnice (8.0.2) jednoznačné řešení $y = \varphi(x)$ závislé spojitě na x takové, že $\varphi(x_0) = y_0$. Kromě toho má funkce $\varphi(x)$ také spojitou derivaci danou vztahem

$$y'(x) \equiv \varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Příklad 99 *Nechť*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2.$$

Rovnice $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ určuje kružnici. V libovolném bodě $M_0(x_0, y_0)$ této kružnice takovém, že $y_0 \neq 0$, jsou všechny podmínky věty splněny:

$$x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0.$$

Příklad 100 *Nechť je implicitní funkce určena rovnicí*

$$F(x, y) = x^3 y + \ln y - x = 0.$$

V bodě $M_0(1, 1)$ máme $F(1, 1) = 0$. Parciální derivace

$$F'_x(x, y) = 3x^2 y - 1, \quad F'_y(x, y) = x^3 + \frac{1}{y}$$

jsou spojité v okolí tohoto bodu a

$$F'_y(1, 1) = 2 \neq 0.$$

Tedy je jednoznačně určena funkce $y = \varphi(x)$ vyhovující dané rovnici taková, že $\varphi(1) = 1$. Ačkoli jsme ukázali existenci funkce $\varphi(x)$, nelze ji vyjádřit jako elementární funkci x , protože rovnice není algebraicky řešitelná pro y . Lze nalézt některé přibližné hodnoty funkce $\varphi(x)$, dosadíme-li za x a aplikujeme-li nějakou numerickou metodu. Pro derivace dostáváme

$$\varphi'(x) = -\frac{3x^2 \varphi(x) - 1}{x^3 + \frac{1}{\varphi(x)}}$$

a

$$\varphi'(1) = -\frac{3 - 1}{2} = -1.$$

18. Výpočet derivace vyšších řádů pro implicitní funkce

Jestliže rovnice $F(x, y) = 0$ generuje implicitní funkci $y = \varphi(x)$, pak

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \text{nebo} \quad F(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

na odpovídajícím definičním intervalu funkce $y = \varphi(x)$. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

a dostáváme předchozí vzorec

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Derivováním tohoto vzorce dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi''(x) = \frac{-1}{(F'_y(x, \varphi(x)))^2} & [(F''_{xx}(x, \varphi(x)) + F''_{xy}(x, \varphi(x))\varphi'(x)) F'_y(x, \varphi(x)) + \\ & + F'_x(x, \varphi(x)) ((F''_{yx}(x, \varphi(x)) + F''_{yy}(x, \varphi(x))\varphi'(x))] \end{aligned}$$

nebo

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{(F'_y(x, \varphi(x)))^3} [F''_{xx}(x, \varphi(x))(F'_y(x, \varphi(x)))^2 - 2F''_{xy}(x, \varphi(x))F'_x(x, \varphi(x))F'_y(x, \varphi(x)) + F''_{yy}(x, \varphi(x))(F'_x(x, \varphi(x)))^2].$$

19. Další případy pro výpočet derivací

a) Jestliže rovnice

$$F(x, y, z) = 0$$

definuje $z = \varphi(x, y)$, pak

$$\varphi'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \varphi'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}.$$

b) Předpokládejme, že soustava

$$F_1(x, y_1, y_2) = 0,$$

$$F_2(x, y_1, y_2) = 0$$

generuje funkce $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, kde $x \in I \subset \mathbb{R}$, tedy

$$F_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \equiv 0,$$

$$F_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \equiv 0$$

na I . Pak derivováním těchto vztahů dostáváme

$$F'_{1x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) + F'_{1y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\varphi'_1(x) + F'_{1y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\varphi'_2(x) \equiv 0,$$

$$F'_{2x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) + F'_{2y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\varphi'_1(x) + F'_{2y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\varphi'_2(x) \equiv 0.$$

Jestliže je determinant

$$J = \begin{vmatrix} F'_{1y_1}(\dots) & F'_{1y_2}(\dots) \\ F'_{2y_1}(\dots) & F'_{2y_2}(\dots) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pak řešením této soustavy dostáváme

$$y'_1(x) = \varphi'_1(x) = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} -F'_{1x}(\dots) & F'_{1y_2}(\dots) \\ -F'_{2x}(\dots) & F'_{2y_2}(\dots) \end{vmatrix},$$

$$y'_2(x) = \varphi'_2(x) = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F'_{1y_1}(\dots) & -F'_{1x}(\dots) \\ F'_{2y_1}(\dots) & -F'_{2x}(\dots) \end{vmatrix}.$$

20. Extrémy funkcí více proměnných

Definice 110 Bod $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ se nazývá bodem **lokálního maxima (lokálního minima)** funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jestliže pro každý bod $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v okolí bodu P platí:

$$f(P) - f(P^0) < 0 \quad (> 0).$$

Hodnota $f(P^0)$ se nazývá **extrém**.

Věta 8.0.10 (Nutná podmínka pro existenci extrému.) Jestliže diferencovatelná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nabývá v bodě P^0 svého extrému, její parciální derivace v tomto bodě jsou rovny nule:

$$f'_{x_1}(P^0) = f'_{x_2}(P^0) = \dots = f'_{x_n}(P^0) = 0. \quad (8.0.3)$$

Všimněte si, že pokud diferencovatelná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nabývá extrému v bodě P^0 , pak

$$df(P^0) = 0.$$

Bodu P^0 , v němž platí (8.0.3), se nazývá **stacionární bod** funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Příklad 101 Určíme stacionární body funkce

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

V tomto případě nabývá systém rovnic (8.0.3) tvaru

$$\begin{aligned} z'_x &= 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ z'_y &= 2xy + 2y = 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $x = -1$. Dosadíme tyto hodnoty do první rovnice a určíme čtyři stacionární body:

$$M_1(0, 0), \quad M_2(-5/3, 0), \quad M_3(-1, 2), \quad M_4(-1, -2).$$

Abychom zjistili, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy, musíme aplikovat dostatečné podmínky pro extrémy.

21. Dostatečné podmínky pro extrémy funkcí více proměnných

Nechť $P^0(x_0, y_0)$ je stacionární bod funkce $z = f(x, y)$. Označme

$$A = z''_{xx}(P^0), \quad B = z''_{xy}(P^0), \quad C = z''_{yy}(P^0).$$

Věta 8.0.11

- 1) Jestliže $AC - B^2 > 0$, funkce $f(x, y)$ má extrém v bodě P^0 , a to maximum pro $A < 0$ a minimum pro $A > 0$.

- 2) Jestliže $AC - B^2 < 0$, nemá funkce v bodě P^0 extrém.
- 3) Jestliže $AC - B^2 = 0$, vlastnosti druhé derivace neposkytují odpověď na otázku o existenci extrému a je nutné další vyšetřování.

Příklad 102 Pokračujeme v předchozím příkladě 101. Druhé derivace jsou

$$z''_{xx} = 12x + 10, \quad z''_{xy} = 2y, \quad z''_{yy} = 2x + 2.$$

Pro první bod M_1 máme

$$A = 10, \quad B = 0, \quad C = 2, \quad AC - B^2 = 20 > 0, \quad A > 0,$$

a tedy bod M_1 je bodem lokálního minima. Pro bod M_2 máme

$$A = -10, \quad B = 0, \quad C = -\frac{4}{3}, \quad AC - B^2 > 0, \quad A < 0$$

a tedy bod M_2 je bodem lokálního maxima. Pro bod M_3 máme

$$A = -2, \quad B = 4, \quad C = 0, \quad AC - B^2 < 0$$

a tedy bod M_3 není bodem lokálního extrému. Konečně pro bod M_4 máme

$$A = -2, \quad B = -4, \quad C = 0, \quad AC - B^2 < 0.$$

Tedy ani bod M_4 není bodem lokálního extrému.

22. Dostatečné podmínky pro obecný případ

Nechť bod $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je stacionárním bodem funkce

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Věta 8.0.12

Jestliže $d^2f(P^0) > 0$ (< 0), funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má lokální minimum (lokální maximum) v bodě P^0 .

Jestliže $d^2f(P^0) = 0$, potom není možné rozhodnout o extrému v P^0 podle druhé derivace a otázka zůstává otevřená.

Označme

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(P^0).$$

Uvažujme posloupnost determinantů

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n,$$

kde

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 8.0.13 (Sylvestrovo kritérium). *Jestliže*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0,$$

pak $d^2 f(P^0) > 0$. *Jestliže*

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0,$$

pak $d^2 f(P^0) < 0$.

23. Určení maximální a minimální hodnoty funkce na uzavřené oblasti

Předpokládejme, že máme za úkol určit nejvyšší a nejnižší hodnotu funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na uzavřené oblasti D . Jestliže funkce dosahuje jedné (nebo obou) těchto hodnot uvnitř oblasti, musí se pochopitelně jednat o lokální extrém. Může se však ukázat, že funkce nabývá nejvyšší nebo nejnižší hodnoty (nebo obou) v bodě na hranici dané oblasti.

Abychom našli globální maximum (minimum) spojitě funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na omezeném uzavřeném intervalu, je nutné určit všechna *lokální maxima* (*lokální minima*), kterých funkce dosahuje uvnitř dané oblasti a také nejvyšší (nejnižší) hodnoty, jichž dosahuje na hranici oblasti. Potom největší (nejmenší) z těchto čísel je hledané globální maximum (minimum) dané funkce.

Příklad 103 *Určeme globální extrémy funkce $z = x^2 - y^2$ na oblasti $D : x^2 + y^2 \leq 1$.*

Zkoumejme funkci f z hlediska existence extrému. Položíme-li parciální derivace rovny nule, dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x = 0 \\ z'_y &= -2y = 0 \end{aligned}$$

a řešením tohoto systému je stacionární bod $x = y = 0$, který patří do oblasti D . Najdeme $A = 2, B = 0, C = -2$ a $AC - B^2 < 0$ a bod $(0, 0)$ není bodem extrému. Toto si lze geometricky představit, všimneme-li si, že rovnice $z = x^2 - y^2$ je rovnicí hyperboloického paraboloidu.

Globální extrémy dosahuje funkce z na hranici oblasti D . Protože hranice oblasti D lze vyjádřit pomocí rovnice

$$y^2 = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1],$$

máme

$$z|_D = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1.$$

Zkoumejme funkci $z = 2x^2 - 1$ z hlediska extrému, je-li $x \in [-1, 1]$. Dostáváme

$$z' = 4x = 0 \implies x = 0 \implies y = \pm 1, z'' = 4 > 0.$$

Minimálních hodnot nabývá funkce v bodech

$$M_1(0, 1), M_2(0, -1),$$

a to

$$z(M_1) = z(M_2) = -1.$$

Maximálních hodnot nabývá funkce v koncových bodech intervalu $[-1, 1]$, tj. v bodech

$$M_3(-1, 0), M_4(1, 0),$$

a to

$$z(M_3) = z(M_4) = 1.$$

Extrémy funkce $z = x^2 - y^2$ na oblasti D jsou $z = 1$ (maxima) v bodech M_3, M_4 a $z = -1$ (minima) v bodech M_1, M_2 .

24. Vázané extrémy

Začneme formulací jednoho problému, který bude sloužit jako ilustrace pro hledání vázané extrému.

Příklad 104 Mezi všemi pravouhlými rovnoběžnostěny (paralelepipeds??) s danou celkovou plochou S máme najít takový, který má největší objem.

Nechť jsou strany rovnoběžnostěny označeny x, y a z . Problém se redukuje na hledání největší hodnoty funkce

$$V = xyz$$

za podmínky, že

$$xy + yz + zx = \frac{S}{2}.$$

Výpočet dokončíme po krátkém teoretickém výkladu.

V nejobecnějším případě je problém dán následovně: Je dána funkce

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

úkolem je nalézt extrémy za podmínky, že proměnné vyhovují m ($m < n$) podmínkám:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Následující pomocná funkce n proměnných zahrnuje m dalších neznámých parametrů (**Lagrangeových multiplikátorů**):

$$\Phi = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m.$$

Vyřešíme rovnice pro body nevázaných (nepodmíněných) extrémů pro tuto pomocnou funkci:

$$\Phi'_{x_1} = 0, \Phi'_{x_2} = 0, \dots, \Phi'_{x_n} = 0, \Phi'_{\lambda_1} = 0, \Phi'_{\lambda_2} = 0, \dots, \Phi'_{\lambda_m} = 0.$$

Dostáváme body, v nichž může funkce nabývat vázaných extrémů. Tato soustava rovnic poskytuje nutné podmínky, tedy ne každý bod vyhovující této soustavě musí být bodem vázaného extrému. Nebudeme mluvit o dostatečných podmínkách pro body vázaného extrému. V konkrétním případě je většinou možné zjistit, zda je bod určený výše uvedenými rovnicemi bodem extrému bez toho, že bychom zkoumali, jsou-li splněny dostatečné podmínky. Popisovaná metoda je známá jako metoda **Lagrangeových multiplikátorů**.

Příklad 105 Pokračujme v řešení započatého příkladu. Pomocnou funkci lze vyjádřit jako

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + yz + zx - S/2).$$

Rovnice určující body extrému jsou tvaru

$$\begin{aligned}\Phi'_x = 0 &\implies yz + \lambda(y + z) = 0, \\ \Phi'_y = 0 &\implies xz + \lambda(x + z) = 0, \\ \Phi'_z = 0 &\implies xy + \lambda(y + x) = 0, \\ \Phi'_\lambda = 0 &\implies xy + yz + zx - S/2 = 0.\end{aligned}$$

Odečteme-li rovnice od sebe navzájem, dostáváme

$$\begin{aligned}(z + \lambda)(y - x) &= 0, \\ (x + \lambda)(z - y) &= 0, \\ (y + \lambda)(z - x) &= 0.\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že $x = y = z$, tedy hledaný rovnoběžnostěn je krychle. Rozměry této krychle zjistíme pomocí podmínek

$$x = y = z = \sqrt{S/6} \quad \text{a} \quad V = \sqrt{\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}}.$$

Kapitola 9

Integrální počet funkcí jedné proměnné

Neurčitý integrál

9.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 111 Primitivní funkce (antiderivace) dané funkce $f(x)$ na daném intervalu je libovolná funkce $F(x)$, jejíž derivací je daná funkce, tedy platí:

$$F'(x) = f(x).$$

Věta 9.1.1 Jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, pak $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je k této funkci také primitivní.

Definice 112 Soubor všech primitivních funkcí dané funkce $f(x)$ se nazývá neurčitý integrál $f(x)$ a označuje se symbolem

$$\int f(x)dx,$$

tedy

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

9.2 Základní tabulka integrálů

$$\int 0dx = C,$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C, \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh} x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \\ \operatorname{arctgh} x + C, \quad |x| < 1 \\ \operatorname{arccotgh} x + C, \quad |x| > 1, \end{cases}$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + C, \quad \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{cotgh} x + C,$$

9.3 Některé vlastnosti integrálů

$$\int df(x) = f(x) + C,$$

$$d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx,$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx,$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

Kapitola 10

Integrační metody

10.1 Integrace substitucí

Věta 10.1.1 *Jestliže*

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

a $u = \varphi(x) \in C^1$, *pak*

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Příklad.

$$\int e^{x^2} x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Věta 10.1.2 *Jestliže* $\varphi(x) = ax + b$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *pak*

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Příklady. Následující dva vztahy lze lehce dokázat:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)| + C,$$

$$\int \varphi'(x)\varphi^\alpha(x) dx = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

10.2 Integrace per partes

Ze vztahů $d(uv) = u dv + v du$ a $u dv = d(uv) - v du$ vyplývá vzorec pro integraci per partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Příklad 106 Vypočtěte integrál

$$\int x e^x dx$$

Řešení.

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

10.3 Integrace racionálních lomených funkcí

Každá racionální lomená funkce je tvaru

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy. Stupeň čitatele je m . Předpokládejme, že $m < n$. V případě, že $m \geq n$, podíl $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ dává

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{\tilde{Q}_j(x)},$$

kde $j < n$. Předpokládáme, že polynomy mají reálné koeficienty a že koeficient u x^n v $Q_n(x)$ je roven 1. Polynom $Q(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$Q(x) = (x - \alpha)^k \dots (x^2 + px + q)^t \dots,$$

kde α je k -násobný reálný kořen rovnice $Q(x) = 0$ a kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má komplexně sdružené reálné kořeny (tj. $p^2 - 4q < 0$), tedy polynom $Q(x)$ má t -násobné komplexně sdružené kořeny.

V rozkladu podílu $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ na parciální zlomky odpovídá každému faktoru $(x - \alpha)^k$ součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - \alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x - \alpha)}$$

a každému faktoru $(x^2 + px + q)^t$ odpovídá součet t parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_t x + C_t}{(x^2 + px + q)^t} + \frac{B_{t-1} x + C_{t-1}}{(x^2 + px + q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)}.$$

Rozklad má tedy tvar

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - \alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x - \alpha)} + \dots + \\ & + \frac{B_t x + C_t}{(x^2 + px + q)^t} + \frac{B_{t-1} x + C_{t-1}}{(x^2 + px + q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)}. \end{aligned}$$

Proto stačí uvažovat pouze čtyři typy parciálních zlomků:

I.

$$Z_1(x) = \frac{A}{x-a}, \quad A \neq 0, a = k.$$

$$\int Z_1(x) dx = A \ln|x-a| + C.$$

II.

$$Z_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n > 1.$$

$$\int Z_2(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = x - a, \\ dt = dx \end{array} \right] = A \int \frac{1}{t^n} dt =$$

$$= \frac{At^{1-n}}{1-n} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

III.

$$Z_3(x) = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}.$$

$$\int Z_3(x) dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{x^2 + px + q} dx = \left[A = N - \frac{Mp}{2} \right] =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{(x^2 + px + q)'}{(x^2 + px + q)} dx + A \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx =$$

$$= \left[B = q - \frac{p^2}{4} \right] = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{A}{B} \int \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{B}}\right)^2 + 1} dx.$$

V posledním integrálu zavedeme substituci

$$t = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{B}}$$

a tedy

$$\frac{A}{B} \int \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{B}}\right)^2 + 1} dx = \frac{A}{B} \sqrt{B} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{B}} + C.$$

IV.

$$Z_4(x) = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, \quad p^2 - 4q < 0, n > 1.$$

Pro integrování tohoto zlomku se používá tzv. *rekurentní formule*:

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Tedy

$$\int Z_4(x) dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^n} dx + \int \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^n} dx.$$

První integrál vypočteme jako integrál typu

$$\frac{M}{2} \int \frac{f'(x)}{f^n(x)} dx,$$

kde $f(x) = x^2 + px + q$. Druhý integrál vypočteme užitím rekurentní formule po substituci $x + \frac{p}{2} = t$.

10.4 Integrace některých iracionálních funkcí

Zde uvedeme seznam některých užitečných doporučení pro výpočet integrálů některých iracionálních funkcí. Racionální funkci označujeme $R(\cdot)$.

A)

$$\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}}) dx, \quad k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Je vhodné zavést substituci $x = t^\alpha$, kde α je nejmenší společný násobek celých čísel k_1, k_2, \dots, k_n .

B)

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right) dx,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Je vhodné zavést substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, kde α je nejmenší společný násobek čísel k_1, k_2, \dots, k_n .

C) Binomický integrál

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Doporučujeme postupovat následovně:

- Je-li $p \in \mathbb{Z}$, pak používáme stejná doporučení jako v **A**).
- Je-li $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, pak pokládáme $ax^n + b = t^\alpha$, kde α je jmenovatel p . Dále používáme postup popsany v **A**).
- Je-li $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, pak pokládáme $a + \frac{b}{x^n} = t^\alpha$, kde α je jmenovatel p . Dále používáme postup popsany v **A**).

D)

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0.$$

Používáme tzv. *Eulerovy substituce*:

- Je-li $a > 0$, užíváme substituci

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}.$$

- Je-li $c > 0$, užíváme substituci

$$t \cdot x = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c}.$$

- Je-li $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = |x - \alpha| \sqrt{a \frac{x - \beta}{x - \alpha}}$$

a užijeme substituci

$$t^2 = a \cdot \frac{x - \beta}{x - \alpha}.$$

E) Pro integrál typu

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

lze použít následující postup:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}} dx$$

a dostáváme integrály typů: (??)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

F) Pro integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = a \sin t, \quad x = a \cos t.$$

G) Pro integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad x = a \sinh t, \quad x = a \operatorname{cotg} t.$$

H) Pro integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad x = a \sin t, \quad x = a \cosh t.$$

10.5 Integrace trigonometrických funkcí

Budeme se zabývat integrováním funkcí typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

A) Lze užít tzv. *univerzální substituci*:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Pak

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Odtud plyne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Analogicky vypočteme

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

B) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem ke $\cos x$, tj. je-li

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \sin x.$$

C) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k $\sin x$, tj. je-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \cos x.$$

D) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ sudá vzhledem k funkcím $\sin x$ i $\cos x$, tj. je-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Pak

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$t = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} \implies \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Kapitola 11

Určitý integrál a jeho aplikace

Určitý integrál

11.1 Plocha trapezoidu omezeného křivkami

Rozdělme základnu trapezoidu (interval $[a, b]$ na n subintervalů

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ vedme přímky rovnoběžné s osou y dělicími body intervalu $[a, b]$. Takto daný trapezoid omezený křivkami rozdělíme do n menších trapezoidů. V každém subintervalu vybereme libovolný bod. Označíme-li tyto body $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, můžeme psát

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \quad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n.$$

Pak

$$P \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

a dále

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kde $\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$.

11.2 Určitý integrál

Definujeme tzv. integrální součet:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Definice 113 *Určitý integrál na $[a, b]$ je limita integrálních součtů pro případ, že délka nejdelšího subintervalu se blíží nule (za předpokladu, že tato limita existuje).*

Označujeme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} I_n.$$

Geometrický význam určitého integrálu — viz předcházející podkapitola 11.1

Věta 11.2.1 *(O existenci určitého integrálu): Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak $\int_a^b f(x) dx$ existuje.*

Definice 114 *Existuje-li $\int_a^b f(x) dx$, pak funkce $f(x)$ se nazývá integrovatelná funkce.*

11.3 Vlastnosti určitého integrálu

Platí:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b dx = b - a,$$

$$\int_a^b 0 dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

je-li $c \in [a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(interval integrace $[a, b]$ lze rozdělit na dvě části),

$$\forall k \in \mathbb{R} : \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

(konstantu lze vytknout před integrál),

je-li $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad a < b,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt,$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_{-a}^a S(x) dx = 2 \int_0^a S(x) dx; \quad \int_{-a}^a L(x) dx = 0.$$

11.4 Odhad určitého integrálu. Věta o střední hodnotě.

Věta 11.4.1 *Je-li $m \leq f(x) \leq M$ na $[a, b]$, pak*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

nebo

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Věta 11.4.2 *(Věta o střední hodnotě) Je-li $f(x) \in C$ na $[a, b]$, pak $\exists \xi \in [a, b]$ takové, že*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

11.5 Derivace integrálu vzhledem k horní mezi

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Integrál je funkcí horní meze. (Diskuse o označení: Je-li $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, pak x probíhá hodnoty od a do x , což nedává smysl.)

Věta 11.5.1 *Derivace integrálu vzhledem k horní mezi je rovna integrandu, tj.*

$$F'(x) = f(x).$$

Důsledek. Ke každé integrovatelné funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce.

11.6 Newton-Leibnizova věta

Věta 11.6.1 *Hodnota určitého integrálu je rovna rozdílu hodnot libovolné antiderivace integrandu odpovídajících horní a dolní mezi integrálu:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kde $F'(x) = f(x)$.

Příklad. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2$.

11.7 Integrace per partes pro učitě integrály

Ze vztahu pro integraci per partes pro neurčité integrály okamžitě vyplývá

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

11.8 Metoda substituce pro určité integrály

Věta 11.8.1 Je-li $x = \varphi(t) \in C^1$ na (α, β) , $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ a $\varphi(t)$ je monotónní, pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt.$$

Příklad.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = [x = e^t, t \in [0, 1]] = \int_0^1 \frac{t}{e^t} e^t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

11.9 Numerické integrování

1. Úvod

V praxi zřídka dokážeme najít přesnou hodnotu určitého integrálu nebo integrovat libovolnou obyčejnou diferenciální rovnici. Například integrál

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V následujícím odstavci popíšeme některé metody pro výpočet určitých integrálů. Zavedeme pojem *kvadratického vzorce*. Nechť je dán určitý integrál

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

funkce f , která je spojitá na intervalu $[a, b]$. Přibližná rovnost

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n q_j \cdot f(x_j),$$

kde q_j jsou jistá čísla a x_j jsou určité body intervalu $[a, b]$, se nazývá *kvadratická formule* definovaná *váhami* q_j a *uzly* x_j .

2. Obdélníkové pravidlo

Předpokládejme, že $f \in C^2[-h/2, h/2]$, $h > 0$. Položíme přibližně

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx h \cdot f_0, \tag{11.9.1}$$

kde $f_0 = f(0)$, tedy plochu křivostranného lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce f lze aproximovat plochou vepsaného obdélníka, jehož výška je rovna hodnotě funkce f v polovině základny lichoběžníka. Dále hledáme zbytek, tedy chybu formule (11.9.1). Lze dokázat tzv. *obdélníkové pravidlo se zbytkem*:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi), \quad |\xi| \leq \frac{h}{2}.$$

3. Lichoběžníkové pravidlo

Nechť $f \in C^2[0, h]$. Položíme

$$\int_0^h f(x) dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2},$$

kde $f_0 = f(0)$ a $f_1 = f(h)$, tj. integrál je přibližně nahrazen plochou vepsaného lichoběžníka. Tzv. *lichoběžníkové pravidlo se zbytkem* má tvar

$$\int_0^h f(x) dx = h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [0, h].$$

4. Simpsonovo pravidlo

Předpokládejme, že $f \in C^4[-h, h]$. Aproximujeme integrál

$$\int_{-h}^h f(x) dx$$

plochou vepsaného křivostranného lichoběžníka ohraničeného shora parabolou procházející body $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1) , kde $f_i = f(ih)$. Tato parabola má rovnici

$$y = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2,$$

což lze lehce ověřit, položíme-li naopak x rovno $-h$, 0 a h . Tak lehce zjistíme, že

$$\int_{-h}^h y(x) dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Tedy *Simpsonovo pravidlo*, které se také nazývá *parabolické pravidlo*, má tvar

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Lze dokázat tzv. *Simpsonovo pravidlo se zbytkem*:

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\xi).$$

Výše uvedené kvadratické formy se nazývají *kanonické*.

5. Složené kvadratické formule

Je-li v praxi třeba určit přibližnou hodnotu integrálu, daný interval $[a, b]$ je rozdělen na N shodných subintervalů, nakaždý z nich aplikujeme kanonickou kvadratickou formuli a výsledky sečteme. Kvadratické formule zkonstruované takto na intervalu $[a, b]$ se nazývají *složené*. Aplikujeme-li obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo, je pohodlné brát intervaly

délky h , v případě Simpsonova pravidla délky $2h$.

Podívejme se podrobněji na použití obdélníkového pravidla. Nechť $f \in C^2$. Označíme intervaly $[x_i, x_{i+1}]$, kde $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, $x_N = b$, $h = (b-a)/N$. Ve shodě s obdélníkovým pravidlem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx hf_{i+1/2}, \quad (11.9.2)$$

kde $f_{i+1/2} = f(a + (i + 1/2)h)$ je hodnota f ve středu subintervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Navíc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = hf_{i+1/2} + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je nějaký bod. Sečteme-li všechny aproximace (11.9.2) dostáváme *složené obdélníkové pravidlo*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{N-1/2}).$$

Lze lehce dokázat tzv. *složené obdélníkové pravidlo se zbytkem*:

$$\int_a^b f(x) dx = h (f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{N-1/2}) + h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot f''(\xi).$$

Za podmínky, že $f \in C^2[a, b]$, můžeme zapsat *složené lichoběžníkové pravidlo*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2} \right)$$

a odpovídající *složené lichoběžníkové pravidlo se zbytkem*:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2} \right) - h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot f''(\xi),$$

kde $f_i = f(a + ih)$, $h = (b-a)/N$, a $\xi \in [a, b]$ v nějakém bodě.

Nechť nyní $h = (b-a)/2N$ a $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Simpsonovo kanonické pravidlo můžeme přepsat ve spojení se subintervaly $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ délky $2h$:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}).$$

Sečtením obou stran vztahu přes i od 0 do $N-1$ dostáváme *složené Simpsonovo pravidlo*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{2N-1} + f_{2N}).$$

Odpovídající *složené Simpsonovo pravidlo se zbytkem*, které získáme sečtením rovností v subintervalech $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ za podmínky, že $f \in C^4$, lze zapsat takto:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f_0 + f_{2N} + 4 \sum_{i=1}^N f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f_{2i} \right) - h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(\xi),$$

kde $f_i = f(a + ih)$, $h = (b - a)/(2N)$, a $\xi \in [a, b]$.

Pro stručnost zavedeme označení

$$I_h^{\text{rect}} = h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f_{i+1/2},$$

$$I_h^{\text{trap}} = h \cdot \left(\frac{f_0 + f_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i \right),$$

kde $h = (b - a)/N$ a $f_\mu = f(a + \mu h)$, a

$$I_h^{\text{Simp}} = \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2N} + 4 \sum_{i=1}^N f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f_{2i} \right),$$

kde $h = (b - a)/(2N)$ a $f_i = f(a + ih)$.

Z vyjádření zbytku vidíme, že obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo jsou přesné pro polynomy prvního stupně, zatímco Simpsonovo pravidlo je přesné pro polynomy třetího stupně. První dvě pravidla mají přesnost druhého řádu vzhledem k h , zatímco Simpsonovo pravidlo má přesnost čtvrtého řádu, je-li f hladká. Proto pro funkce třídy C^4 pro malá h dává Simpsonovo pravidlo zpravidla vyšší přesnost než předešlé dvě metody.

Chyba obdélníkového pravidla a Simpsonova pravidla splňuje nerovnosti

$$|I - I_h^{\text{rect}}| \leq h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)|,$$

$$|I - I_h^{\text{Simp}}| \leq h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Existují podobné nerovnosti pro lichoběžníkové pravidlo. Dolní odhady jsou také užitečné. Především dolní odhad pro obdélníkové pravidlo je

$$|I - I_h^{\text{rect}}| \geq h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \min_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Příklad 107 Jako příklad analyzujeme chyby kvadratických formulí pro integrál

$$I = \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx,$$

kteřý nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, ale v aplikacích se často využívá.

Máme

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}, \quad f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2},$$

a

$$e^{-1/4} \leq |f''(x)| \leq 2, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 12$$

pro $x \in [0, 1/2]$.

Tedy pro $h = 0.05$ dostáváme

$$0.4 \cdot 10^{-4} \leq |I - I_h^{\text{rect}}| \leq 0.11 \cdot 10^{-3}$$

a

$$|I - I_h^{\text{Simp}}| \leq 0.21 \cdot 10^{-6}.$$

Horní odhad chyby Simpsonova pravidla je výrazně nižší než dolní odhad chyby obdélníkového pravidla.

11.10 Nevlastní integrály

1. Nekonečné integrály

Uvažujme integrál

$$I(l) = \int_a^l f(x) dx.$$

Nechť l roste nade všechny meze. Potom existují dvě možnosti, totiž buď má $I(l)$ limitu pro $l \rightarrow +\infty$ nebo nikoli.

Definice 115 *Nevlastní integrál*

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

funkce $f(x)$ na intervalu $[a, \infty)$ je limita integrálu

$$\int_a^l f(x) dx$$

pro $l \rightarrow \infty$, za předpokladu, že tato limita existuje, tj.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f(x) dx.$$

Pokud limita existuje, říkáme, že ne vlastní integrál konverguje; v opačném případě říkáme, že diverguje (integrál jde k nekonečnu nebo nemá vůbec limitu).

Příklad.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{l \rightarrow \infty} [e^{-x}]_0^l = \lim_{l \rightarrow \infty} [-e^{-l} + e^0] = 0 + 1 = 1.$$

Nevlastní integrál konverguje.

Příklad.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{l \rightarrow \infty} \ln |x|_1^l = \lim_{l \rightarrow \infty} [\ln |l| - \ln 1] = \infty.$$

Nevlastní integrál diverguje.

Další případy nevalstních integrálů:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{l \rightarrow -\infty} \int_{-l}^a f(x) dx; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \\ &= \lim_{l \rightarrow -\infty} \int_{-l}^a f(x) dx + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(x) dx; \end{aligned}$$

pro $l = p$ máme případ ?? *valeur principle*:

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

2. Integrály nespojitých funkcí

Definice 116 *Nevalstní integrál*

$$\int_a^b f(x) dx$$

funkce $f(x)$ spojitá na $for x \in [a, b)$ a neomezené pro $x \rightarrow b$ je limita integrálu

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$ pokud tato limita existuje, tj.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

(Je-li limita konečná, nevalstní integrál konverguje, jinak diverguje.)

Podobně, pokud funkce $f(x)$ má nekonečnou nespojitost ?? pouze v levém koncovém bodě $x = a$ intervalu $(a, b]$, pokládáme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Pokud jsou body nespojitosti pouze v bodech $x = a$ a $x = b$, pak pro $a < c < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^c f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_c^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Příklad.

$$\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\delta}^{10} = 2\sqrt{10}.$$

Nevlastní integrál konverguje.

Příklad.

$$\int_0^{10} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{10} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \ln |x| \Big|_{\delta}^{10} = +\infty.$$

Nevlastní integrál diverguje.

11.11 Aplikace určitého integrálu

1. Obsah rovinného obrazce

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li křivka $y = f(x)$ dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \xi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, pak

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \xi(t) \varphi'(t) dt.$$

Plocha mezi dvěma křivkami je vyjádřena vztahem

$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

2. Délka oblouku

Je-li $y = f(x)$, pak

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Je-li $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, pak

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Příklad. Půlkruh je dán parametrickými rovnicemi $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$. Pak

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{[\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2} dt = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

3. Objem tělesa

Budeme předpokládat, že plocha průniku je spojitá funkce $P = S(x)$, kde x je x -ová souřadnice průsečíku sečné roviny s x -ovou osou. Pak

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Vzniklo-li uvažované těleso rotací křivostranného lichoběžníka omezeného křivkou $y = f(x)$ kolem osy x , průsečík s osou x je kruh s poloměrem rovným odpovídající y -ové souřadnici $y = f(x)$ a v důsledku toho $S(x) = \pi y^2$. Tedy

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Je-li $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt.$$

4. Obsah rotační plochy

Je-li $y = f(x)$, pak

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

V případě, že $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pak

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

11.12 Integrace s programem MAPLE V

1. Analytická integrace s programem MAPLE

Důležitou částí programu Maple je možnost analytické integrace. Ta se provádí pomocí příkazu "int", jehož syntaxe je podobná jako syntaxe příkazu "diff".

Příklad 108 Najděte integrál

$$\int x^2 dx.$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Napišme odovídající příkaz v MAPLE:

```
int(x*x,x);
```

Výsledek vypsany programem MAPLE je tvaru:

$$\frac{1}{3}x^3.$$

Příklad 109 Najděte integrál

$$\int xe^x dx.$$

pomocí MAPLE V (viz Příklad 106).

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
int(x*x,x);
```

Výsledek, vypsany programem MAPLE, je tvaru:

$$xe^x - e^x.$$

Všimněme si, že ve výsledku vpsaném programem MAPLE integrační konstanta chybí.

2. Určité integrály s programem MAPLE

Příklad 110 Najděte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^{3/2}} dt$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz programu MAPLE:

```
int(exp(-t)/(1+t^(3/2)),t=0..infinity);
```

Výsledek vypsany programem MAPLE je příliš neohrabaný. V tomto případě — protože výsledkem je konstanta — lze použít příkazu "evalf" pro nalezení numerické aproximace:

```
evalf(%);
```

Nyní MAPLE dává numerický výsledek:

$$.613073060.$$

Kapitola 12

Dvojrozměrný a vícerozměrný integrál (křivkový a plošný integrál)

12.1 Integrální počet funkcí více proměnných

1. Objem křivostěnného válce

Označme hledaný objem V . Nyní rozdělíme základnu D cylindroidu na podoblasti pomocí dvou soustav souřadných os $x = \text{konst}$ a $y = \text{konst}$.

Plocha každé z podoblastí D_{ij} (předpokládejme, že $D_{ij} \subset D$) je rovna $\Delta x_i \cdot \Delta y_j$, kde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. Objem je přibližně roven *integrálnímu součtu*, tj.

$$V \approx \sum_{i=0, j=0}^{n-1, m-1} f(\xi_i, \xi_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Označme $\Delta = \max_{i,j} \{\Delta x_i, \Delta y_j\}$. Pak pro objem V dostáváme přesné vyjádření

$$V = \lim_{n, m \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0, j=0}^{n-1, m-1} f(\xi_i, \xi_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

za předpokladu, že limita existuje.

2. Definice dvojného integrálu

Definice 117 *Integrální suma (za předpokladu, že existuje)*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0, j=0}^{n-1, m-1} f(\xi_i, \xi_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

se nazývá dvojný integrál funkce $f(x, y)$ přes oblast D . Tuto skutečnost zapisujeme následovně:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0, j=0}^{n-1, m-1} f(\xi_i, \xi_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Geometrický význam dvojného integrálu byl podán v předchozím odstavci. 0

3. Vlastnosti dvojného integrálu

1. Dvojný integrál součtu (nebo rozdílu) dvou funkcí je roven součtu (nebo rozdílu) sčítanců dvojného integrálu:

$$\iint_D [f(x, y) \pm \varphi(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

2. Konstanta v integrandu může být vytknuta před symbol dvojného integrálu:

$$\iint_D C f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy.$$

3. Je-li integrační obor D rozdělen na dva obory D_1 a D_2 , které nemají společné žádné vnitřní body, pak

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

4. Pokud dvě funkce $f(x, y)$ a $\varphi(x, y)$ splňují podmínku

$$f(x, y) \geq \varphi(x, y)$$

ve všech bodech oboru integrace, pak

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

5. Platí:

$$\iint_D dx dy = S,$$

kde S je plocha oblasti D .

6. Pokud

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

pro $(x, y) \in D$, pak

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS.$$

7. Je-li $f(x, y) \in C(D)$, pak existuje bod $(\xi, \nu) \in D$ takový, že

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \nu) \cdot S$$

(tento vzorec se nazývá **věta o střední hodnotě** pro dvojný integrál) nebo

$$f(\xi, \nu) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

8.

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy.$$

4. Vyčíslení hodnoty dvojného integrálu

Definice 118 *Elementární oblast prvního typu D_1 je definována jako*

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Elementární oblast druhého typu D_2 je definována jako

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}.$$

Připomeňme, že problémem výpočtu objemu tělesa jsme se již zabývali v souvislosti s aplikacemi určitého integrálu na geometrické problémy. Odvodili jsme vztah

$$V = \int_a^b S(x) \, dx$$

pro objem tělesa, kde $S(x)$ je řez rovinou kolmou k ose x , která protíná osu v bodě x , zatímco $x = a$ a $x = b$ jsou rovnice rovin ohraničující dané těleso. Protože

$$S(x^*) = \int_{f_1(x^*)}^{f_2(x^*)} f(x^*, y) \, dy,$$

dostáváme

$$V = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

Máme tzv. *Fubiniho* větu (pro dvojný integrál):

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Analogicky dostáváme

$$\iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx.$$

Tyto vztahy ukazují, jak se výpočet dvojného integrálu redukuje na dva následující obyčejné určité integrály; je třeba mít na paměti, že ve vnitřním integrálu je jedna z proměnných považována v procesu integrování za konstantu. Rozvoj pravých stran těchto vztahů se nazývá (dvojitě) iterování nebo opakované integrály, celý proces výpočtu popisujeme jako redukci dvojného integrálu na iterované integrály.

Redukce dvojného integrálu na iterovaný integrál je obzvlášť jednoduchá v případě, že oblast integrace D je obdélník se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami. V tomto případě jsou meze vnějšího i vnitřního integrálu konstantami:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Příklad 111 Najdeme objem V tělesa omezeného plochou $z = 1 - 4x^2 - y^2$ a rovinou Oxy .

Řešení. Těleso je část eliptického paraboloidu ležícího nad rovinou Oxy . Paraboloid protíná rovinu xy v elipse $4x^2 + y^2 = 1$. Problém se tak redukuje na výpočet objemu cylindroidu bez postranní cylindrické plochy omezené shora paraboloidem $z = 1 - 4x^2 - y^2$ a s vnitřkem elipsy jako základnou. Uvažované těleso je symetrické vzhledem k rovinám Oxz a Oyz , a tak stačí určit čtvrtinu objemu ve čtvrtém ?? kvadrantu. Ta je rovna dvojnému integrálu přes oblast určenou podmínkami

$$4x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

tj. přes čtvrtinu elipsy. Integrujeme-li vzhledem k y a pak vzhledem k x , dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}V &= \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2) dy = \\ &= \int_0^{1/2} dx \left[y - 4x^2y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{1-4x^2}} = \\ &= \int_0^{1/2} \left[(1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx = \frac{2}{3} \int_0^{1/2} [1 - 4x^2]^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \left\{ x = \frac{1}{2} \sin t \right\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [1 - \sin^2 t]^{\frac{3}{2}} \cos t dt = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \\ &= \left\{ \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t), \cos^4 t = \frac{1}{4} \left[1 + 2 \cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{1}{2} \cos^4 t \right] dt = \frac{1}{12} \left[\frac{3}{2}t + \sin 2t \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8} \left[\sin 4t \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{3\pi}{48} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

tedy

???

5. Metoda substituce pro dvojný integrály

Věta 12.1.1 Nahradíme-li proměnné x a y ve dvojném intergálu novými neznámými u , v podle vztahů

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v), \end{aligned} \tag{12.1.1}$$

vzorec pro substituci bude mít tvar

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad (12.1.2)$$

kde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

a G je transformace oblasti D podle vzorců (12.1.1).

Poznámka 17 Výraz J je (Jacobiho) funkcionální determinant (Jacobián).

6. Dvojný integrál v polárních souřadnicích

Aplikujme obecný vztah na transformaci z kartézských souřadnic (x a y) na *polární souřadnice* (které budeme místo u, v označovat r a φ):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Předpokládáme, že $r \geq 0$ a že úhel φ nabývá hodnot mezi 0 a 2π ($\varphi \in [0, 2\pi)$).

Jacobián tohoto zobrazení je

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi - (-r \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = r.$$

Tedy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi.$$

Příklad 112 Najděte

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

kde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

a a je kladná konstanta. Pro polární souřadnice máme

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x = r \cos \varphi \\ 0 \leq y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \cos \varphi \geq 0 \\ \sin \varphi \geq 0 \end{array} \right\} \implies 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

a dále $x^2 + y^2 = r^2 \leq a^2 \implies r \leq a$. Tedy pro G dostáváme definici:

$$G = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Nakonec

$$I = \iint_G \sqrt{r^2} \cdot r dr d\varphi = \iint_G r^2 dr d\varphi = \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Poznámka 18 V některých případech je vhodné použít tzv. zobecněné polární souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= ar \cos k\varphi, \\ x &= br \sin k\varphi, \quad k, a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7. Trojný integrál

Nechť funkce $u = f(x, y, z)$ je definována na množině

$$D \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Rozdělme intervaly $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, f]$ do podintervalů:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \cup_{i=1}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]; \text{ where } a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \\ [c, d] &= \cup_{j=1}^{m-1} [y_j, y_{j+1}]; \text{ where } c = y_1 < y_2 < \dots < y_m = d, \\ [e, f] &= \cup_{k=1}^{o-1} [z_k, z_{k+1}]; \text{ where } e = z_1 < z_2 < \dots < z_o = f. \end{aligned}$$

Definujme podoblasti

$$D_{ijk} = \{(x, y, z) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}, z_k \leq z \leq z_{k+1}\},$$

kde $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $k \in \{1, 2, \dots, o-1\}$ a budeme uvažovat pouze takové podoblasti D_{ijk} , které jsou podmnožinami $D : D_{ijk} \subset D$. V každé podoblasti D_{ijk} vybereme bod

$$(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \in D_{ijk}$$

a definujeme číslo

$$\Delta = \max_{i,j,k} (\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k).$$

Definice 119 *Trojný integrál funkce $f(x, y, z)$ na oblasti D je definován jako limita integrálního součtu (za předpokladu, že existuje), tj.*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n, m, o \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{i,k,j=0}^{n-1, m-1, o-1} f(\xi_i, \xi_k, \xi_j) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Poznámka 19 *Vlastnosti dvojného integrálu lze bez zásadních změn rozšířit na trojné integrály.*

8. Geometrický a fyzikální význam trojného integrálu

a) Geometrický význam. Je-li integrand $f(x, y, z)$ identicky roven jedné, trojný integrál vyjadřuje objem V oblasti D :

$$V = \iiint_D dx dy dz.$$

a) Fyzikální význam. Uvažujme těleso zaujímající v prostoru oblast D . Budeme předpokládat, že rozložení hustoty hmoty v tělese je dáno funkcí spojitou na $D : \delta = \delta(x, y, z)$ (kg/m^3). Celková hmota M nehomogenního tělesa D je rovna

$$M = \iiint_D \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

9. Vyčíslení hodnoty trojného integrálu

Zavedme *základní oblasti* pro výpočet hodnoty integrálu

$$\begin{aligned} M_1\{(x, y, z) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), F_1(x, y) \leq z \leq F_2(x, y)\}, \\ M_2\{(x, y, z) : a \leq x \leq b, f_1^0(x) \leq z \leq f_2^0(x), F_1^0(x, z) \leq y \leq F_2^0(x, z)\}, \\ M_3\{(x, y, z) : a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), \Phi_1(x, y) \leq z \leq \Phi_2(x, y)\}, \\ M_4\{(x, y, z) : a \leq y \leq b, \varphi_1^0(y) \leq z \leq \varphi_2^0(y), \Phi_1^0(y, z) \leq x \leq \Phi_2^0(y, z)\}, \\ M_5\{(x, y, z) : a \leq z \leq b, \omega_1(z) \leq x \leq \omega_2(z), \Omega_1(x, z) \leq y \leq \Omega_2(x, z)\}, \\ M_6\{(x, y, z) : a \leq z \leq b, \omega_1^0(z) \leq y \leq \omega_2^0(z), \Omega_1^0(y, z) \leq x \leq \Omega_2^0(y, z)\}. \end{aligned}$$

Věta 12.1.2 Fubiniho věty (pro trojné integrály):

$$\begin{aligned} \iiint_{M_1} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \\ \iiint_{M_2} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dx \int_{f_1^0(x)}^{f_2^0(x)} dz \int_{F_1^0(x, z)}^{F_2^0(x, z)} f(x, y, z) dy \end{aligned}$$

atd.

Příklad 113 Vypočtěme trojné integrály

$$I = \iiint_D (x + y + z) dx dy dz$$

na oblasti D omezené rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a rovinou $x + y + z = 1$.

Oblast D může být zapsána ve tvaru

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(x + y)z + \frac{1}{2}z^2 \right] \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{1}{2}(1 - x - y)^2 \right] dy = \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{3}(x + y)^3 - \frac{1}{6}(1 - x - y)^3 \right] \Big|_0^{1-x} = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}(1 - x)^3 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}(1 - x)^4 \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}[12 - 4 - 8 + 2 + 1] = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

10. Metoda substituce pro trojný integrál

Věta 12.1.3 *Je-li $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ a oblast D se transformuje na G , pak*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw,$$

kde

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

11. Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

kde

$$0 \leq r, 0 \leq \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}.$$

Pak $M(x, y, z) = M(r, \varphi, z)$ a Jacobián

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

V tomto případě

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f[r \cos \varphi, r \sin \varphi, z] r dr d\varphi dz.$$

Příklad 114 *Vyčíslíme*

$$I = \iiint_D z dx dy dz,$$

kde

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 6\}.$$

Tato oblast je prostor mezi paraboloidem a sférou (kulovou plochou) Protože $r^2 \leq z$, $r^2 + z^2 \leq 6$, pak průnikem těchto dvou ploch je křivka daná rovnicí

$$r^4 = 6 - r^2 \implies (r^2 - 2)(r^2 + 3) = 0 \implies r = \sqrt{2}, z = 2$$

a

$$G = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z dz = \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2} z^2 \Big|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r [6 - r^2 - r^4] dr = \\
 &= \pi \left[\frac{6r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right] \Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi \left[3 \cdot 2 - 1 - \frac{8}{5} \right] = \pi \left[6 - 1 - \frac{4}{3} \right] = \frac{11\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

12. Sférické souřadnice

Sférické souřadnice jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \psi \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \psi \sin \varphi, \\
 z &= r \cos \psi,
 \end{aligned}$$

kde

$$0 \leq r, 0 \leq \psi < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Pak $M(x, y, z) = M(r, \varphi, \psi)$ a Jacobián

$$J = \begin{vmatrix} \sin \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi & r \sin \psi \cos \varphi & r \cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= r^2 (-\sin^3 \psi \cos^2 \varphi - \sin \psi \cos^2 \psi \sin^2 \varphi - \cos^2 \psi \sin \psi \cos^2 \varphi - \sin^3 \psi \sin^2 \varphi) = \\
 &= r^2 (-\sin \psi \sin^2 \psi - \sin \psi \cos^2 \psi) = -r^2 \sin \psi.
 \end{aligned}$$

V tomto případě

$$\begin{aligned}
 &\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\
 &= \iiint_G f[r \sin \psi \cos \varphi, r \sin \psi \sin \varphi, r \cos \psi] r^2 \sin \psi dr d\varphi d\psi.
 \end{aligned}$$

Příklad 115 *Vyčíslíme*

$$I = \iiint_D x^2 dx dy dz,$$

kde

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Tato oblast může být ve sférických souřadnicích zapsáno takto: $r^2 \leq R^2$. Tedy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin^2 \psi \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{r^5}{5} \Big|_0^R \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \psi d\psi = \\ &= \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \psi) \sin \psi d\psi = [t = \cos \psi] = \\ &= -\frac{R^5}{10} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} \int_1^{-1} (1 - t^2) dt = -\frac{2\pi R^5}{10} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{-1} = \\ &= -\frac{2\pi R^5}{10} \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{2\pi R^5}{10} \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

13. Křivkové integrály

a) Motivace. Hmota vedení (drátu).

Představme si tenký drát ve tvaru křivky C s koncovými body A a B . Předpokládejme, že drát má proměnnou hustotu danou v bodě (x, y, z) známou spojitou funkcí $f(x, y, z)$, v gramech na 1 cm délky. Nechť

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

je hladká parametrizace křivky C , $t = a$ odpovídá počátečnímu bodu A křivky a $t = b$ odpovídá jejímu koncovému bodu B . Abychom odhadli celkovou hmotu m drátu, začneme rozdělením

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

intervalu $[a, b]$ do n subintervalů. Tyto dělicí body $[a, b]$ dávají podle naší parametrizace fyzické rozdělení drátu do krátkých segmentů křivky. Označme P_i bod

$$(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pak můžeme aproximovat hmotu drátu:

$$m \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_{i-1},$$

kde Δs_i je délka (vždy **kladná**) segmentu křivky C mezi body P_{i-1}, P_i . Limita tohoto součtu $\Delta t \rightarrow 0$ (nebo $\Delta s \rightarrow 0$) je celková hmotu m . Toto je naše motivace pro definici křivkového integrálu funkce f podle křivky C . Označujeme:

$$m = \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i.$$

b) Křivkový integrál (prvního typu)

Definice 120 (*Křivkový integrál vzhledem k délce oblouku; křivkový integrál prvního typu.*)
Předpokládejme, že $f(x, y, z)$ je spojitá v každém bodě hladké parametrické křivky C od bodu A do bodu B . Potom křivkový integrál funkce f podle křivky C od A do B vzhledem k délce oblouku je definován jako

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i.$$

c) Výpočet křivkového integrálu prvního typu

Nechť

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

je hladká parametrizace křivky C , $t = a$ odpovídá počátečnímu bodu A křivky a $t = b$ jejímu koncovému bodu B . Pak

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Toto je obyčejný integrál vzhledem k jedné proměnné t . Pokud je-li $z \equiv 0$ (křivka C leží v rovině xy), máme

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Příklad 116 *Vypočtete křivkový integrál*

$$I = \int_C xy ds,$$

kde C je první kvadrant čtverťkruhu parametrizovaný

$$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Řešení. Z předchozího vztahu vidíme, že

$$\begin{aligned} I &= \int_C xy ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{1}{2} \frac{-\cos 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) Křivkový integrál vzhledem k souřadnicovým proměnným (Křivkový integrál druhého typu)

Křivkový integrál f podél C vzhledem k x je definován takto

$$\int_C f(x, y, z) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

(Δx_i nezachovává znaménko). Tedy

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

Podobně křivkové integrály f podél C vzhledem k y a vzhledem k z jsou dány vztahy

$$\int_C f(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$$

a

$$\int_C f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt.$$

Poslední tři integrály se typicky vyskytují spolu. Jsou-li P, Q a R spojité funkce proměnných x, y a z , pak definujeme *křivkový integrál druhého typu* jako

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Příklad 117 Vypočtete integrál

$$I = \int_C y dx + z dy + x dz,$$

kde C je parametrická křivka $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$.

Řešení. Dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (t^2 + t^3 \cdot 2t + t \cdot 3t^2) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^3 + 2t^4) dt = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1}{60}(20 + 45 + 24) = \frac{89}{60}. \end{aligned}$$

e) Rozdíly mezi křivkovými integrály prvního a druhého typu

Předpokládejme, že orientaci křivky C (směr, v němž se pohybuje pro rostoucí t) obrátíme. Potom, kvůli $x'(t), y'(t), z'(t)$, se znaménko křivkového integrálu druhého typu obrátí. Tato

změna orientace však nemění hodnotu křivkového integrálu prvního typu. Tuto skutečnost lze zapsat následovně:

$$\int_{C^-} f \, ds = \int_C f \, ds$$

oproti vzorci

$$\int_{C^-} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_C Pdx + Qdy + Rdz,$$

kde symbol C^- označuje křivku C se zachovanou orientací (z B do A spíše než z A do B).

14. Křivkové integrály a práce

Předpokládejme, že

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

je silové pole definované na oblasti, která obsahuje křivku C . Předpokládejme, že C má parametrizaci

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

s nenulovým vektorem rychlosti

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}.$$

Rychlost asociovaná s tímto vektorem je

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Jednotkový tečný vektor ke křivce C je roven

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{1}{v(t)}(x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}).$$

Chceme aproximovat práci W vykonanou silou \vec{F} pohybem částice podél křivky C z A do B . Rozdělme C jak je naznačeno. Uvažme \vec{F} pohybující částicí z P_{i-1} do P_i . Vykonaná práce ΔW_i je přibližně součin vzdálenosti Δs_i P_{i-1} a P_i (měřeno podél C) a tečné komponenty vektoru $\vec{F} \cdot \vec{T}$ síly \vec{F} v typickém bodě

$$(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$$

mezi P_{i-1} a P_i . Tedy

$$\Delta W_i \approx \vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) \cdot \vec{T}(t_i^*) \Delta s_i,$$

takže celková práce W je dána přibližně vztahem

$$W \approx \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) \cdot \vec{T}(t_i^*) \Delta s_i.$$

Tato aproximace naznačuje, že definujeme práci W jako

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Je zvykem psát formálně

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

a

$$\vec{T} ds = d\vec{r}.$$

Pak

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Pro vyčíslení W je obvyklé vyjádřit její integrand podle parametru t .

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) dt = \\ &= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b (Pdx + Qdy + Rdz). \end{aligned}$$

Tedy

$$W = \int_a^b Pdx + Qdy + Rdz = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

15. Nezávislost křivkového integrálu na cestě

Věta 12.1.4 *Křivkový integrál*

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

je nezávislý na postupu tehdy a jen tehdy, jestliže

$$\vec{F} = \nabla f$$

pro nějakou funkci f .

Dokážeme pouze jednu část věty. Předpokládejme, že

$$\vec{F} = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

a C je cesta z A do B parametrizovaná podle parametru t in $[a, b]$. Pak

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \int_a^b (f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz) = \\ &= \int_a^b \left(f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} + f'_z \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b [f(x(t), y(t), z(t))]'_t dt = \end{aligned}$$

$$= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)).$$

Tedy

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = f(B) - f(A).$$

Křivkový integrál závisí pouze na bodech A a B a je tedy nezávislý na výběru určité cesty C .

Věta 12.1.5 *Jestliže*

$$P'_y = Q'_x,$$

pak

$$\int_C P dx + Q dy$$

je nezávislý na cestě a naopak.

Vypočteme křivkový integrál pro tento případ:

$$\begin{aligned} I &= \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt = \\ &= \int_a^b [U(x(t), y(t))]'_t dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = \\ &= U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} U'_x(x, y) = P(x, y) &\implies U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + U(x_0, y), \\ U'_y(x, y) = Q(x, y) &\implies U(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + U(x, y_0) \end{aligned}$$

a následně

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + U(x_0, y_0).$$

Tedy

$$I = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y) dy.$$

16. Greenova věta

Nechť C je po částech hladká jednoduchá uzavřená křivka, která ohraničuje oblast D v rovině. Předpokládejme, že funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou spojité a mají na D spojité parciální derivace prvního řádu. Pak

$$\int_{C^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy.$$

Kladný směr (proti směru hodinových ručiček) podél C je směr určený parametrizací $r(t)$ křivky C takový, že oblast D zůstává vlevo a bod $r(t)$ kopíruje hranici křivky C . Opačný směr nazýváme záporný (po směru hodinových ručiček)

17. Důsledek Greenovy věty

Plocha A oblasti D ohraničená po částech hladkou jednoduchou uzavřenou křivkou C je dána vzorcem

$$A = \frac{1}{2} \int_{C^+} (-y dx + x dy) = - \int_{C^+} y dx = \int_{C^+} x dy.$$

Důkaz. Pro $P(x, y) \equiv -y, Q(x, y) \equiv 0$ dává Greenova věta

$$- \int_{C^+} y dx = \iint_D dx dy = A;$$

podobně pro $P(x, y) \equiv 0, Q(x, y) \equiv x$ máme

$$\int_{C^+} x dy = \iint_D dx dy = A.$$

Součet těchto výsledků dává třetí vztah.

18. Obsah plochy

Parametrická plocha S je obrazem vektoru

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

kde $(u, v) \in D$. Nechť $u = C$ (tj. u je pevná konstanta C) Definujme vektor

$$\vec{S}_v = \vec{r}(C, v + \Delta v) - \vec{r}(C, v)$$

a definujme vektor \vec{T}_v jako limitu:

$$\vec{T}_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\vec{S}_v}{\Delta v}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \vec{T}_v &= \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} [(x(C, v + \Delta v) - x(C, v), y(C, v + \Delta v) - y(C, v), z(C, v + \Delta v) - z(C, v))] \end{aligned}$$

a následně

$$\vec{T}_v = (x'_v(C, v), y'_v(C, v), z'_v(C, v)) \equiv \vec{r}_v.$$

Tedy

$$\vec{T}_v = \vec{r}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$$

a analogicky

$$\vec{T}_u = \vec{r}_u = (x'_u, y'_u, z'_u).$$

Nyní chceme *definovat obsah parametricky zadané plochy*. Začneme vnitřním rozdělením D do obdélníků D_1, D_2, \dots, D_n , z nichž každý má rozměry Δu a Δv . Nechť (u_i, v_i) je levý dolní roh D_i . Obraz S_i oblasti D_i pod \vec{r} obecně nebude obdélník v prostoru xyz .

Bude vypadat spíše jako objekt, jehož hranicemi jsou křivky na ploše S s $\vec{r}(u_i, v_i)$ jako jedním z *uzlů*. Nechť ΔS_i označuje plochu tohoto křivostěnného objektu S_i . Parametrické křivky $\vec{r}(u, v_i)$ a $\vec{r}(u_i, v)$ - po řadě s parametry u a v - leží na ploše S a setkávají se v bodě $\vec{r}(u_i, v_i)$. V průsečíku mají tyto dvě křivky tečné vektory $\vec{r}_u(u_i, v_i)$ a $\vec{r}_v(u_i, v_i)$. Tedy jejich vektorový součet

$$\vec{N}(u_i, v_i) = \vec{r}_u(u_i, v_i) \times \vec{r}_v(u_i, v_i)$$

je normálový vektor k S v bodě $\vec{r}(u_i, v_i)$. Nyní předpokládejme, že Δu a Δv jsou malé. Potom plocha ΔS_i křivostěnného objektu S_i bude přibližně rovna ploše ΔP_i přilehlého rovnoběžníku se stranami $\vec{r}_u(u_i, v_i)\Delta u$ a $\vec{r}_v(u_i, v_i)\Delta v$ (protože $\vec{S}_v \approx \vec{T}_v\Delta v = \vec{r}_v\Delta v$ a analogicky $\vec{S}_u \approx \vec{T}_u\Delta u = \vec{r}_u\Delta u$). Avšak plocha tohoto rovnoběžníka je

$$\Delta P_i = |\vec{r}_v\Delta v \times \vec{r}_u\Delta u| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\Delta u \Delta v = |\vec{N}(u_i, v_i)| \cdot \Delta u \Delta v.$$

To znamená, že obsah $a(S)$ plochy S je přibližně dán vztahem

$$a(S) = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta P_i = \sum_{i=1}^n |\vec{N}(u_i, v_i)| \cdot \Delta u \Delta v.$$

Tento poslední součet je Riemannův součet pro dvojný integrál

$$\iint_D |\vec{N}(u, v)| \, du \, dv.$$

Máme tedy motivaci pro definici obsahu A plochy A parametrické plochy S jako

$$A = a(S) = \iint_D |\vec{N}(u, v)| \, du \, dv = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv.$$

19. Obsah plochy v pravoúhlých souřadnicích

Pro plochu $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ dosadíme $u = x$ and $v = y$. Pak

$$\vec{T}_x = (1, 0, f'_x(x, y)),$$

$$\vec{T}_y = (0, 1, f'_y(x, y))$$

a

$$\vec{N} = \vec{T}_x \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x, y) \\ 0 & 1 & f'_y(x, y) \end{vmatrix} = -f'_x(x, y)\vec{i} - f'_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}$$

a

$$A = a(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \, dx \, dy.$$

Příklad 118 Najděme obsah elipsy, která je řezem válce $x^2 + y^2 = 1$ rovinou $z = 2x + 2y + 1$.

Řešení. Pomocí výše uvedeného vztahu dostáváme

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4 + 4} \, dx \, dy = \iint_D 3 \, dx \, dy = 3 \iint_D dx \, dy = 3\pi.$$

20. Plošné integrály

a) První typ plošných integrálů

Definice 121 Plošný integrál prvního typu funkce $f(x, y, z)$ na ploše S je definován jako

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{N}(u, v)| du dv =$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1, j=1}^{n, m} f(\vec{r}(u_i, v_j)) |\vec{N}(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j.$$

(Všimněme si, že $\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.)

Jestliže je plocha S popsána rovnicí $z = h(x, y)$ pro $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, můžeme použít x a y jako parametry (spíše než u a v). V tom případě položíme $u = x, v = y$,

$$\vec{r}_u = \vec{r}_x = (1, 0, h'_x(x, y)),$$

$$\vec{r}_v = \vec{r}_y = (0, 1, h'_y(x, y)),$$

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & h'_x(x, y) \\ 0 & 1 & h'_y(x, y) \end{vmatrix} \right| = | -\vec{i}h'_x(x, y) - \vec{j}h'_y(x, y) + \vec{k} | =$$

$$= \sqrt{1 + (h'_x(x, y))^2 + (h'_y(x, y))^2}$$

a

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + (h'_x(x, y))^2 + (h'_y(x, y))^2} dx dy.$$

b) Druhý typ plošných integrálů

Plošný integrál $\iint_S f(x, y, z) dS$ je analogický křivkovému integrálu $\int_C f(x, y) ds$. Existuje také druhý typ plošného integrálu, který je analogický křivkovému integrálu typu $\int_C P dx + D dy$. Pro definici plošného integrálu

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy$$

s $dx dy$ místo dS nahradíme obsah ΔP_i v definici plošného integrálu prvního typu jeho projekcí do roviny xy . Abychom viděli, čeho tím dosáhneme, uvažujme normálový vektor k S

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma.$$

Protože

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

tj.

$$\vec{N} = \vec{i} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \vec{j} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \vec{k} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

složky jednotkového normálového vektoru \vec{n} jsou

$$\cos \alpha = \frac{1}{|\vec{N}|} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \cos \beta = \frac{1}{|\vec{N}|} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{|\vec{N}|} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Pak

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv,$$

kde

$$dS = |\vec{N}(u, v)| dudv = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dudv.$$

Podobně definujeme

$$\iint_S f(x, y, z) dy dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \alpha dS = \iint_S f(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv$$

a

$$\iint_S f(x, y, z) dz dx = \iint_S f(x, y, z) \cos \beta dS = \iint_S f(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Obecný plošný integrál druhého typu je definován jako součet

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS = \\ & = \iint_D \left(P(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv. \end{aligned}$$

Zde $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ a $R(x, y, z)$ jsou spojitě funkce x, y a z .

Předpokládejme, že S je plocha $z = h(x, y)$, $(x, y) \in D$. Potom můžeme položit $u = x, y = v$ a

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & z'_x(x, y) \\ 1 & z'_y(x, y) \end{vmatrix} = -h'_x(x, y), \\ \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} z'_x(x, y) & 1 \\ z'_y(x, y) & 0 \end{vmatrix} = -h'_y(x, y), \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_D (-P(x, y, h(x, y))h'_x - Q(x, y, h(x, y))h'_y + R(x, y, h(x, y))) dx dy. \end{aligned}$$

21. Věta o divergenci

(Gaussova–Ostrogradského věta)

Předpokládejme, že S je uzavřená po částech hladká plocha, která ohraničuje v prostoru oblast ω . Nechť

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

je vektorový prostor se složenými funkcemi, které mají spojité parciální derivace prvního řádu na ω . Nechť \vec{n} je *vnější* jednotkový normální vektor k S . Potom **větu o divergenci** (neboli tzv. **Gaussova - Ostrogradského větu**) vyjádříme pomocí vzorce

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV. \quad (12.1.3)$$

Let us recall that $dV = dx dy dz$,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

a definujeme tzv. **divergenci** vektorového prostoru \vec{F} :

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = P'_x(x, y, z) + Q'_y(x, y, z) + R'_z(x, y, z).$$

Vyjádříme vnější jednotkový vektor \vec{n} jako

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Potom větu o divergenci (12.1.3) můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS &= \\ = \iiint_{\omega} [P'_x(x, y, z) + Q'_y(x, y, z) + R'_z(x, y, z)] dx dy dz, \end{aligned}$$

nebo ve tvaru

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \\ = \iiint_{\omega} [P'_x(x, y, z) + Q'_y(x, y, z) + R'_z(x, y, z)] dx dy dz. \end{aligned}$$

22. Stokeova věta

Definice 122 *Orientovaná plocha je plocha spolu s vybraným spojitým jednotkovým normálním vektorovým prostorem \vec{n} . **Kladná orientace** hranice C orientované plochy S odpovídá jednotkovému tečnému vektoru \vec{T} takovému, že $\vec{n} \times \vec{T}$ vždy ukazuje do S . Přesvědčte se, že pro rovinnou oblast s jednotkovým normálním vektorem \vec{k} je kladná orientace vnější hranice orientace proti směru hodinových ručiček.*

Věta 12.1.6 *Nechť S je orientovaná, omezená a po částech hladká plocha v prostoru s pozitivně orientovanou hranicí. Předpokládejme, že složky vektorového prostoru $\vec{F}(x, y, z)$ mají spojité parciální derivace prvního řádu v oblasti prostoru, která obsahuje S . Pak*

$$\oint_{L^+} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad (12.1.4)$$

kde L je hraniční křivka S .

Všimněte si, že $\text{curl } \vec{F}$ (or $\text{rot } \vec{F}$) se nazývá *rotace* vektoru \vec{F} vypočítáme ji podle vzorce

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k}. \end{aligned}$$

Protože můžeme vyjádřit

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

a

$$\begin{aligned} \vec{T} ds &= \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz, \\ \vec{F} &= P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \end{aligned}$$

vzorec (12.1.4) lze přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{L^+} P dx + Q dy + R dz = \\ \iint_S (R'_y - Q'_z) dydz + (P'_z - R'_x) dzdx + (Q'_x - P'_y) dxdy. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] Al-Chorezmi Muchammad ibn Músa: *Matematiceskyje traktaty*, Taškent, 1983
- [2] L.Bican: *Lineární algebra*, SNTL 1979, rozšířené vydání 2001
- [3] G.Birkhoff, T.C.Bartee: *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava 1981
- [4] G.Birkhoff, S.MacLane: *Algebra*, Alfa, Bratislava 1973
- [5] G.Birkhoff, S.MacLane: *Prehľad modernej algebry*, Alfa, Bratislava 1979
- [6] A.N.Bogoljubov: *Matěmatiki i mehaniki*, Naukova dumka, Kyjev, 1983
- [7] M.Demlová, J.Nagy: *Algebra*, MVŠT —III, SNTL 1982
- [8] Diofant: *Arifmetika*, Nauka, Moskva 1974
- [9] L.I.Golovina: *Linějnaja algebra i někatorie jijo priloženija*, Nauka, Moskva 1979
- [10] V.Havel, J.Holenda: *Linaární algebra*, SNTL 1984
- [11] Z.Horský: *Množiny a matematické struktury*, MVŠT — I, SNTL 1980
- [12] Z.Horský: *Vektorové prostory*, MVŠT — II, SNTL 1980
- [13] B.Hrůza, H.Mrhačová: *Cvičení z algebry a geometrie*, VUT, 1990
- [14] P.Kaprálík, J.Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislava, 1987
- [15] Vl. Kořínek: *Základy algebry*, Nakladatelství ČS AV, Praha, 1956
- [16] L.Kučera, J.Nešetřil: *Algebraické metody diskretní matematiky*, SNTL, Praha 1988
- [17] S.Míka: *Numerické metody algebry*, MVŠT — IV, SNTL 1982
- [18] T.šalát: *Metrické priestory*, Alfa, Bratislava 1981