

# Určitý integrál

Lenka Baráková

19. srpna 2005

# Obsah

$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ . . . . .	3
$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ . . . . .	14
$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ . . . . .	16
$\int_1^2 x \ln x dx$ . . . . .	24
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ . . . . .	32

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$$

Počítáme určitý integrál z polynomu na intervalu  $\langle -2, 1 \rangle$ . Polynom je spojitá funkce na celém  $\mathbb{R}$ , proto můžeme k výpočtu použít Newton-Leibnitzovu větu.

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[ 3\frac{x^3}{3} \right]$$

Najdeme primitivní funkci k danému polynomu.

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1$$

Najdeme primitivní funkci k danému polynomu

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1$$

a zapíšeme ji do hranatých závorek s dolní a horní mezí intervalu. Tento zápis značí odčítání  $F(1) - F(-2)$ . Integrační konstantu nemusíme psát, protože by se v rozdílu stejně odečetla.

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[ x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1$$

Před dosazováním upravíme.

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[ x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1$$
$$= 1 + 1 - 9$$

Dosadíme do primitivní funkce horní mez

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx &= \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[ x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1 \\ &= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18)\end{aligned}$$

a odečteme hodnotu v dolní mezi.

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx &= \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[ x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1 \\ &= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18) = -7 - 14 = -21\end{aligned}$$

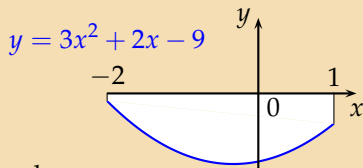
Dostali jsme výsledek, kterým je vždy číslo, protože představuje obsah plochy pod křivkou  $y = 3x^2 + 2x - 9$ .

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx &= \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[ x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1 \\ &= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18) = -7 - 14 = -21\end{aligned}$$

Proč je určitý integrál **záporný**?

Najděte  $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$ .



Graf funkce je pod osou  $x$ ,

proto v integrálním součtu  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  je  $f(\xi_i)$  záporné číslo. Integrální součet je tedy záporný a také jeho limita – určitý integrál – je záporné číslo. Obsah útvaru omezeného osou  $x$  a křivkou na daném intervalu je tedy absolutní hodnota určitého integrálu:  $S = 21$ .

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

Najděte  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

Funkce není na intervalu spojitá, jelikož v bodě 0 není definovaná.  
Určitý integrál neexistuje.

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$$

Funkce není definovaná a spojitá v bodech, kde je jmenovatel nulový:  $x^2 - 4 = 0$ . Není tedy definovaná v bodech 2 a  $-2$ . Na celém intervalu  $\langle 3, 7 \rangle$  je tedy funkce definovaná a spojitá, můžeme proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx =$$

Jde o ryze lomenou funkci. V čitateli vytvoříme derivaci jmenovatele  
 $(x^2 - 4)' = 2x$ .

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7$$

Použijeme vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45\end{aligned}$$

Dosadíme horní mez:  $7^2 - 4 = 45$

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45 - \frac{1}{2} \ln 5\end{aligned}$$

a dolní mez:  $3^2 - 4 = 5$

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln 9\end{aligned}$$

Při úpravě použijeme vzorec pro práci s logaritmy:

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Najděte  $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3\end{aligned}$$

a další vzorec  $a \ln b = \ln b^a$ .

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce. Tyto funkce jsou na intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$  spojité. Použijeme Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} =$$

Primitivní funkci hledáme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde  $u = \ln x$  a  $v' = x$ .

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

Primitivní funkci hledáme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde  $u = \ln x$  a  $v' = x$ . První část vzorce  $u \cdot v$  už je součástí primitivní funkce, proto ji musíme zapsat do **hranatých závorek**. Druhá část je **určitý integrál**, musíme tedy psát meze.

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$

Dosadíme horní mez a odečteme hodnotu v dolní mezi.

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

Najdeme primitivní funkci.

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}} = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$
$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{2} \right)$$

Dosadíme.

Najděte  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$
$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Upravíme.

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Funkce je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , tedy i na intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Můžeme použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\sin x = t$$

Primitivní funkci nalezneme pomocí substituce  $t = \sin x$ , protože jde o funkci goniometrickou typu  $R(\sin x) \cos x$ .

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

Diferencujeme.

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \int t^2 \, dt$$

Dosadíme.

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_0^1 t^2 \, dt$$

Pro původní proměnnou  $x$  integrujeme na intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Při přechodu k proměnné  $t$  musíme spolu s proměnnou  $x$  změnit i její interval integrace, protože  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

Integrujeme v proměnné  $t$ .

Najděte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Dosadíme meze proměnné  $t$ . Získáváme tedy výsledek aniž bychom se vraceli k původní proměnné.

KONEC