

# Průběh funkce

Lenka Baráková

13. září 2005

# Obsah

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ .....	3
$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$ .....	43
$y = \ln \left( \frac{x^2}{x + 2} \right)$ .....	91
$y = (x + 1)e^x$ .....	152

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x$$

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R};$$

Definiční obor je celá množina  $\mathbb{R}$ .

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

$$f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 5(-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x \neq \pm f(x)$$

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

Dosadíme  $x = 0$  do předpisu funkce  $f(x)$  a dostaneme průsečík s osou  $y$ .

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

Řešením rovnice  $y = 0$  dostaneme průsečík s osou  $x$ .

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

Vytkneme  $x$ . Součin je roven nule právě tehdy, když některý z činitelů je roven nule. Červený činitel dává triviální řešení, zelený činitel vede na kvadratickou rovnici.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

Kvadratická rovnice  $x^2 + 4x + 5 = 0$  nemá reálné řešení, protože diskriminant je záporný:  $D = 16 - 20$ .

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

Průsečík s osou  $x$  je jediný:  $x = 0$ .

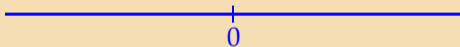
$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$



Na osu  $x$  zaneseme průsečík. Nemáme žádné body nespojitosti.

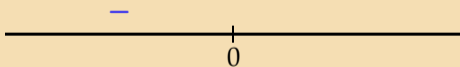
$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$



$$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2 < 0$$

Funkční hodnota  $f(-1)$  je záporná a protože se znaménko na intervalu  $(-\infty, 0)$  nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x$$

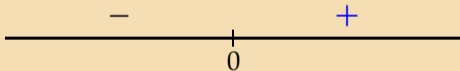
$D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$



$$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2 < 0$$

$$f(1) = 10 > 0$$

Funkce je kladná v  $x = 1$ , tedy také na  $(0, \infty)$ .

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

Vypočteme limity v  $\pm\infty$ . Začneme limitou v  $+\infty$ . Protože platí  $\infty + \infty = \infty$ , je výsledek zřejmý.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x$$

Pro  $-\infty$  není výsledek na první pohled vidět, protože dostáváme neurčitý výraz  $\infty - \infty$ .

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$$

Vytkneme-li nejvyšší mocninu  $x^3$ , dostáváme

$$x^3 + 4x^2 + 5x = x^3 \left( 1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right),$$

kde druhý činitel konverguje k jedné. Obecně tedy platí pravidlo, že u polynomu (i racionální lomené funkce) se chování v nevlastních bodech nemění, jestliže zanedbáme členy s nižšími mocninami.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

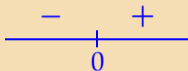
Asymptota bez směrnice neexistuje, protože je funkce definovaná na celém  $\mathbb{R}$ . Asymptota se směrnicí také neexistuje, protože

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + 4x + 5 = \infty.$$

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty$ ;

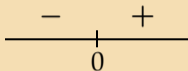


Chování asymptot samozřejmě koresponduje se znaménky na obou stranách.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$ ,  $f(-\infty) = -\infty$ ;



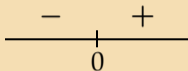
$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)'$$

Vyšetříme chování derivace.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty$ ;



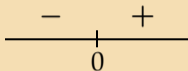
$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

Derivujeme každý člen zvlášť.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$ ,  $f(-\infty) = -\infty$ ;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

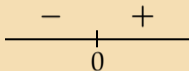
$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

Hledáme stacionární body, proto položíme derivaci rovnu nule.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$ ,  $f(-\infty) = -\infty$ ;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

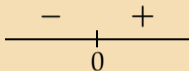
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$ ,  $f(-\infty) = -\infty$ ;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$$

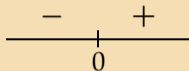
$$x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = -1$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

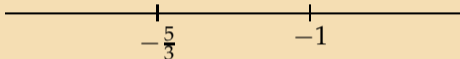
$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$



$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



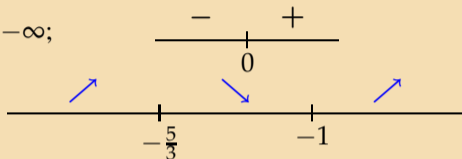
Na reálnou osu zaneseme stacionární body. Nemáme žádné body nespojitosti.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

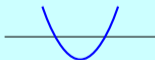
průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



Graf derivace je parabola:

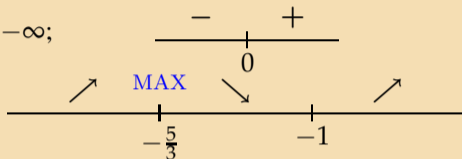


$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

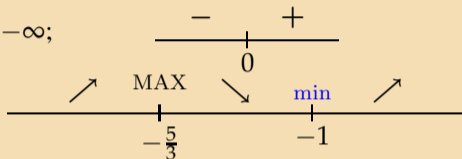
Ve stacionárním bodě  $x = -\frac{5}{3}$  nastává lokální maximum. Dopočteme v tomto bodě funkční hodnotu.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

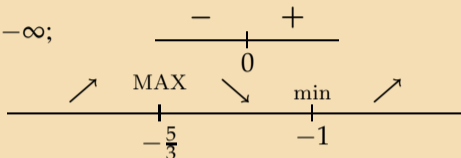
Ve stacionárním bodě  $x = -1$  nastává lokální minimum. Dopočteme v tomto bodě funkční hodnotu.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8$$

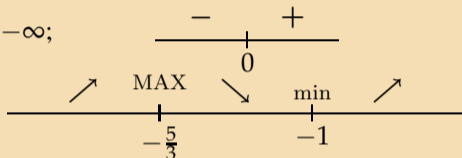
Spočteme druhou derivaci a vyšetříme její chování.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8$$

$$6x + 8 = 0$$

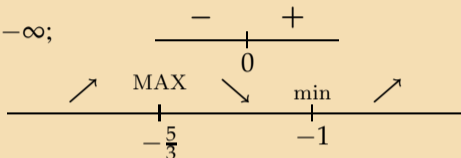
Položíme druhou derivaci nule.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

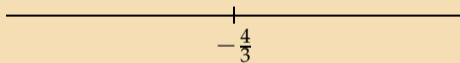
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



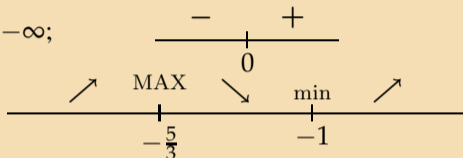
Nakreslíme reálnou osu s kritickým bodem. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v inflexním bodě.

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

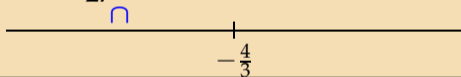
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



Funkce ke na intervalu  $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$  konkávní, protože

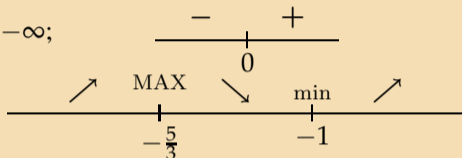
$$-2 \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \quad \text{a} \quad y''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4 < 0.$$

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

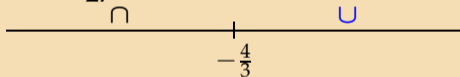
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



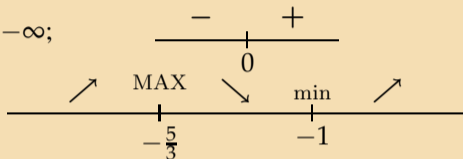
Funkce je konvexní na intervalu  $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$ , protože  $0 \in \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$  a  $y''(0) = 8 > 0$ .

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ ani sudá ani lichá, není periodická}$$

průsečík s osou  $y$  je  $[0, 0]$

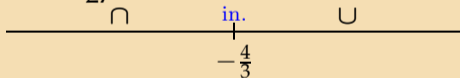
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = -\infty;$$

$$y' = 3x^2 + 8x + 5;$$



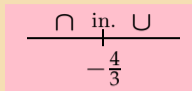
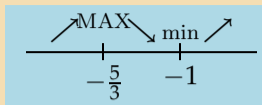
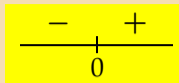
$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \quad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8;$$



$$f(-4/3) = -\frac{52}{27}$$

Bod  $x = -\frac{4}{3}$  je tedy inflexní. Spočteme jeho funkční hodnotu.



$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

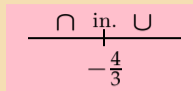
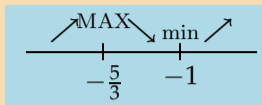
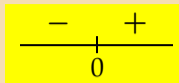
$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Shrňeme dosažené výpočty.



$$f(0) = 0$$

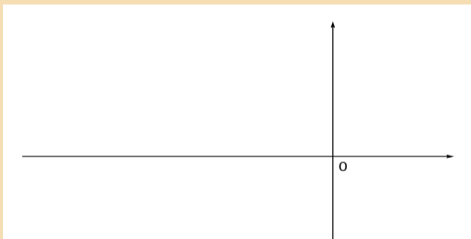
$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = -\infty$$

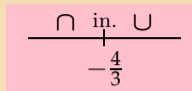
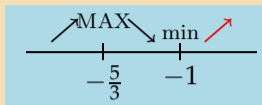
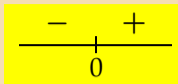
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Nakreslíme souřadný systém.



$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

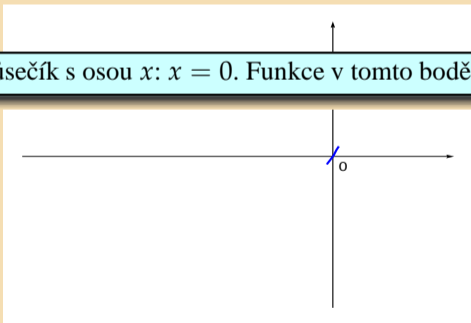
$$f(-\infty) = -\infty$$

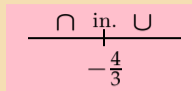
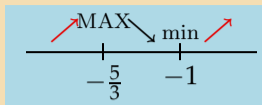
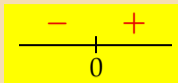
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Označíme průsečík s osou  $x$ :  $x = 0$ . Funkce v tomto bodě roste.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

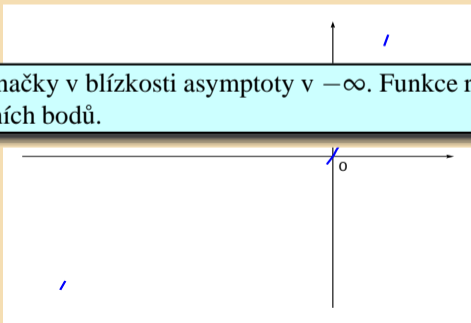
$$f(-\infty) = -\infty$$

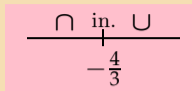
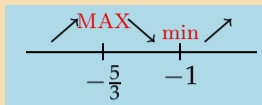
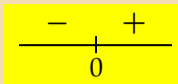
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme značky v blízkosti asymptoty v  $-\infty$ . Funkce roste v okolí obou nevlastních bodů.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

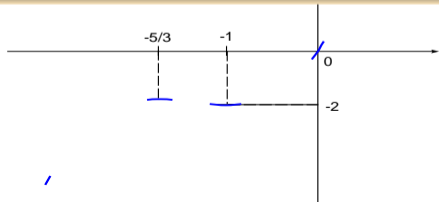
$$f(-\infty) = -\infty$$

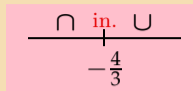
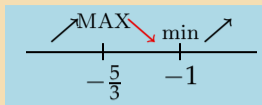
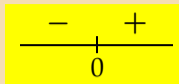
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme lokální minimum a maximum.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

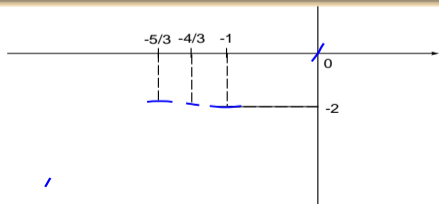
$$f(-\infty) = -\infty$$

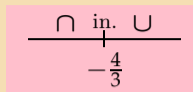
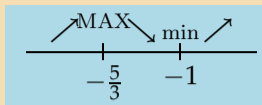
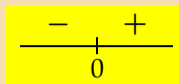
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme inflexní bod. Funkce v něm klesá.





$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \infty$$

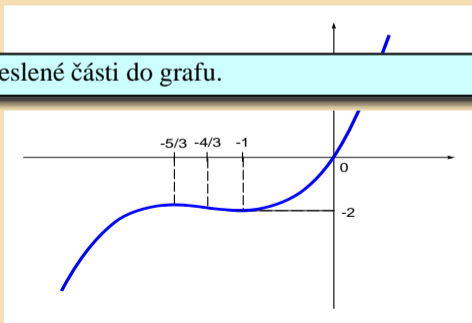
$$f(-\infty) = -\infty$$

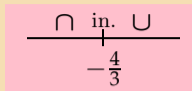
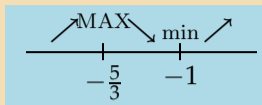
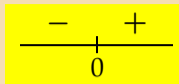
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Spojíme nakreslené části do grafu.





$$f(0) = 0$$

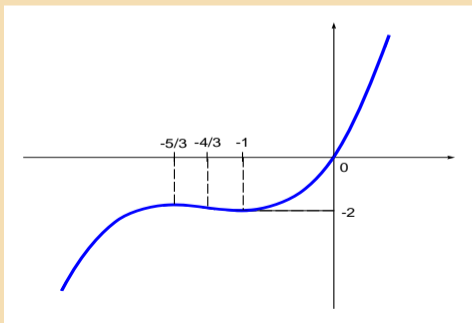
$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

Určíme definiční obor z podmínky

$$x - 1 \neq 0.$$

Platí

$$x \neq 1.$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

$$y(0) = \frac{2(0 - 0 + 1)}{(0 - 1)^2} = 2$$

- Určíme průsečík s osou  $y$ .
- Dosadíme  $x = 0$  a hledáme  $y(0)$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2,$$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = 0$$

- Určíme průsečík s osou  $x$ .
- Dosadíme  $y = 0$  a řešíme rovnici

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2,$$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Čitatel musí být nula.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $y(0) = 2$ , není průs. s osou  $x$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = 0$$

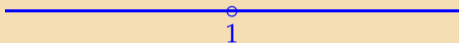
$$x^2 - x + 1 = 0$$

Tato kvadratická rovnice nemá řešení, protože má záporný diskriminant.

$$D = b^2 - 4ac = 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -2 < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

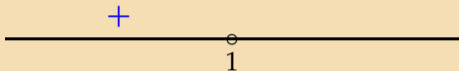
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $y(0) = 2$ , není průs. s osou  $x$



Nakreslíme osu  $x$  a bod nespojitosti  $x = 1$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

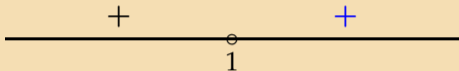
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $y(0) = 2$ , není průs. s osou  $x$



Víme, že  $y(0) = 2 > 0$ . Funkce je kladná na  $(-\infty, 1)$ .

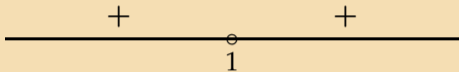
$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $y(0) = 2$ , není průs. s osou  $x$



Vypočteme  $y(2) = \frac{2(4 - 2 + 1)}{(2 - 1)^2} > 0$ . Funkce je kladná na  $(1, \infty)$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

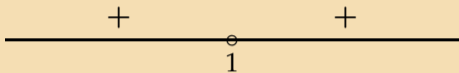


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

Určíme jednostranné limity v bodě nespojitosti

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

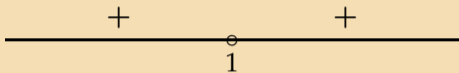


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

Dosadíme  $x = 1$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

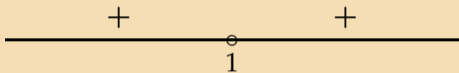


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

Jmenovatel je v obou případech kladné číslo.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$



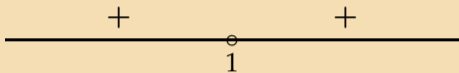
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

Určíme limity v  $\pm\infty$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$



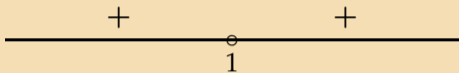
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} =$$

Uvažujeme jenom vedoucí členy.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Funkce má limitu v  $\pm\infty$ . Přímka  $y = 2$  je asymptotou ke grafu v  $\pm\infty$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$y' = 2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)'$$

Vypo\u010dteme derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \end{aligned}$$

- U\u017eijeme vzorec pro derivaci pod\u00edlu.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .
- U\u017eijeme vzorec pro derivaci slo\u017een\u00e9 funkce p\u0159i derivov\u00e1n\u00ed v\u00fdrazu  $(x - 1)^2$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

Vytkneme  $(x - 1)$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \\ &= 2 \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Roznásobíme závorky a zkrátíme  $(x - 1)$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \\ &= 2 \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^3} \\ &= 2 \frac{-x - 1}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} \right)' \\ &= 2 \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x - 1)(1 - 0)}{((x - 1)^2)^2} \\ &= 2(x - 1) \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)2}{(x - 1)^4} \\ &= 2 \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^3} \\ &= 2 \frac{-x - 1}{(x - 1)^3} = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $y(0) = 2$ , není průs. s osou  $x$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3},$$

$$-2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3} = 0$$

Řešíme rovnici  $y' = 0$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $y(0) = 2$ , není průs. s osou  $x$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3},$$

$$-2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3} = 0$$

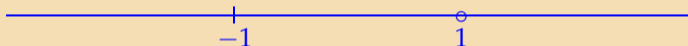
$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Čitatel musí být nula. Stacionárním bodem je tedy  $x = -1$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1$$



Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1$$

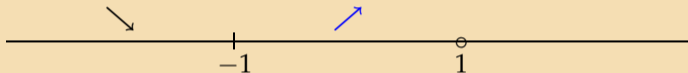


Určíme  $y'(-2)$ .

$$y'(-2) = -2 \frac{-2 + 1}{(-2 - 1)^3} = -2 \frac{\text{záporná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1$$

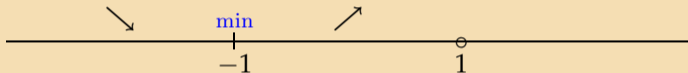


Určíme  $y'(0)$ .

$$y'(0) = -2 \frac{0 + 1}{(0 - 1)^3} = -2 \frac{\text{kladná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} > 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

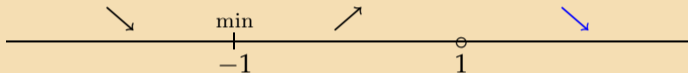


Lokální minimum pro  $x = -1$ . Funkční hodnota je

$$y(-1) = \frac{2((-1)^2 - (-1) + 1)}{(-1 - 1)^2} = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$



$$y'(2) = -2 \frac{2 + 1}{(2 - 1)^3} = -2 \frac{3}{1} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = -2 \left( \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)'$$

Vypočteme druhou derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left( \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \end{aligned}$$

- Použijeme pravidlo pro derivaci podílu.
- Jmenovatel budeme derivovat jako složenou funkci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left( \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \\ &= -2(x - 1)^2 \frac{(x - 1) - (x + 1)3}{(x - 1)^6} \end{aligned}$$

Vytkneme  $(x - 1)^2$  v čitateli.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left( \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \\ &= -2(x - 1)^2 \frac{(x - 1) - (x + 1)3}{(x - 1)^6} \\ &= -2 \frac{-2x - 4}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

Upravíme.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \left( \frac{x + 1}{(x - 1)^3} \right)' \\ &= -2 \frac{1(x - 1)^3 - (x + 1)3(x - 1)^2(1 - 0)}{((x - 1)^3)^2} \\ &= -2(x - 1)^2 \frac{(x - 1) - (x + 1)3}{(x - 1)^6} \\ &= -2 \frac{-2x - 4}{(x - 1)^4} = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

Obdrželi jsme druhou derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4},$$

$$4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4} = 0$$

Řešíme  $y'' = 0$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

$$4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4} = 0$$

$$x + 2 = 0$$

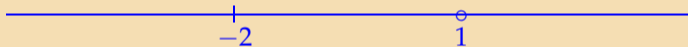
$$x = -2$$

Jediné řešení je  $x = -2$ .

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není pr\u016fs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

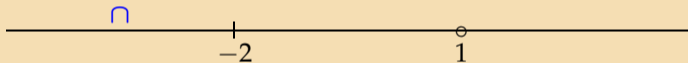


Ur\u010dme intervaly konvexnosti a konkavity.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

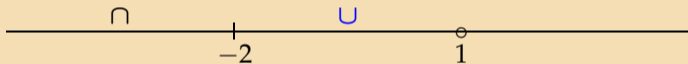


$$y''(-3) = 4 \frac{-3 + 2}{\text{kladná hodnota}} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

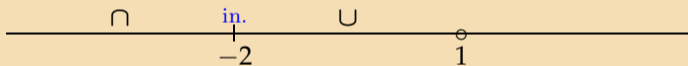


$$y''(0) = 4 \frac{0 + 2}{\text{kladná hodnota}} > 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$



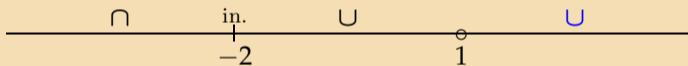
Inflexní bod v bodě  $x = -2$ . Funkční hodnota je

$$y(-2) = \frac{14}{9}.$$

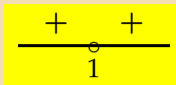
$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

$$y' = -2 \frac{x + 1}{(x - 1)^3}, x_1 = -1 \dots \text{lok. minimum}, y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4 \frac{x + 2}{(x - 1)^4}, x_2 = -2$$

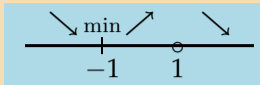


$$y''(2) = 4 \frac{2 + 1}{\text{kladná hodnota}} > 0$$



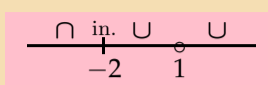
$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$



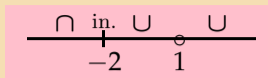
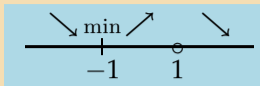
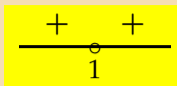
$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$



$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

Shrneme dosavadní znalosti.



$$f(0) = 2$$

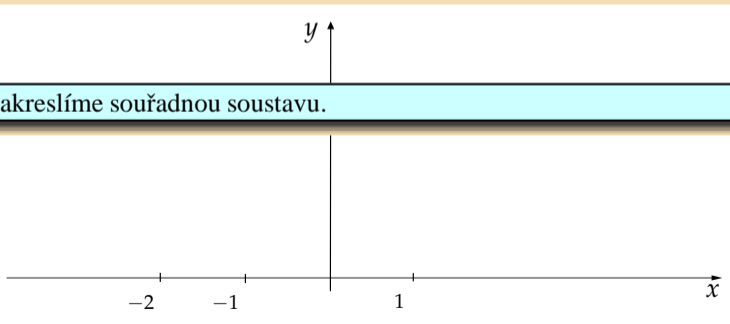
$$f(\pm\infty) = 2$$

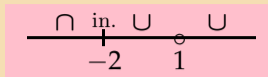
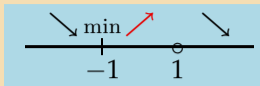
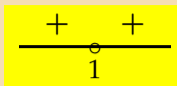
$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

Nakreslíme souřadnou soustavu.





$$f(0) = 2$$

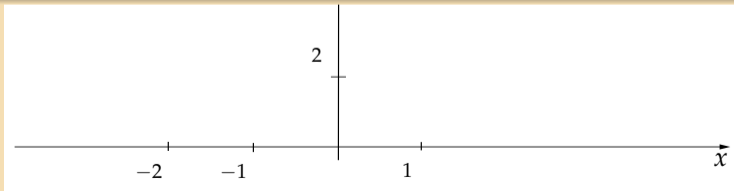
$$f(\pm\infty) = 2$$

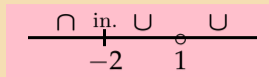
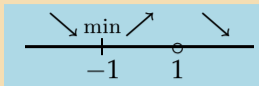
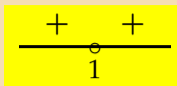
$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

Vyznačíme průsečík s osou  $y$ .





$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

$y$

Funkce v tomto bodě roste.

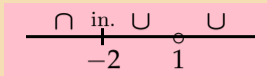
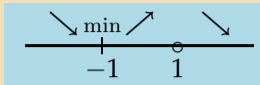
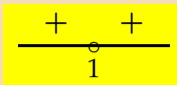
2

-2

-1

1

$x$



$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

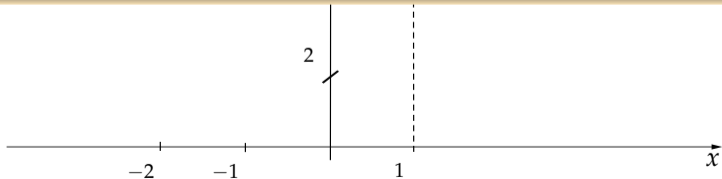
$$f(1\pm) = +\infty$$

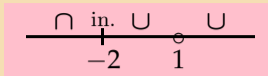
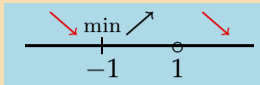
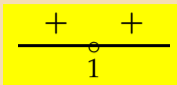
$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



Nakreslíme funkci v okolí svislé asymptoty.





$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

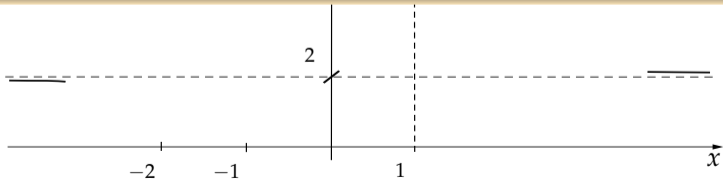
$$f(1\pm) = +\infty$$

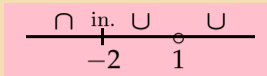
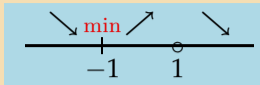
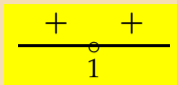
$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



Nakreslíme funkci v okolí vodorovné asymptoty.





$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

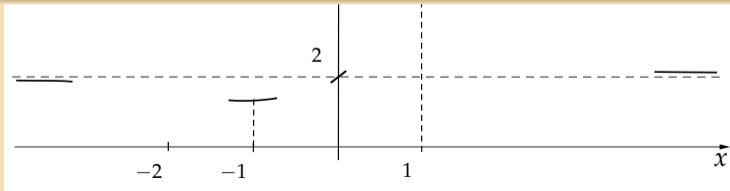
$$f(1\pm) = +\infty$$

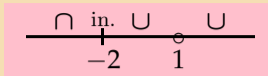
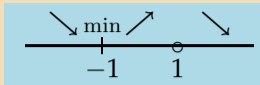
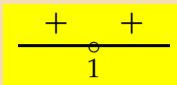
$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



Nakreslíme lokální minimum funkce.





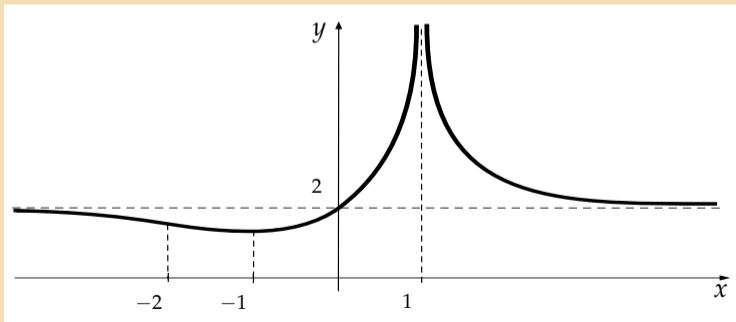
$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty);$$

Funkce  $y(x)$  je definována pro  $x + 2 \neq 0$  a  $\frac{x^2}{x+2} > 0$ .

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

Plyne z nesymetričnosti definičního oboru.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0$$

Hledáme průsečíky s osou  $x$ .

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0$$

Položíme funkci  $y(x)$  rovnu 0 .

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

Odlogaritmováním dostaneme kvadratickou rovnici.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

Vynásobíme jmenovatelem  $x + 2$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

a převedeme na levou stranu.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_1 = 2 \in D(f)$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

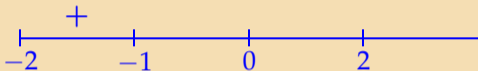
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_1 = 2 \in D(f)$$

$$x_2 = -1 \in D(f)$$

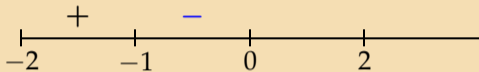
Oba leží v definičním oboru funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$



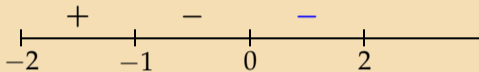
Na reálnou osu nanese se nulové body a body, kde funkce není definována

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

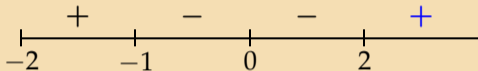
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

Vypočítejte limitu funkce v  $+\infty$

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

Podle věty o limitě složené funkce zaměníme pořadí limity a logaritmu.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1}$$

Pro řešení limity použijeme např. L'Hospitalovo pravidlo.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

Funkce  $\ln x$  pro  $x \rightarrow \infty$  diverguje.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce na levém okraji definičního oboru určíme výpočtem limity funkce v bodě  $-2$  zprava.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{x+2}$$

částečně dosadíme a

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2} \\ &= \left\| \frac{4}{0+} \right\| \end{aligned}$$

dostáváme limitu typu  $\left\| \frac{4}{0+} \right\|$ ,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2} \\ &= \left\| \frac{4}{0+} \right\| = \infty \end{aligned}$$

což je nekonečno.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0^+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce v okolí dalšího nedefinovaného bodu 0 určíme výpočtem limity funkce v bodě 0 zprava a zleva.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2} \\ &= \left\| \frac{4}{0+} \right\| = \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{x^2}{2}$$

částečně dosadíme a

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2} \\ &= \left\| \frac{4}{0+} \right\| = \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{x^2}{2} = \ln \left\| \frac{0+}{2} \right\|$$

v obou případech dostáváme typ  $\left\| \frac{0+}{2} \right\|$ ,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{4}{x+2} \\ &= \left\| \frac{4}{0+} \right\| = \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0\pm} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow 0\pm} \frac{x^2}{2} = \ln \left\| \frac{0+}{2} \right\| = -\infty$$

proto lze dosadit do logaritmu, který je definován pouze pro pravé okolí nuly.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

Funkce  $y(x)$  je složená, proto nejdříve derivujeme vnější složku

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

a násobíme derivací vnitřní složky. Tu derivujeme jako podíl.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \end{aligned}$$

Zelené části se zkrátí,

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \end{aligned}$$

v čitateli vytkneme  $x$

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \\ &= \frac{x+4}{x(x+2)} \end{aligned}$$

a zkrátíme.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

Hledáme stacionární body.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

Dosadíme vypočtenou derivaci funkce.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

$$x+4 = 0$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čítenel.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

$$x+4 = 0$$

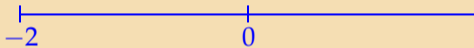
$$x = -4 \notin D(f)$$

Vypočtená hodnota neleží v definičním oboru funkce, proto funkce nemá žádný stacionární bod.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

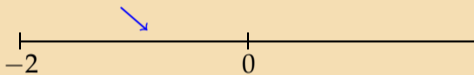


Znaménko derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

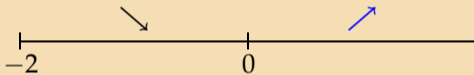


Do červeně označené derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že zde funkce roste, záporné, že klesá.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$



Do červeně označené derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že zde funkce roste, záporné, že klesá.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y'' = \left( \frac{x+4}{x(x+2)} \right)'$$

Druhou derivaci dostaneme derivací první,

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \frac{x+4}{x(x+2)} \right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

kterou derivujeme jako podíl.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \frac{x+4}{x(x+2)} \right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

V čitateli nelze nic vytknout, proto jej roznásobíme

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \frac{x+4}{x(x+2)} \right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \\ &= -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

a příslušné mocniny sečteme.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

Hledáme inflexní body.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

Dosadíme vypočtenou druhou derivaci funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čítenel.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny kvadratické rovnice.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$$

Upravíme.

$$y = \ln \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$x_1$  není inflexní bod, protože neleží v definičním oboru funkce,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

$x_2$  leží v definičním oboru funkce.

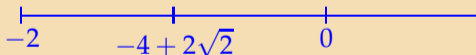
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



Znaménko druhé derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována a v bodě  $x_2$ .

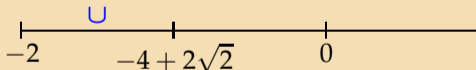
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



Do červeně označené druhé derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že je zde funkce konvexní, záporné, že je konkávní.

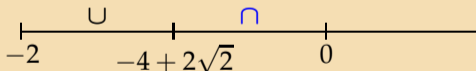
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



funkce se v  $x_2$  mění z konvexní na konkávní,

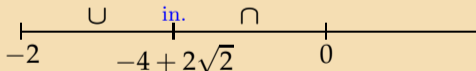
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



$x_2$  je proto inflexním bodem,

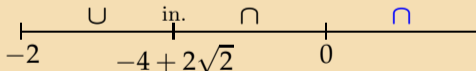
$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

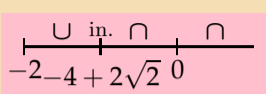
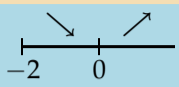
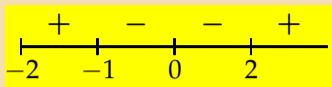
$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$ ; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$





$$f(-1) = 0$$

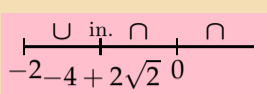
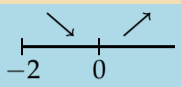
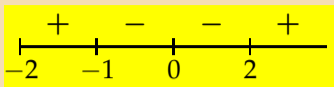
$$f(2) = 0$$

$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$

Vypíšeme nejdůležitější výsledky.



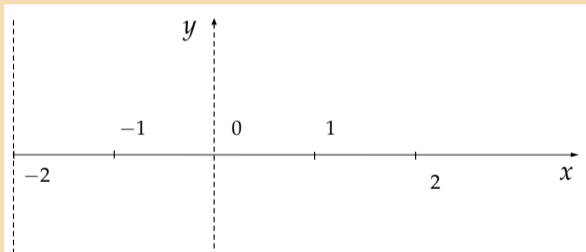
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

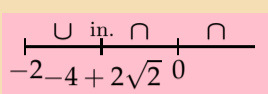
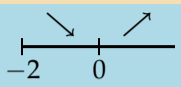
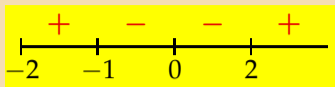
$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Zakreslíme souřadný systém. Pro hodnoty menší nebo rovny -2 a v 0 funkce není definována.



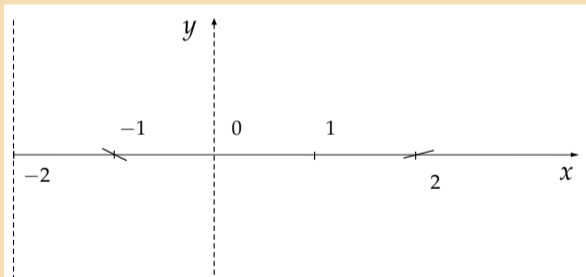
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

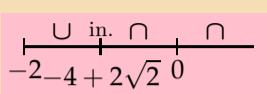
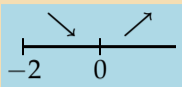
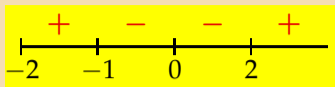
$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Vyznačíme průsečíky s osou  $x$ . Funkce klesá v bodě -1 a roste v bodě 2.



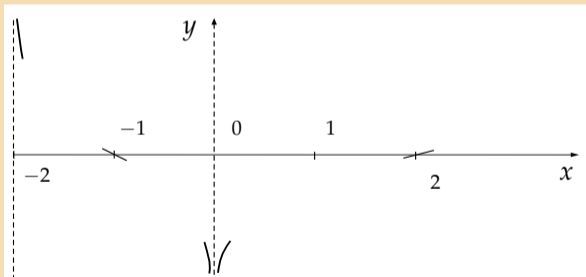
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

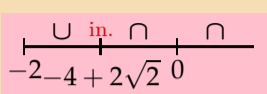
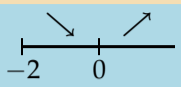
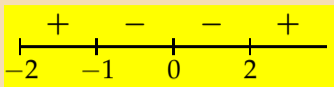
$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Nakreslíme funkci v okolí svislých asymptot.



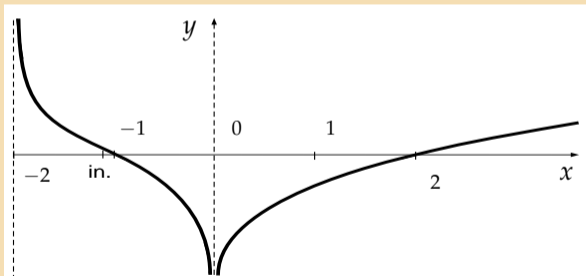
$$f(-1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(\infty) = \infty$$

$$f(0\pm) = -\infty$$

$$f(-4 + 2\sqrt{2}) \doteq 0.505$$



Vyznačíme inflexní bod a spojíme graf.

$$y = (x + 1)e^x$$

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R};$$

Definiční obor je celá množina  $\mathbb{R}$ .

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ průsečík s osou } y \text{ je } [0, 1],$$

Dosadíme  $x = 0$  do předpisu funkce  $f(x)$  a dostaneme průsečík s osou  $y$ .

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ průsečík s osou } y \text{ je } [0, 1],$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

Řešením rovnice  $y = 0$  dostaneme průsečík s osou  $x$ .

$$y = (x + 1)e^x \quad D(f) = \mathbb{R}; \text{ průsečík s osou } y \text{ je } [0, 1],$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

- Součin je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeden z činitelů.
- Činitel  $e^x$  je vždy kladné číslo.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $y$  je  $[-1, 0]$ ,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Průsečík s osou  $x$  je  $x = -1$ .

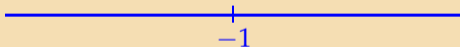
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



- Na osu  $x$  zaneseme průsečík.
- Nemáme žádné body nespojitosti.

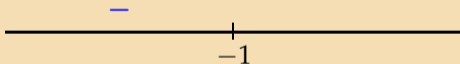
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



$$f(-2) = (-2 + 1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$$

Funkční hodnota  $f(-2)$  je záporná a protože se znaménko na intervalu  $(-\infty, -1)$  nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

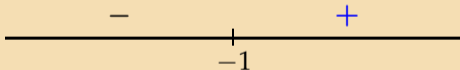
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



$$f(-2) = (-2 + 1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

Funkce je kladná v  $x = 0$ , tedy také na  $(-1, \infty)$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

- Vypočteme limity v  $\pm\infty$ . Začneme limitou v  $+\infty$ .
- Platí  $\infty + 1 = \infty$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

Vypočteme limitu v  $-\infty$ . "Dosadíme"  $x = -\infty$  a dostaneme  $-\infty + 1 = -\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . Dostáváme neurčitý výraz  $0 \times \infty$ . K výpočtu tedy musíme použít jinou metodu.

$y = (x + 1)e^x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

- Přepíšeme výraz na zlomek  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ . Limita je ve tvaru, kdy je možno použít L'Hospitalovo pravidlo.

$y = (x + 1)e^x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$$

Použijeme L'Hospitalovo pravidlo (derivujeme zvlášť čitatel a jmenovatel). Funkci  $e^{-x}$  derivujeme jako složenou:  $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x} \cdot (-1)$

$y = (x + 1)e^x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x$$

Zjednodušíme.

$y = (x + 1)e^x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

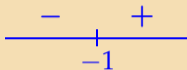
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = -e^{-\infty} = 0$$

Dosadíme. Z grafu funkce vidíme, že  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

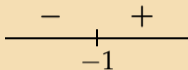


Vyšetříme chování derivace.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)'$$

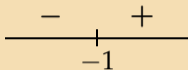
Funkci  $y = (x + 1) \cdot e^x$  derivujeme jako součin:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

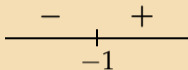


$$\begin{aligned} y' &= (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x \end{aligned}$$

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



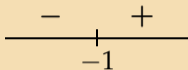
$$\begin{aligned}y' &= (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x + 1)\end{aligned}$$

Vytkneme  $e^x$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$\begin{aligned}y' &= (x + 1)' \cdot e^x + (x + 1) \cdot (e^x)' \\&= 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x \\&= e^x(1 + x + 1) \\&= e^x(x + 2)\end{aligned}$$

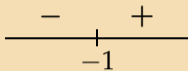
Zjednodušíme.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2);$$

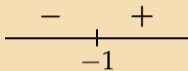


Dostáváme derivaci.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



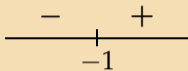
$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$

- Derivace je rovna nule právě tehdy, když  $(x + 2) = 0$ , jelikož  $e^x \neq 0$ . Dostáváme stacionární bod  $x = -2$ .
- Dosadíme  $f(-2) = (-2 + 1)e^{-2} = -e^{-2}$  a s pomocí kalkula-toru dostaneme  $f(-2) \doteq -0.14$ .

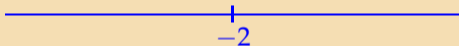
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$

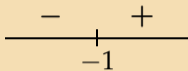


Na reálnou osu zaneseme stacionární bod. Nemáme žádné body nespojitosti.

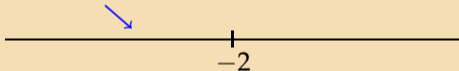
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



Zvolíme např.  $x = -3$  a dosadíme do první derivace:

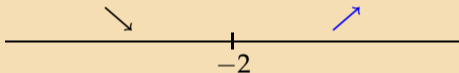
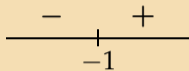
$y'(-3) = e^{-3}(-3 + 2) = -e^{-3} < 0$ . Funkce v bodě  $x = -3$  klesá a totéž platí na celém intervalu  $(-\infty, -2)$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



Dosazením  $x = 0$  do první derivace máme

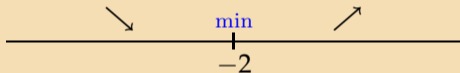
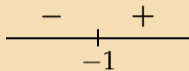
$y'(0) = e^0(0 + 2) = 2 > 0$ . Funkce v bodě roste  $x = 0$  a to také platí na celém intervalu  $(-2, \infty)$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



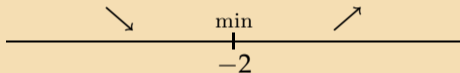
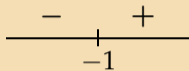
V bodě  $x = -2$  má funkce lokální minimum.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x \cdot (x + 2) + e^x \cdot 1$$

Spočteme  $y''$ . Derivujeme  $y' = e^x \cdot (x + 2)$  jako součin

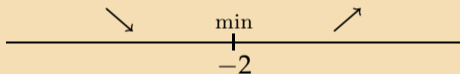
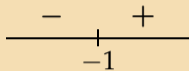
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$\begin{aligned} y'' &= e^x \cdot (x + 2) + e^x \cdot 1 \\ &= e^x(x + 2 + 1) \\ &= e^x(x + 3) \end{aligned}$$

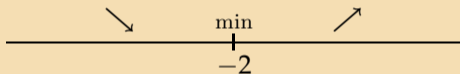
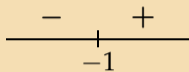
Zjednodušíme.

$y = (x + 1)e^x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou

$y$  je  $[-1, 0]$ ,

$f(+\infty) = \infty$ ,  $f(-\infty) = 0$ ;

$y' = e^x(x + 2)$ ; stac. bod je  $x = -2$ ;  $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$



$y'' = e^x(x + 3)$ ;

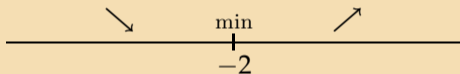
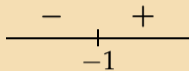
Máme druhou derivaci.

$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

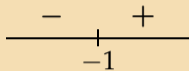
Hledáme bod, ve kterém platí  $y'' = 0$ . Protože  $e^x$  je vždy různá od nuly, musí platit  $(x + 3) = 0$ , proto  $x = -3$ .

$$f(-3) = (-3 + 1)e^{-3} = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

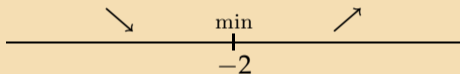
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

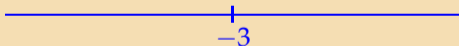
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

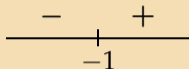


Nakreslíme reálnou osu s kritickým bodem. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v bodě  $x = -3$ .

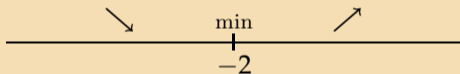
$$y = (x + 1)e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

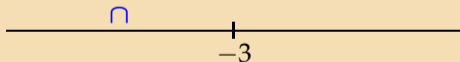
$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$



$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$

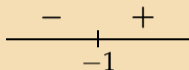


Funkce ke na intervalu  $(-\infty, -3)$  konkávní, protože  $-4 \in (-\infty, -3)$   
a  $y'''(-4) = e^{-4}(-4 + 3) = -e^{-4} < 0$ .

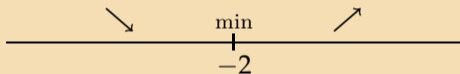
$y = (x + 1)e^x$   $D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou

$y$  je  $[-1, 0]$ ,

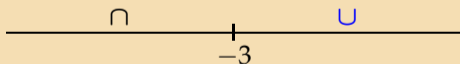
$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0$ ;



$y' = e^x(x + 2)$ ; stac. bod je  $x = -2$ ;  $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$



$y'' = e^x(x + 3)$ ;  $y'' = 0$  pro  $x = -3$ ,  $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$



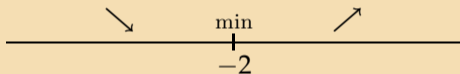
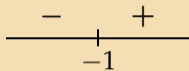
Funkce je konvexní na intervalu  $(-3, \infty)$ , protože  $-2 \in (-3, \infty)$  a v bodě  $x = -2$  je lok. minimum a  $y''(-2) = e^{-2}(-2 + 3) = e^{-2} > 0$ .

$$y = (x + 1)e^x$$

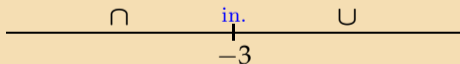
$D(f) = \mathbb{R}$ ; průsečík s osou  $y$  je  $[0, 1]$ , průsečík s osou  $x$  je  $[-1, 0]$ ,

$$f(+\infty) = \infty, f(-\infty) = 0;$$

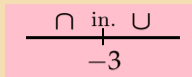
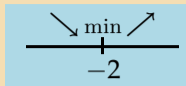
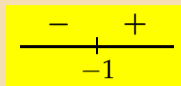
$$y' = e^x(x + 2); \quad \text{stac. bod je } x = -2; \quad f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$$



$$y'' = e^x(x + 3); \quad y'' = 0 \text{ pro } x = -3, \quad f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$$



Bod  $x = -3$  je tedy inflexní.



$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

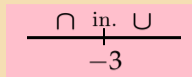
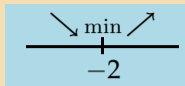
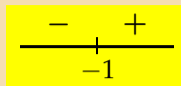
$$f(-2) \doteq -0.14$$

$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Shrňeme dosažené vypočty.



$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

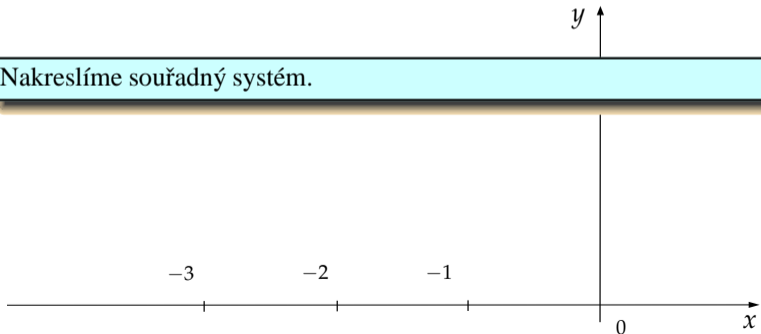
$$f(-2) \doteq -0.14$$

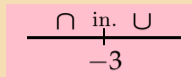
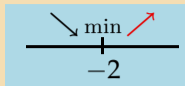
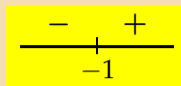
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Nakreslíme souřadný systém.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

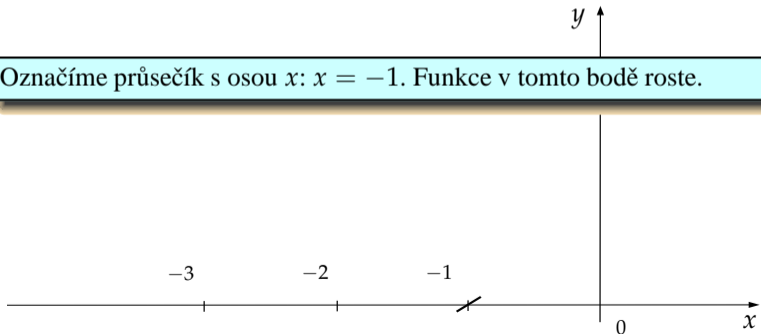
$$f(-2) \doteq -0.14$$

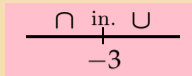
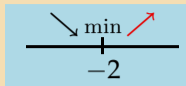
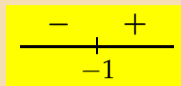
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Označíme průsečík s osou  $x$ :  $x = -1$ . Funkce v tomto bodě roste.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

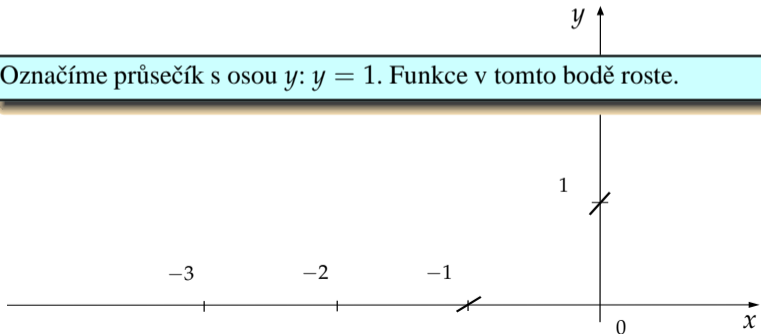
$$f(-2) \doteq -0.14$$

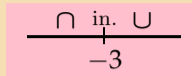
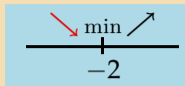
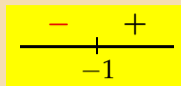
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Označíme průsečík s osou  $y$ :  $y = 1$ . Funkce v tomto bodě roste.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

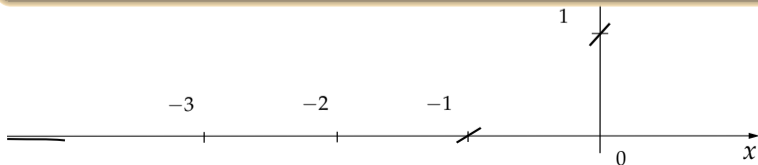
$$f(-2) \doteq -0.14$$

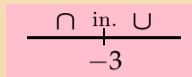
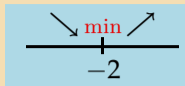
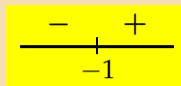
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Nakreslíme značky v blízkosti asymptoty v  $-\infty$ . Je třeba si uvědomit, že v blízkosti  $-\infty$  je funkce záporná a klesající, proto bude graf pod asymptotou.





$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 0$$

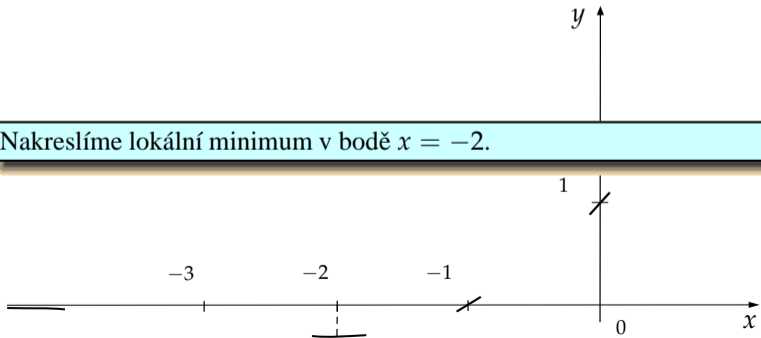
$$f(-2) \doteq -0.14$$

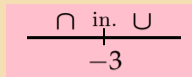
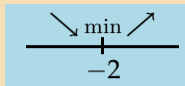
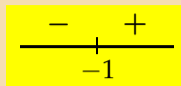
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$

$$f(-\infty) = 0$$

Nakreslíme lokální minimum v bodě  $x = -2$ .



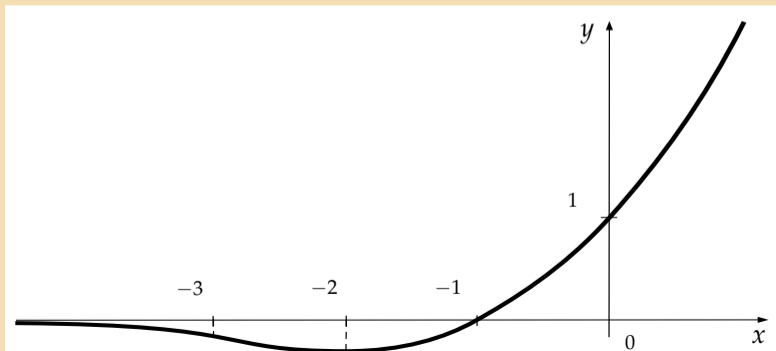


$$f(0) = 1$$

$$f(-2) \doteq -0.14$$

$$f(+\infty) = \infty$$

Spojíme nakreslené části do grafu.



KONEC