Přímá metoda integrace

Robert Mařík a Lenka Baráková

16. srpna 2005

Obsah

Najděte $\displaystyle\int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.$

$$\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.$

$$\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

- Integrál ze součtu je součet integrálů.
- Integrál násobku funkce je násobek integrálu.

Najděte $\int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.$

$$\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\int x \,\mathrm{d}x$$

Vytkneme konstantu před integrál.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x$$

Vytkneme konstantu a přepíšeme do mocninné funkce.

$$\boxed{\text{Najděte } \int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.}$$

$$\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\int x \,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}} \,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3} \,\mathrm{d}x$$

Vytkneme konstantu a přepíšeme do mocninné funkce.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+} \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

Vytkneme konstantu -1.

$$\boxed{\text{Najděte } \int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.}$$

$$\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\int x \,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}} \,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3} \,\mathrm{d}x - \int \sin x \,\mathrm{d}x + \int e^x \,\mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\frac{x^2}{2}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Najděte $\int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.$

$$
\begin{aligned}
\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x & \\
&= 2\int x \,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}} \,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3} \,\mathrm{d}x - \int \sin x \,\mathrm{d}x + \int e^x \,\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4}
\end{aligned}
$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+} \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x)$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + c$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\boxed{\text{Najděte } \int \left(2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x.}$$

$$\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + c$$

$$= x^2$$

Upravíme.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + c$$
$$= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4}$$

Upravíme.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+} \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + c$$
$$= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2}$$

Upravíme.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+}\frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + c$$
$$= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2} + \cos x$$

Upravíme.

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{+} \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + c$$
$$= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + c$$

Upravíme.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Pro integrování je vhodnější součet, proto zlomek rozdělíme na dva.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Každý sčítanec integrujeme zvlášť, konstanty vytkneme před integrál.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| +$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\boxed{\text{Najděte } \int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x.}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c
\end{aligned}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Najděte $\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x| + 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + c\\ &= \ln|x| - \frac{3}{x} + c\end{aligned}$$

Nakonec výraz upravíme.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

V případě, že je v integrálu funkce tangens vždy jej rozepisujeme pomocí sinus a cosinus.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$
$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

- Platí $(\cos x)' = -\sin x$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$
$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx$$
$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx$$

Formálně použijeme vztah $(\cos x)' = -\sin x$, abychom viděli vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$.

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\ln|\cos x| + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

Najděte $\int \frac{4x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{4x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{4x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x$$

V případě jednoduché ryze lomené racionální funkce je vhodné použít vzorec $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$. Funkce $f(x) = x^2 - 5$, proto v čitateli potřebujeme $f'(x) = 2x$. Vytkneme před integrál 2.

Najděte $\int \frac{4x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{4x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x^2-5| + c$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

- Platí $(x^2+4x+5)' = 2x+4$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme do tvaru $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+c\end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+c$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

Tentokrát předchozí postup nelze použít. V čitateli je konstanta.
Použijeme proto vzorec $\int \frac{1}{x^2+A^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x$$

Jmenovatel přepíšeme do tvaru $(x+\text{něco})^2 + \text{zbylá konstanta}$. Tomuto triku říkáme doplnění na čtverec:

$$x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

Nyní použijeme vzorec $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$ pro $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, tedy

$$\int f(x+1)\,\mathrm{d}x = F(x+1)+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c.$$

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x$$

Jedná se o mocninnou funkci.

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(x+6)^{-2}}{-2}
\end{aligned}
$$

- $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde F je integrál z f.
- V našem případě je $f(x) = x^{-3}$, $F(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2}$ a $a = 1$.

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(x+6)^{-2}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2(x+6)^2} + C \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$
- $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a = 2$.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2 - 1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

Přepíšeme na mocninnou funkci.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=-1$.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$= \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1} = \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$$

- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$
- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a = -1$.

Najděte následující integrály.

- $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x$
- $\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b)$, v našem případě $a = 3$.

$$= \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x} \, \mathrm{d}x = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Upravíme podle vzorce $(a+b)^2$:

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

Integrujeme podle vzorců

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x},$$

$$\boxed{\int 1 \, dx = x},$$

$$\boxed{\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)}, \text{ kde } \int f(x) \, dx = F(x).$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, \mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Použijeme vzorec

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, \mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Integrujeme podle vzorců

$$\boxed{\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x}$$

a

$$\boxed{\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b)}, \text{ kde } \int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x).$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int \Big(1 - \cos(2x)\Big) \, dx$$

Vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(1 - \cos(2x)\Big) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right] + C$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Konec